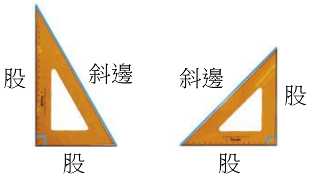
畢氏定理 設計泉源：CA　　編者：余秉橙

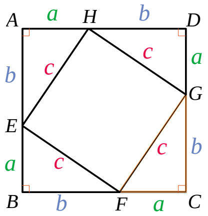
一、畢氏(商高、勾股)定理的發現

2 年 ____班 座號: ____姓名:__________

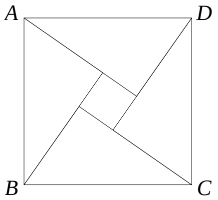
1. **日常應用：**古埃及有專門測量土地和方位的「操繩師」，他們將繩子做成一個繩圈，繩圈上有 12 個繩結把繩圈分成 12 等距。利用這個繩圈，便能拉出直角△來測量土地面積，也能利用直角來判斷方位。



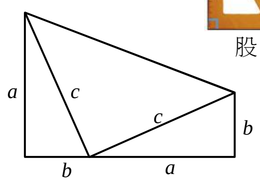
2. **幾何證明：**



$(a+b)^2=c^2+4\times(\frac{1}{2}ab)$



$c^2=(a-b)^2+4\times\frac{1}{2}ab$

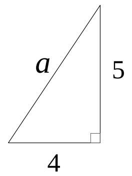


$\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{c^2}{2}+2\times\frac{ab}{2}$

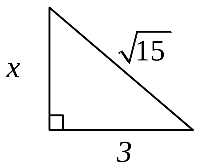
以上 3 個圖化簡整理後，皆可形成 $a^2+b^2=c^2$（畢氏定理）　任意一個**直角△**，**股^2＋股^2＝斜邊^2**

3. 畢氏三元數(商高數、勾股數)－符合畢氏定理的整數解

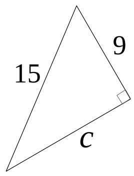
4. (1)



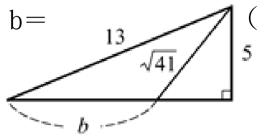
(2)



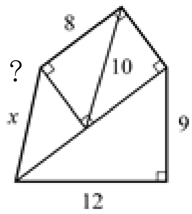
(3)



(4) b＝



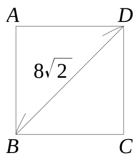
(5) x＝？



5. △ABC 中，若$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$，則下列何者是直角？
(A) ∠A (B) ∠B (C) ∠C (D) 以上都有可能

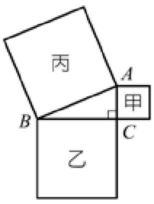
6. 下列何者不能作為直角三角形的三邊長？(A) 1、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$
(B) 3^2、4^2、5^2 (C) 8、15、17 (D) 0.6、0.8、1　B

7. (1)求 $\overline{AB}$＝



(2) 已知直角三角形的三邊長分別為 5、12、x，則 x＝？

(3)甲＝25，乙＝144，求丙＝？△*ABC* 的周長＝



(4)等腰三角形 *ABC* 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=10$，求：(1)△*ABC* 的面積。(2) $\overline{AC}$上的高。

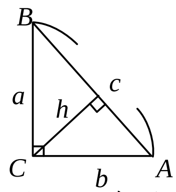
二、畢氏定理的應用

1. 斜邊上的高。直角三角形 *ABC* 的兩股長為 *a*、*b*，斜邊長為 *c*，斜邊上的高為 *h*，

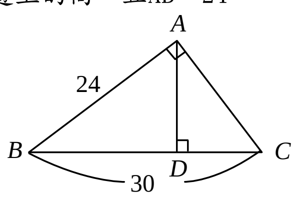
則△*ABC* 的面積＝$\frac{1}{2}\times c\times h=\frac{1}{2}\times a\times b$，

所以 $c\times h=a\times b$，

因此斜邊上的高 $h=\frac{a\times b}{c}=\frac{\text{兩股乘積}}{\text{斜邊}}$，



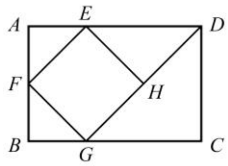
如圖，直角三角形 ABC 中，$\overline{AD}$為斜邊上的高，且$\overline{AB}=24$，$\overline{BC}=30$，求：(1) $\overline{AC}$ (2) $\overline{AD}$



