



十二個課堂遊戲探索問題

文·圖／游森棚

筆者常應邀到中小學演講時，老師多反應很難找到課外題材。的確，找到一個能深入耕耘的問題是不容易。但是，找一個課堂上的探索問題是不難的。

底下提供一些較不常見的問題（但都不是新的），每一個都可以當作遊戲或探索題材，讓學生作實驗，然後看能不能有一些發現，最終得到一個小定理。題目從小學到高中皆適用，敘述是一般的，老師可以改編題目，並視學生的情況，從 $n=2$ 、 3 、……的簡單情況開始，適當布置難度，

給學生當作挑戰。

1 孔明神算

如圖 1，孔明棋（跳棋） A 跳過 B 後把 B 拿掉。

在無限大的棋盤上，有 $n \times n$ 的棋子。請問，按照孔明棋的規則，

- (1) 「最少」可以剩下幾個棋子？
- (2) 「最多」可以剩下幾個棋子？

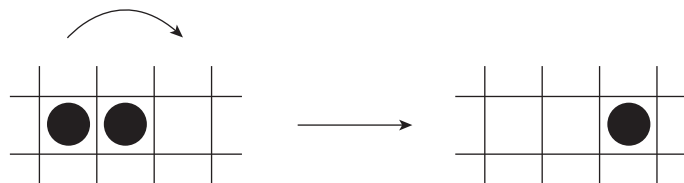


圖 1

2 前後左右

如圖 2，一個正 n 邊形，連接所有的對角線與邊。

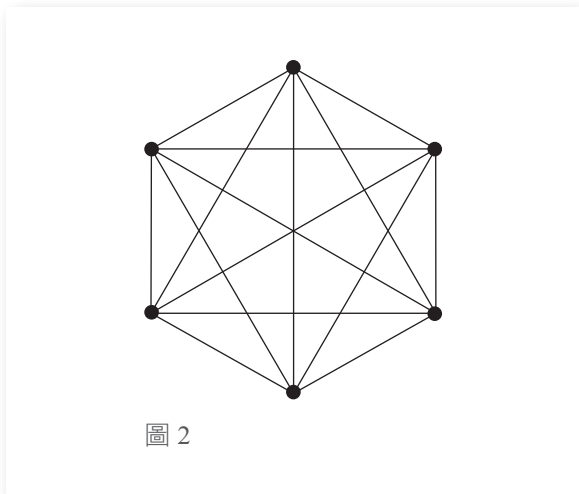


圖 2

你可以自由給定每一條邊與每一條對角線的方向。問能否讓所有的向量和變成 0？如果可以，要怎麼做？

3 彎彎曲曲

如圖 3，有兩條十段的封閉折線（頭尾相接）。第一個折線有 4 個交點，第二個有 9 個交點。

問 n 段的封閉曲線可能有幾個交點？

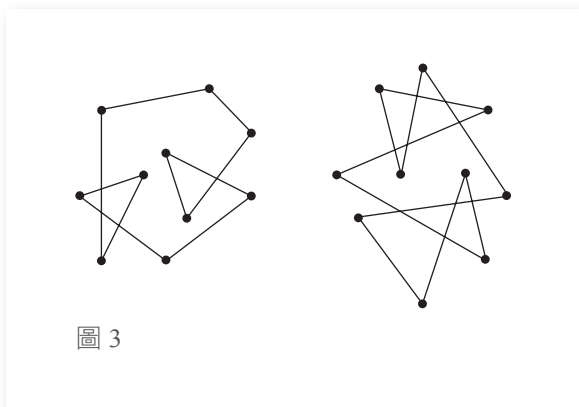


圖 3

4 平均

觀察：

$$1 = \frac{1}{1}, 2 = \frac{2}{1}, 3 = \frac{4+2}{2}, 4 = \frac{4}{1},$$

$$5 = \frac{8+2}{2}, 6 = \frac{8+4}{2}, 7 = \frac{16+8+2+2}{2}$$

- (1) 那些自然數可以寫成 2 的幕次（可以重複使用）的平均數？
- (2) 那些自然數可以寫成 2 的幕次（不能重複使用）的平均數？

5 撿石頭

如圖 4，有 $n > 1$ 個石頭。小志和小定輪流拿石頭，小志先拿。

小志第一步從中拿若干個石頭（但第一步不能全拿），之後每個人至多可以拿走前步對方拿走石頭的兩倍，拿到最後一個石頭的贏。問 n 是多少時，小志有必勝策略？ n 是多少時，小定有必勝策略？ n 是多少時兩人不分勝負？

