1-2 整數的加減

1 整數的加法運算　2 整數的減法運算
3 整數的加減運算　4 數線上兩點的距離

主題 1 整數的加法運算

小豪負責管理冷凍櫃的溫度，每天上午和下午都需要按情形調整一次，下表是他一週工作的紀錄，記錄每一次調整溫度的變化量。

以「＋」表示調高溫度，以「－」表示調低溫度。

星 期	上午	下午	溫度總變化
星期一	$+3$	$+2$	$(+3)+(+2)$
星期二	-4	-2	$(-4)+(-2)$
星期三	$+4$	-2	$(+4)+(-2)$
星期四	-2	$+3$	$(-2)+(+3)$
星期五	-3	$+1$	$(-3)+(+1)$

我們可以利用數線來表示溫度的變化。以調整前的溫度為基準，當作原點，箭頭向右表示溫度調高，每調高 1 度，就向右移動 1 個單位；箭頭向左表示溫度調低，每調低 1 度，就向左移動 1 個單位。

同號數相加

星期一：先調高 3 度，再調高 2 度，

合起來共調高 $3+2=5$ 度，記為 $+5$ 度。

因此溫度總變化為

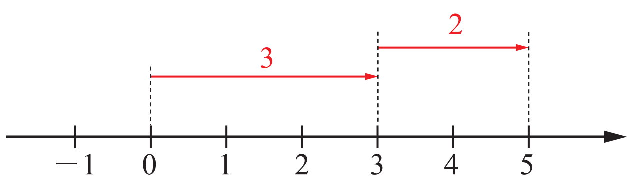
$(+3)+(+2)=+(3+2)=+5$（或 5）。

Hint

共同的性質符號

$(+3)+(+2)=+(3+2)$

數字部分相加



星期二：先調低 4 度，再調低 2 度，

合起來共調低 4＋2＝6 度，記為－6 度。

因此溫度總變化為

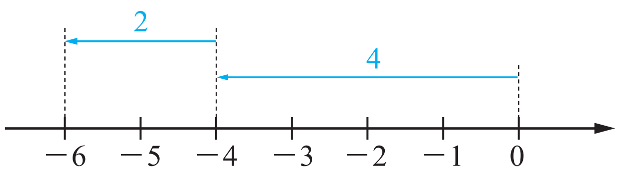
$(-4)+(-2)=-(4+2)=-6$。

Hint

共同的性質符號

$(-4)+(-2)=-(4+2)$

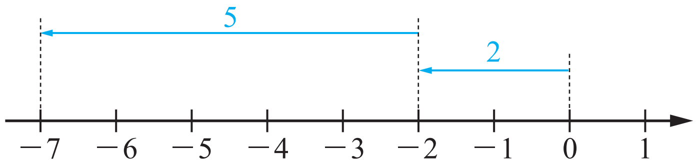
數字部分相加



例 1 利用數線進行同號數相加

利用數線求 $(-2)+(-5)$ 的值。

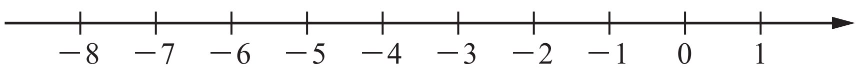
解 從原點開始，先向左移動 2 個單位長，再向左移動 5 個單位長，一共向左移動 2＋5＝7 個單位長，記為－7。



所以 $(-2)+(-5)=-(2+5)=-7$。

隨堂練習

利用數線求 $(-3)+(-4)$ 的值。



由前面討論可知，如果兩次溫度都是調高 (或調低) 時，溫度總變化就是把數字部分相加，然後加上正號 (或負號)。事實上：

Key point

同號數相加

兩個同號數相加時，其結果等於兩數的絕對值相加，而性質符號與原來的兩數相同。

例 2 同號數相加

計算下列各式的值。

(1) $(-9)+(-7)$　　(2) $(-13)+(-28)$

解

(1) $(-9)+(-7)$
$=-(9+7)$
$=-16$

(2) $(-13)+(-28)$
$=-(13+28)$
$=-41$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $(-6)+(-3)$　　(2) $(-16)+(-8)$