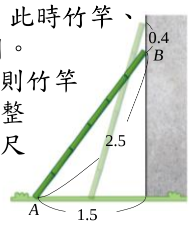
2. 若三角形的三邊長分別為 5、12、13，則此三角形的面積為多少平方單位？

3. 已知一三角形的三邊長之比恰為 5:12:13，若三角形的面積為 270，則其周長為何？

4. 如右圖，矩形 *ABCD* 是由一個正方形和四個等腰直角三角形拼成的，它的面積是 108 平方公分，則其中小正方形的面積是多少？



5. 小康將一支長 2.5 公尺的竹竿放在牆角處，此時竹竿、牆面和地面剛好形成一個直角三角形，如右圖。
(1)若牆底和竹竿底端(*A* 點)距離為 1.5 公尺，則竹竿頂端(*B* 點)距離牆底多少公尺？(2)小康後來調整竹竿位置，竹竿頂端(*B* 點)往上移動了 0.4 公尺，那竹竿底端(*A* 點)往牆底滑動了多少公尺？



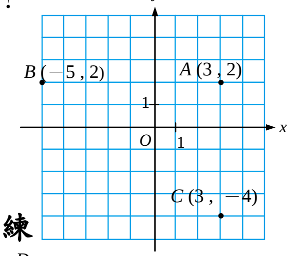
6. 實驗室有一個直圓柱體的杯子，上方杯蓋中央有一小孔，將一支長 20 公分的玻棒從中央小孔插入杯中底部邊緣，杯子底圓半徑 5 公分，高度 12 公分。如右圖，玻棒露出杯口外的長度為多少公分？（不考慮玻棒的粗細）

三、平面上兩點的距離[將 B 點歸零，則 A（x_1-x_2， y_1-y_2）、B（0，0），直接帶入畢氏定理即可。]

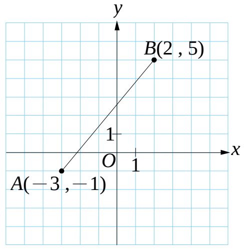
1. 坐標平面上兩點 A（x_1，y_1）、B（x_2，y_2）的距離為 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x\text{坐標的差})^2+(y\text{坐標的差})^2}$

2. O 為原點，$A(7,24)$、$B(10,-24)$、$C(-3,-5)$、$D(-2,6)$，求$\overline{AO}=$_____，$\overline{BO}=$_____，$\overline{CO}=$_____，$\overline{DO}=$_____

3. 求：(1) $\overline{AB}$、$\overline{AC}=$？
(2) $\overline{BC}=$？



4. 求 A、B 兩點的距離？

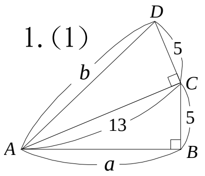


5. 若 C(2，−3)、D(1，5)，則$\overline{CD}=$？

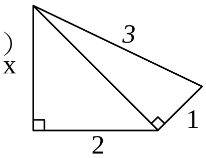
6. 從艾紗家向東走 3 公里，再往北走 1 公里就可以到學校；從飛洋家向西走 2 公里，再往南走 3 公里也可以到學校，則艾紗家和飛洋家的直線距離為多少公里？

四、綜合演練

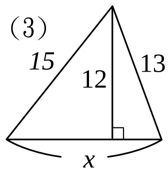
1. (1)



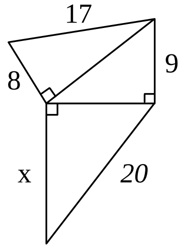
(2)



(3)

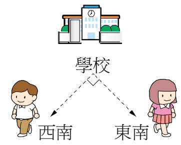


(4)

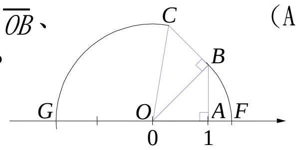


2. 一般螢幕的尺寸指的是螢幕對角線的長度。如右圖，某 10.5 吋的平板電腦螢幕長寬比為 4：3，試問此平板電腦的螢幕長、寬分別是幾吋？設長為 4x，寬為 3x(x＞0)