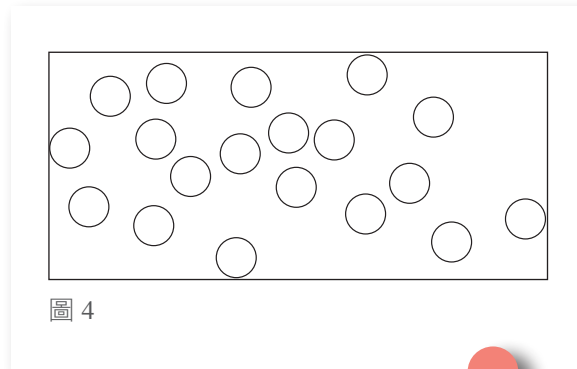
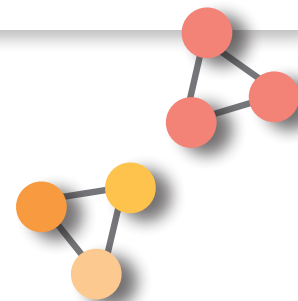


圖 4



6 神算

如圖 5，一共 n 個紅綠黃三種球各若干個排成第一列。在下一列排 $n - 1$ 個球（每個球插空隙）成第二列，以此類推排第三列……直到最後一列只有一個球（圖 5）。

但從第二列起，球的顏色由其左上和右上決定。若左上右上不同色，則此球為第三種顏色。若左上右上同色，則此球同色。問 n 是多少時，可以由第一列直接預測最後一列球的顏色？如何判斷？

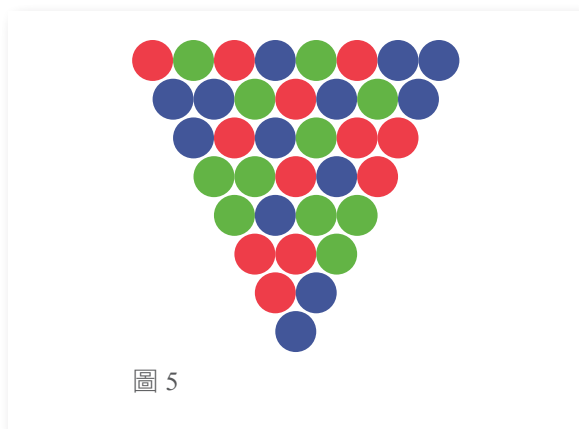


圖 5

7 疊疊樂

(1) 如圖 6，正三角形中放 n 個矩形，請問矩形的面積最多可以佔多少？

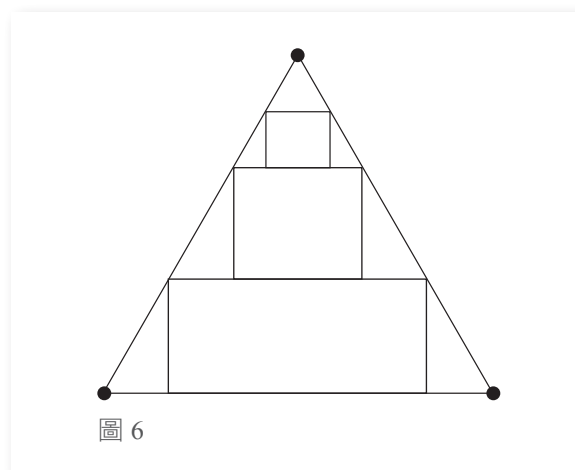


圖 6

- (2) 正三角形中任意放 n 個矩形，請問矩形的面積最多可以佔多少？
- (3) 正三角形中放 n 個圓，請問圓的面積最多可以佔多少？
（這一題相當困難，筆者不知道一般的結果。）