異號數相加

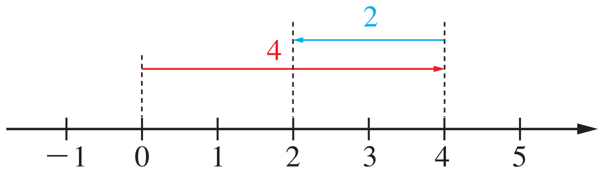
星期三：先調高 4 度，再調低 2 度，
因為調高的比調低的多，
合起來共調高 $4-2=2$ 度，記為 $+2$ 度。
因此溫度總變化為
$(+4)+(-2)=+(4-2)=+2$（或 2）。

Hint

取絕對值較大者的性質符號

$(+4)+(-2)=+(4-2)$

數字部分相減（大減小）



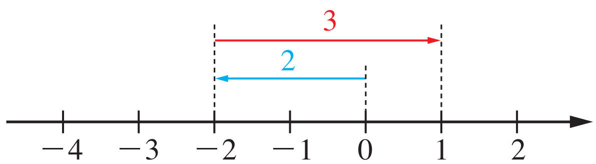
星期四：先調低 2 度，再調高 3 度，
因為調高的比調低的多，
合起來共調高 $3-2=1$ 度，記為 $+1$ 度。
因此溫度總變化為
$(-2)+(+3)=+(3-2)=+1$（或 1）。

Hint

取絕對值較大者的性質符號

$(-2)+(+3)=+(3-2)$

數字部分相減（大減小）



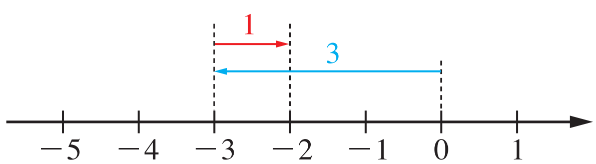
星期五：先調低 3 度，再調高 1 度，
因為調低的比調高的多，
合起來共調低 $3-1=2$ 度，記為 -2 度。
因此溫度總變化為
$(-3)+(+1)=-(3-1)=-2$。

Hint

取絕對值較大者的性質符號

$(-3)+(+1)=-(3-1)$

數字部分相減（大減小）



例 3

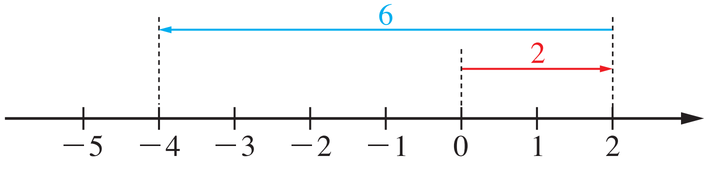
利用數線進行異號數相加

利用數線求 $2+(-6)$ 的值。

解　從原點開始，先向右移動 2 個單位長，

再向左移動 6 個單位長，

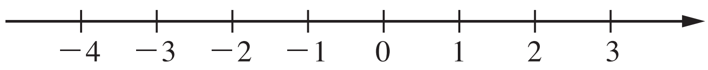
因為向左比向右多，兩次移動後共向左移動 $6-2=4$ 個單位長。



所以 $2+(-6)=-(6-2)=-4$。

隨堂練習

利用數線求 $(-3)+6$ 的值。



由前面的討論可以知道：

Key point

異號數相加

兩個異號數相加時，其結果等於兩數的絕對值相減 (大減小)，
而性質符號與絕對值較大的數相同。

例 4 異號數相加

計算下列各式的值。

(1) $13+(-4)$　　(2) $(-15)+9$

解

(1) $13+(-4)$

$=+(13-4)$

$=9$

(2) $(-15)+9$

$=-(15-9)$

$=-6$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $24+(-11)$　　(2) $(-22)+6$