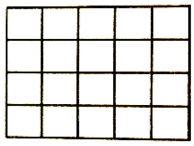
3. 放學後，小妍和小翊分別沿東南方向和西南方向回家。若小妍和小翊行走的速率都是每分鐘 30 公尺，小妍花 15 分鐘回到家，小翊花 20 分鐘回到家，則小妍家和小翊家的最短距離是多少公尺？



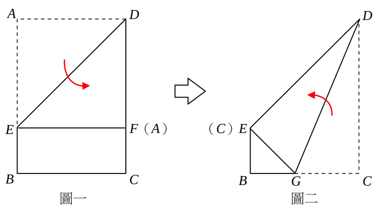
4. **在數線上找到坐標為$\sqrt{a}$的點。**如圖，O為數線上的原點，A點坐標為 1。已知△OAB、△OBC都是直角三角形，$\overline{AB}=\overline{BC}=1$。若 F、G 兩點都在數線上，且 $\overline{OF}=\overline{OB}$、$\overline{OG}=\overline{OC}$，則 F、G 兩點的坐標各為多少？



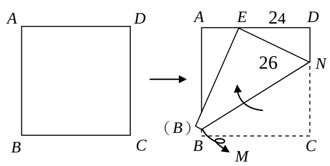
5. 如圖，有一張方格紙，每一格均為正方形，且邊長均為 1，在這些交點中任取兩點，其距離不可能為下列何者?
(A) $\sqrt{10}$ (B) $\sqrt{14}$ (C) $\sqrt{17}$ (D) $\sqrt{29}$



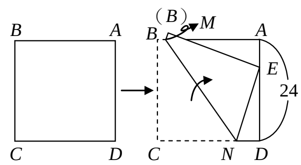
6. 求 A4 紙的長寬比為何？試說明



7. 如圖所示，將正方形 $ABCD$ 摺疊，使得 C 點落在$\overline{AD}$上的 E 點處，且$\overline{MN}$為摺痕，M點在$\overline{AB}$上，N點在$\overline{CD}$上。若$\overline{DE}=24$，$\overline{DN}=10$，求$\overline{AE}=$？



8. 如圖所示，將正方形 $ABCD$ 摺疊，使得 C點落在$\overline{AD}$上的E點處，且$\overline{AE}:\overline{DE}=1:2$，若$\overline{MN}$為摺痕，$M$點在$\overline{AB}$上，$N$點在$\overline{CD}$上，且正方形 $ABCD$ 的邊長為 24，求$\overline{DN}$的長。

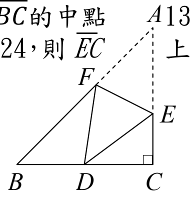


9. 在坐標平面上，下列各點中何者離 A(1,2)最遠? (A) (4,6) (B) (−3,7) (C) (−2,−8) (D) (9,−1) C

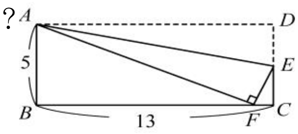
10. 在坐標平面上，已知 A(0,5)、B(4,2)、C(−3,1)，問:(1) △ABC 為何種三角形?(2) △ABC 周長為何?面積為何?

11. 坐標平面上有 A、B(-3,0)、C(9,0)三點，且$\overline{AB}=\overline{AC}=10$，求：(1)A 點坐標為何？ (2) ABC 面積為何？

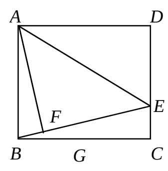
12. 如右圖，將一等腰直角三角形 ABC 的紙片摺疊，使得 A點落於$\overline{BC}$的中點 D。已知∠C=90°，$\overline{AC}=\overline{BC}=24$，則 $\overline{EC}=$？



13. 如圖，矩形 ABCD 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=13$，今將其摺疊，使其頂點D點落在$\overline{BC}$上之一點 F，則 $\overline{EF}=$？

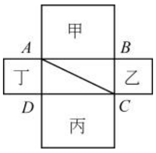


14. 如右圖，長方形 ABCD 中，$\overline{AB}=21$，$\overline{BC}=24$，$\overline{DE}:\overline{CE}=2:1$，$\overline{AF}\perp\overline{BE}$，則$\overline{AF}$=?