8 剪紙技術

如圖 7，有一張 $n \times n$ 的單位方格紙，今沿著格線折若干次，然後可以沿著格線剪兩刀。

請問最多可以把紙剪成幾片？

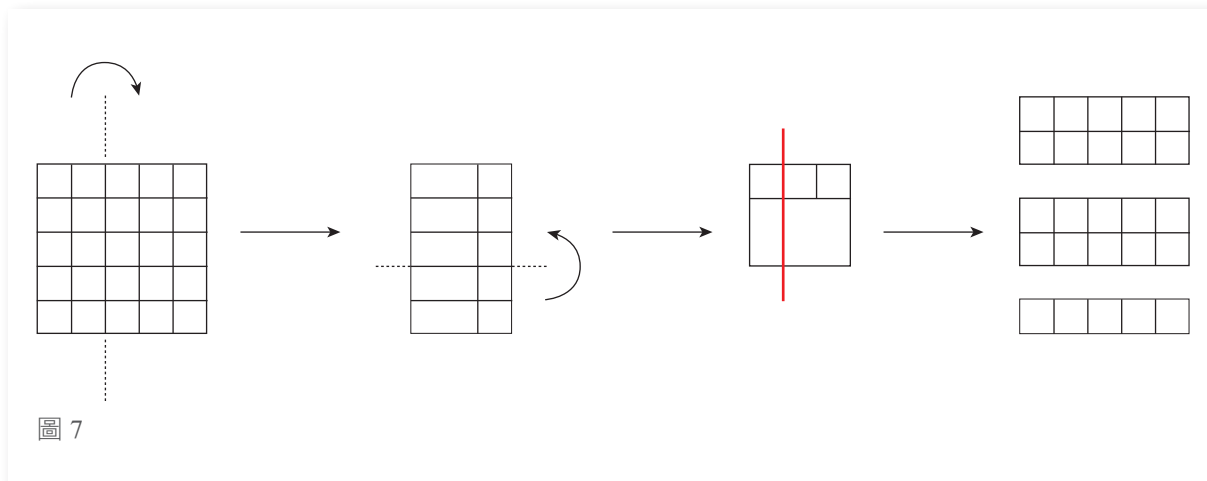


圖 7

9 湊實根

小志和小定玩遊戲，小定先選一個數當作下列方程式

$$x^2 + \bullet x + \bullet = 0$$

的兩個係數之一（要當作常數項或是一次項可由他決定）。然後小定再選一個數當作另一個係數。如果所得的方程式有實根，則小志獲勝。如果沒有實根，則小定獲勝。請問誰有必勝策略？

10 內積

n 是自然數。 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是兩個 01 向量（即每個座標都是 0 或 1）。 O_n 是使得

$$x \cdot y$$

是奇數的 (x, y) 方法數。而 E_n 是使得 $x \cdot y$ 是偶數的 (x, y) 方法數。你能否找到 E_n 和 O_n 的關係？

11 不要等腰

$n \times n$ 個點，最多可以選出幾個點，使得選出的點任三點都不形成等腰三角形？（註：除了少數幾個 n 之外，筆者不知道一般的結果。）

12 偷看

如圖 8， m, n 都是奇數。 $m \times n$ 的棋盤如同西洋棋黑白塗色，左上角的格子是黑色的，其中有一個角落藏有小志的寶物。今小志不想讓小定看到寶物，用 1×2 的骨牌蓋住這個棋盤，只露出另一個角落的黑格。

但小定可以像智慧盤一樣挪動這些骨牌若干次，如果露出的格子是小志的寶物，小定就算找到了寶物。請問小志和小定那一個人可以成功？

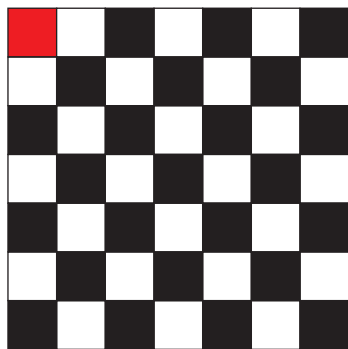
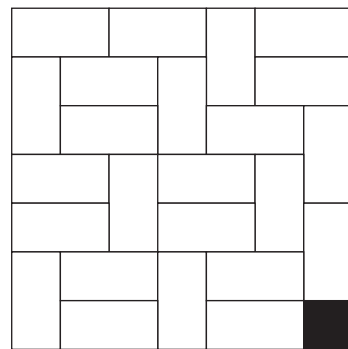


圖 8



游森棚 任教於國立臺灣師範大學數學系與空軍軍官學校