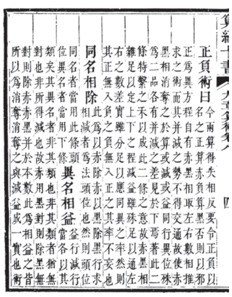
動動腦

關於「如果 a 是一個整數，那麼 $5+a$ 一定比 5 大！」的敘述，你認為說法正確嗎？為什麼？

數學好好玩　算籌

劉徽

（約西元 225～295 年）中國 三國時代著名的數學家，其重要的著作包含《九章算術》注解。他提出了更精確的證明與定義，使原書更加完善。



算籌為中國古代用來計數的一種工具，形狀就像一根小棍棒。在《九章算術》注解中，明確記載「正算赤，負算黑」，即是以紅色算籌表示正數，黑色算籌表示負數。

整數加法的特別情形

1. 與 0 相加

例如：$(-4)+0$，可看成第一天溫度調低 4 度，第二天溫度不改變，合起來是調低 4 度，因此 $(-4)+0=-4$。

同樣的，$0+(-5)=-5$。

2. 與相反數相加

例如：$3+(-3)$，可看成第一天溫度調高 3 度，第二天溫度調低 3 度，調高的溫度和調低的溫度相同，互相抵消，相當於沒有調整，因此 $3+(-3)=0$。

同樣的，$(-5)+5=0$。

Key point

整數加法的特別情形

1. 與 0 相加：任何一整數 a 與 0 相加，其值不變，即

$$a+0=a\text{；}0+a=a\text{。}$$

2. 與相反數相加：兩個整數互為相反數時，它們的和為 0。也就是說，不管 a 是正整數或是負整數，

$$a+(-a)=0\text{；}(-a)+a=0\text{。}$$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $(-18)+0$

(2) $0+(-12)$

(3) $(-8)+8$

(4) $13+(-13)$

整數的加法特性

1. 加法交換律

例如：$(-2)+5$，可看成第一天溫度調低 2 度，第二天溫度調高 5 度，
合起來是調高 3 度，因此 $(-2)+5=3$。
$5+(-2)$，可看成第一天溫度調高 5 度，第二天溫度調低 2 度，
合起來是調高 3 度，因此 $5+(-2)=3$。

雖然溫度調整的先後順序不同，但是溫度總變化都是調高 3 度。

事實上，計算兩個整數相加時，調換兩數的順序，相加的結果不變。

2. 加法結合律

如果溫度第一天調高 5 度，第二天調低 3 度，第三天調高 1 度，那麼溫度的變化為何？

方法1 前兩天的溫度變化為 $(+5)+(-3)=+2$，
第三天再調高 1 度，總共溫度變化為 $(+2)+(+1)=+3$，
也就是調高 3 度，因此可寫成 $[5+(-3)]+1=2+1=3$。

方法2 後兩天的溫度變化為 $(-3)+(+1)=-2$，
而第一天調高 5 度，總共溫度變化為 $(+5)+(-2)=+3$，
也就是調高 3 度，因此可寫成 $5+[(-3)+1]=5+(-2)=3$。

由上面的討論，兩個方法算出來的結果都相同。事實上，當三個整數相加時，先算前面兩個數或是先算後面兩個數，結果都是相同的。因此，我們可將 $5+(-3)+1$ 寫成 $[5+(-3)]+1$ 或 $5+[(-3)+1]$。

Key point

整數的加法特性

1. **加法交換律**：若 a、b 為整數，則 $a+b=b+a$。
2. **加法結合律**：若 a、b、c 為整數，則 $(a+b)+c=a+(b+c)$。

例 5　利用加法交換律、結合律求算式的值

計算 $(-23)+1205+(-77)$ 的值。

解

$(-23)+1205+(-77)$

$=1205+(-23)+(-77)$　交換律

$=1205+(-100)$　結合律

$=1105$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $132+(-59)+(-132)$　　(2) $(-21)+1235+(-14)$