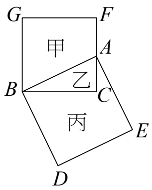


五、加強演練

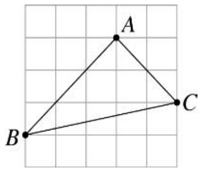
1. (1)如圖，四邊形 $ABCD$ 為矩形。若 $\overline{AC}=17$，則以矩形 $ABCD$ 的邊長為邊，向外所作的正方形甲、乙、丙、丁的面積和為多少？



(2)如圖，△ABC 中，∠$ACB=90^\circ$，已知四邊形 $ABDE$ 和 $BCFG$ 皆為正方形，且甲、乙、丙三區域的面積分別為 124、36、140，則 AC 的長＝？



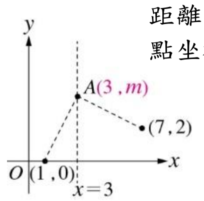
2. 如圖，在方格紙上畫了一個三角形 ABC，試判斷其是否為直角三角形？



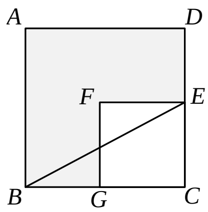
3. 直角坐標平面上，$4x-3y=24$ 這條直線上的點，離原點最近的距離為何？

4. 坐標平面上有 P(－1, k)、Q(3, 0)兩點，若 $\overline{PQ}=9$，且 P 點在第三象限，則 k＝？

5. 如左圖，直角坐標平面上，有一點 A 在直線 $x=3$ 上，且 A 到(1 , 0)的距離與到(7 , 2)的距離相等，則 A 點坐標為何？

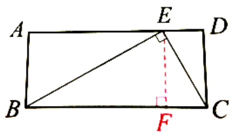


6. 如右圖，已知 $ABCD$、$CEFG$ 均為正方形，且鋪色部分的面積為 161，若 $\overline{BE}=17$，則兩正方形 $ABCD$、$CEFG$ 的邊長和為多少？

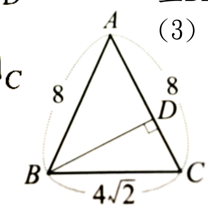


7. 有一直角三角形，已知其斜邊長為 10，周長為 25，則此三角形的面積為何？

8. 如圖，矩形 ABCD 中，$\overline{BE}=12$，$\overline{BC}=15$，$\overline{BE}\perp\overline{EC}$，求長方形 ABCD 面積？

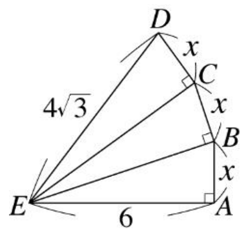


9. 如圖，△ABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}=8$，$\overline{BC}=4\sqrt{2}$，且 $\overline{BD}\perp\overline{AC}$，則：(1) $\overline{BC}$ 邊上的高？(2) △ABC 之面積？(3) $\overline{BD}$＝？(4) $\overline{AD}$＝？

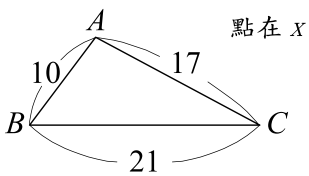


11. 已知有一個三角形的三個邊長分別為 a^2-b^2，$2ab$，a^2+b^2，且 $a>b>0$，則此三角形必為__________三角形(填銳角、直角、鈍角)。

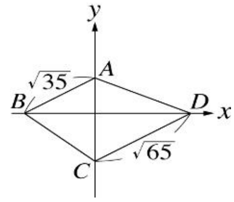
12. 如圖，求 x＝？。



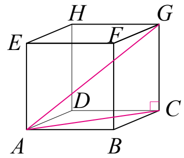
13. 如右圖，三角形 ABC 中，$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=21$，$\overline{AC}=17$，則：△ABC 的面積為多少？



14. 如圖，直角坐標平面上，A、C 兩點在 y 軸上，B、D 兩點在 x 軸上，若 $\overline{AB}=\sqrt{35}$，$\overline{CD}=\sqrt{65}$，則 $\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{BC}^2}$＝？



15. 有一隻螞蟻和一隻蜜蜂在邊長為 2 的正方體紙盒裡，如右圖，則：
(1)此蜜蜂從正方體的內部由 A 飛到 G 的最短距離為多少？
(2)此螞蟻沿著正方體的表面由 A 走到 G 的最短距離為多少？



16. 右圖是長、寬、高分別為25、11、15 的長方體，如果有一隻螞蟻只在長方體表面移動，則此螞蟻由 A 走到 B 的最短距離為多少？