學完後也可以利用計算機來幫助驗算喔！

事實上，不只三個數相加時可以隨意組合、調換順序，四個以上的數相加時，也可以隨意組合、調換順序。我們來看下面的例題。

例 6　多個整數相加

計算 $(-2025)+(-89)+(-11)+(-75)$ 的值。

計算機操作

AC 2025 +/-
\+ 89 +/-
\+ 11 +/-
\+ 75 +/-
=
-2200

解

$(-2025)+(-89)+(-11)+(-75)$

$=[(-2025)+(-75)]+[(-89)+(-11)]$

$=(-2100)+(-100)$

$=-2200$

隨堂練習

計算 $(-270)+65+(-230)+35$ 的值。

主題 2 整數的減法運算

當我們要計算兩個數相差多少時，我們會用減法來列式。例如冷凍庫的溫度中，「最後溫度－原來溫度＝溫度變化」。

1. 大的數－小的數＝正數

如果最後溫度高於原來溫度，表示溫度上升，此時溫度變化為正數。

例如溫度原來是 6 度，調整後溫度變成 10 度，溫度變化為 $10-6=4$（度）。

2. 小的數－大的數＝負數

如果最後溫度低於原來溫度，表示溫度下降，此時溫度變化可用「負數」來表示。例如溫度原來是 5 度，調整溫度後變成 2 度，溫度下降了 3 度，或者說溫度變化為 -3 度，用算式寫成 $2-5=-3$。

有了「負數」，我們才能夠處理「小的數－大的數」的算式。當溫度出現零下溫度時，我們也可以使用「最後溫度－原來溫度＝溫度變化」來列式計算。

1. 正數－負數

冷凍庫原為零下 3 度，調整後溫度變成 8 度，則溫度變化為多少？

原來溫度是 -3 度，而最後溫度是 8 度，

溫度變化可以列式為 $8-(-3)$。

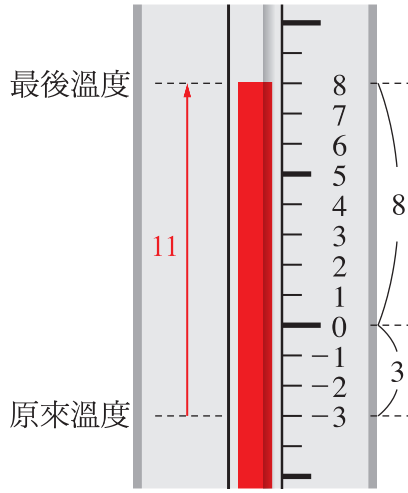
從右圖可以看出溫度上升了 11 度，

所以溫度變化為 $8-(-3)=11$（度）。

另外，我們知道 $8+3$ 的值也是 11，

所以 $8\underbrace{-(-3)}=8\underbrace{+3}=11$。

減去 -3 就是加上 3



2. 負數－正數

冷凍庫原為 4 度，調整後溫度變成零下 6 度，則溫度變化為多少？

原來溫度是 4 度，而最後溫度是 -6 度，

溫度變化可以列式為 $(-6)-4$。

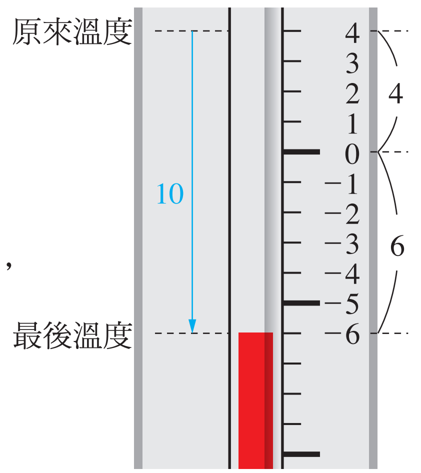
從右圖可以看出溫度下降了 10 度，

所以溫度變化為 $(-6)-4=-10$ (度)。

另外，我們知道 $(-6)+(-4)$ 的值也是 -10，

所以 $(-6)-4=(-6)+(-4)=-10$。

減去 4 就是加上 -4



3. 負數－負數

冷凍庫原為零下 5 度，調整後溫度變成零下 8 度，則溫度變化為多少？

原來溫度是 -5 度，而最後溫度是 -8 度，

溫度變化可以列式為 $(-8)-(-5)$。

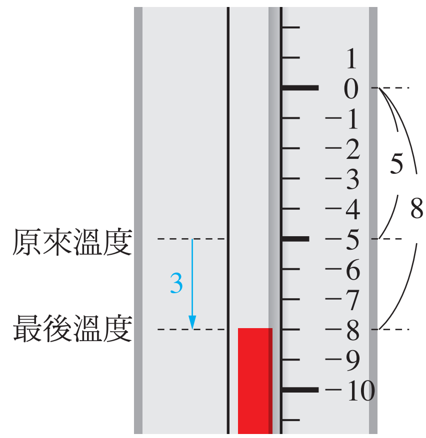
從右圖可以看出溫度下降了 3 度，

所以溫度變化為 $(-8)-(-5)=-3$ (度)。

另外，我們知道 $(-8)+5$ 的值也是 -3，

所以 $(-8)-(-5)=(-8)+5=-3$。

減去 -5 就是加上 5



由前面的討論，我們知道：

減法變加法

$$2-5=2+(-5)=-3$$

$$8-(-3)=8+(+3)=11$$

$$(-6)-4=(-6)+(-4)=-10$$

$$(-8)-(-5)=(-8)+(+5)=-3$$

互為相反數

事實上，對於任意兩個整數 a、b 而言，$a-b=a+(-b)$。也就是說，**減去一個數等於加上這個數的相反數**。

Key point

整數的減法運算

若 a、b 為整數，則 $a-b=a+(\,b$ 的相反數$\,)=a+(-b)$。

例 7 整數的減法運算

計算下列各式的值。

(1) $14-23$

(2) $125-(-25)$

(3) $(-63)-37$

(4) $(-133)-(-13)$

解

(1) $14-23=14+(-23)=-(23-14)=-9$

(2) $125-(-25)=125+25=150$

(3) $(-63)-37=(-63)+(-37)=-(63+37)=-100$

(4) $(-133)-(-13)=(-133)+13=-(133-13)=-120$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $6-32$

(2) $12-(-27)$

(3) $(-33)-18$

(4) $(-18)-(-27)$

動動腦

整數的加法運算有交換律和結合律，那麼整數的減法運算中，有沒有交換律和結合律呢？請舉例說明。

主題 3 整數的加減運算

處理加減法混合運算時，除了要由左而右的順序計算之外，我們還可以把減法轉換成加法，這樣就可以利用加法的交換律和結合律，以方便計算。

例 8 整數的加減運算

計算下列各式的值。

(1) $(-60)-(-42)+18$　　(2) $(-198)-25-(-199)$

解 (1) $(-60)-(-42)+18$

$=(-60)+42+18$

$=(-60)+(42+18)$ 結合律

$=(-60)+60$

$=0$

(2) $(-198)-25-(-199)$

$=(-198)+(-25)+199$

$=(-198)+199+(-25)$ 交換律

$=1+(-25)$

$=-24$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $(-53)-153+3$　　(2) $(-652)+125-(-552)$

(3) $158+(-37)-8+37$　　(4) $(-22)-(-24)+(-26)-(-28)$

如果算式中含有絕對值，應優先處理絕對值，再做其他的運算。

例 9 含絕對值的算式運算

計算下列各式的值。

(1) $|-25|-|-75|-18$　　(2) $30+|(-64)+14|-25$

解 (1) $|-25|-|-75|-18$

$=25-75-18$

$=(-50)-18$

$=-68$

(2) $30+|(-64)+14|-25$

$=30+|-50|-25$

$=30+50-25$

$=80-25$

$=55$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $(-15)-|-8|+(-4)$　　(2) $|-52|-(-24)-|-14+8|$

動動腦

$2-|-5|$ 與 $2-(-5)$ 的運算結果相同嗎？

例 10　$(a+b)$ 與 $(a-b)$ 的相反數

比較下列各題中，兩式的運算結果是否相同。

(1) $-(6+7)$ 和 $-6-7$　　　　(2) $-(4-6)$ 和 $-4+6$

解 (1) $-(6+7)=-13$

$-6-7=(-6)+(-7)=-13$

所以兩式的運算結果相同。

(2) $-(4-6)=-(-2)=2$

$-4+6=6-4=2$

所以兩式的運算結果相同。

隨堂練習

比較下列各題中，兩式的運算結果是否相同。

(1) $-(-2+5)$ 和 $2-5$　　　　(2) $-(-2-4)$ 和 $2+4$

由例 10 可知，

$(6+7)$ 的相反數 $=-(6+7)=-6-7$；

$(4-6)$ 的相反數 $=-(4-6)=-4+6$。

事實上，若 a、b 為整數，則 $(a+b)$ **的相反數為** $\boldsymbol{-(a+b)=-a-b}$；

而 $(a-b)$ **的相反數為** $\boldsymbol{-(a-b)=-a+b}$。

在處理整數的加減運算時，經常會遇到有括號的問題，而我們通常會先算出括號內的數。但有時候，先去掉括號反而較好計算，接下來我們要探討去括號的規則。

例 11 去括號規則

比較下列各題中，兩式的運算結果是否相同。

(1) $1+(-5+3)$ 和 $1-5+3$　　(2) $(-4)-(-7+2)$ 和 $(-4)+7-2$

解 (1) $1+(-5+3)=1+(-2)=-1$

$1-5+3=(-4)+3=-1$

所以兩式的運算結果相同。

(2) $(-4)-(-7+2)=(-4)-(-5)=(-4)+5=1$

$(-4)+7-2=3-2=1$

所以兩式的運算結果相同。

由例 11 可知，

$$1+(-5+3)=1-5+3$$

$$(-4)-(-7+2)=(-4)+7-2$$

事實上，**若括號前面是「＋」號，去括號後原來括號內的＋、－不變；**

若括號前面是「－」號，去括號後原來括號內的＋變－、－變＋。

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $299-(396+299)$　　(2) $(-1653)-(26-1654)$

例 12　整數加減的應用問題

下表是達茂公司在上半年的營業額，記錄方式是以每月 100 萬元為基準、萬元為單位。+28 表示營業額比基準多 28 萬元，−14 表示營業額比基準少 14 萬元。回答下列問題：

月分	一月	二月	三月	四月	五月	六月
與基準的差	+28	−14	−20	+11	−8	+6

(1) 二月實際的營業額是多少萬元？

(2) 這六個月中，營業額最高月分比營業額最低月分多出多少萬元？

(3) 一月到六月的總營業額有沒有超過 600 萬元？

解 (1) 二月的營業額比基準少 14 萬元，

$100+(-14)=100-14=86$，

所以二月營業額是 86 萬元。

(2) 營業額最高是一月，最低是三月，

所以最高比最低多出 $(+28)-(-20)=28+20=48$ 萬元。

(3) 以每個月 100 萬元為基準，6 個月的基準總和是 600 萬元，

$(+28)+(-14)+(-20)+(+11)+(-8)+(+6)=3$，

總營業額比 600 萬元多了 3 萬元，所以超過 600 萬元。

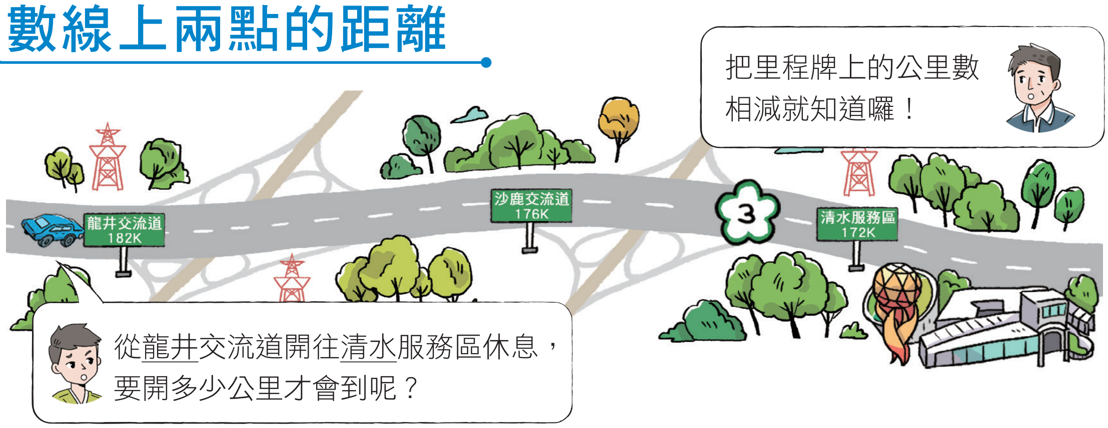
隨堂練習

承例 12，回答下列問題：

(1) 五月實際的營業額是多少萬元？

(2) 二月的營業額比三月的營業額高或低多少萬元？

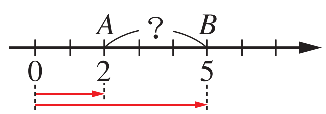
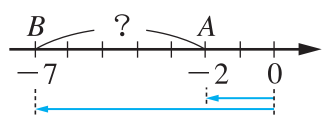
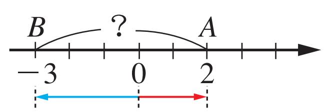
主題 4 數線上兩點的距離



我們接下來就要來討論數線上兩點間的距離。

問題探索 數線上兩點的距離

1. 根據數線上兩點 $A(a)$、$B(b)$ 的位置，在下表空格中填入適當的數。

數　　線	A、B 兩點的距離	$a-b$	$b-a$
	3	$2-5=-3$	$5-2=3$
			
			

2. 觀察上表，比較 $(a-b)$ 與 $(b-a)$：

⑴ $(a-b)$ 與 $(b-a)$ 是否互為相反數？兩者的絕對值相等嗎？

⑵ $(a-b)$ 的絕對值與 $(b-a)$ 的絕對值和 A、B 兩點的距離有什麼關係呢？

對於 A、B 兩點而言，我們會以「$\overline{AB}$」(讀作「線段 AB」) 來表示 A、B 兩點之間的線段，或表示 A、B 兩點的距離。由問題探索可知，A、B 兩點的距離就是這兩點所表示的兩數之差的絕對值。

Key point

數線上兩點的距離

一數線上有 $A(a)$、$B(b)$ 兩點，則 A、B 兩點的距離可記作 $\overline{AB}$，$\overline{AB}=|a-b|=|b-a|$，也就是 a、b 兩數中，大數減小數的值。

例 13　數線上兩點的距離

數線上有 $A(-9)$、$B(6)$ 兩點，則 A、B 兩點的距離 $\overline{AB}$ 為多少？

解1 **以絕對值來計算：**

$\overline{AB}=|(-9)-6|=|-15|=15$

解2 **以大數減去小數來計算：**

$\overline{AB}=6-(-9)=6+9=15$

隨堂練習

數線上有 $C(-14)$、$D(-9)$ 兩點，則 C、D 兩點的距離 $\overline{CD}$ 為多少？

例 14　數線上兩點的距離

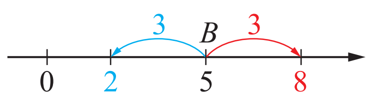
數線上有 $A(a)$、$B(5)$ 兩點，如果 $\overline{AB}=3$，則 a 可能是多少？

解 $\overline{AB}=3$，表示 $A(a)$ 和 $B(5)$ 的距離是 3，

如果 a 在 5 的右邊，則 $a=5+3=8$；

如果 a 在 5 的左邊，則 $a=5-3=2$。

所以 $a=8$ 或 2。

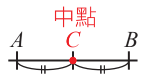


隨堂練習

數線上有 $C(c)$、$D(4)$ 兩點，如果 $\overline{CD}=6$，則 c 可能是多少？

圖解筆記

線段的中點



數線上有 A、B、C 三點，如果 C 在 A、B 之間，且 C 到 A、B 的距離相等，我們就稱 C 點為 A、B (或 $\overline{AB}$) 的**中點**。

例 15 線段的中點

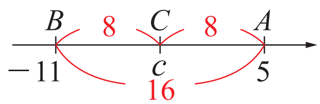
數線上有 $A(5)$、$B(-11)$、$C(c)$ 三點，若 C 為 A、B 的中點，則 c 是多少？

解 $\overline{AB}=|5-(-11)|=16$，

所以 $\overline{AC}=\overline{BC}=\dfrac{16}{2}=8$。

C 點在 B 點右邊 8 單位，

$c=(-11)+8=-3$。



Hint

也可以這樣寫：

C 點在 A 點左邊 8 單位，

$c=5-8=-3$。

隨堂練習

數線上有 $A(-3)$、$B(7)$、$C(c)$ 三點，若 C 為 A、B 的中點，則 c 是多少？

重點整理

1 同號數相加

(1) 兩正數相加，其和為正。例 $(+5)+(+2)=+(5+2)=7$

(2) 兩負數相加，其和為負。例 $(-5)+(-2)=-(5+2)=-7$

2 異號數相加

(1) 若正數的絕對值較大，其和為＋(｜正數｜－｜負數｜)。

例 $(+5)+(-2)=+(5-2)=3$

(2) 若負數的絕對值較大，其和為－(｜負數｜－｜正數｜)。

例 $(-5)+(+2)=-(5-2)=-3$

(3) 相反數相加，其和為 0。例 $6+(-6)=0$

3 整數的加法特性

對於任意三個整數 a、b、c，有下列性質：

(1) 加法交換律：$a+b=b+a$。

(2) 加法結合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$。

4 整數的減法運算

若 a、b 為整數，則 $a-b=a+$(b 的相反數)$=a+(-b)$。

例 $(-5)-(-7)=(-5)+(+7)=(-5)+7$

5 去括號規則

(1) 括號前面是「＋」號：去括號後，原來括號內的＋、－不變。

(2) 括號前面是「－」號：去括號後，原來括號內的＋變－、－變＋。

例 (1) $6+(2-5)=6+2-5$　　(2) $4-(2-5)=4-2+5$

6 數線上兩點的距離

一數線上有 $A(a)$、$B(b)$ 兩點，則 A、B 兩點的距離可記作 $\overline{AB}$，

$\overline{AB}=|a-b|=|b-a|=$大數－小數。

例 數線上兩點 $A(-7)$、$B(5)$，則 $\overline{AB}=|(-7)-5|=|5-(-7)|=12$。

7 線段的中點

數線上有 A、B、C 三點，如果 C 在 A、B 之間，且 C 到 A、B 的距離相等，我們就稱 C 點為 A、B (或 $\overline{AB}$) 的中點。

自我評量

1 計算下列各式的值。

(1) $(-7)+15$ P.31 例 4

(2) $-23-18$ P.37 例 7

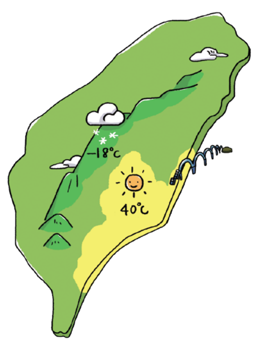
(3) $(-75)+47+(-25)$ P.34 例 5

(4) $(-713)+224+613+(-214)$ P.34 例 6

(5) $(-25)-[(-709)+(-25)]$ P.38 例 8

(6) $(-12)+|-23|-[35+(-14)]$ P.39 例 9

2 臺灣的氣溫紀錄中，西元 2004 年 5 月在臺東出現過 $40^\circ C$ 的高溫；而西元 1970 年 1 月在玉山出現過 $-18^\circ C$ 的低溫。請問這兩個溫度中，高溫比低溫高了多少 $^\circ C$？ P.42 例 12



3 數線上有 $A(-5)$、$B(3)$ 兩點，則：　P.44 例 13、P.45 例 15

(1) A、B 兩點的距離為多少？

(2) 若 $C(c)$ 為 A、B 的中點，則 c 為多少？

挑錯題

以下是小翊和小妍計算「$3850-1005+5$」的過程。判斷他們的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。

小翊：

$3850-1005+5$
$=3850-1010$
$=2840$

小妍：

$3850-1005+5$
$=3850-1000+5+5$
$=2850+10$
$=2860$