3-1 多項式的運算與應用 黃志誠

一、教材摘要

◆ 3-1 多項式的運算與應用

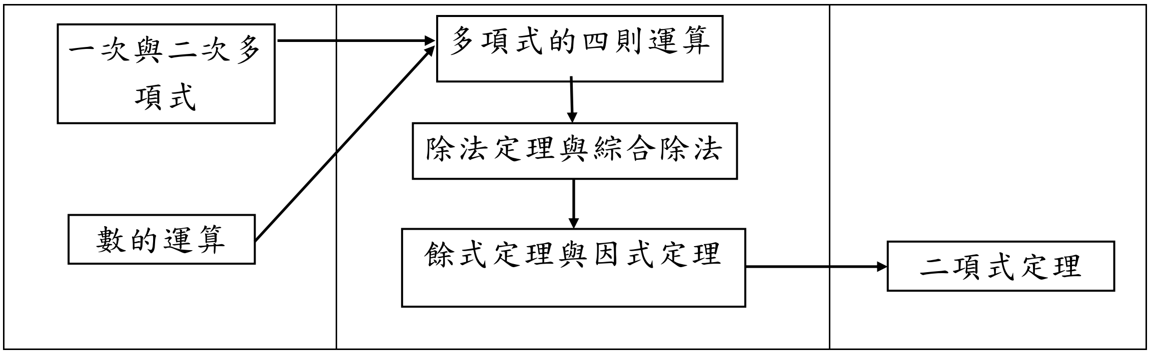
首先介紹多項式及其相關名詞的定義.接著介紹多項式的四則運算、除法定理及綜合除法.再探討兩個重要定理：餘式定理與因式定理.

二、教學目標與時數

教 學 目 標	授課時數
3-1 多項式的運算與應用 1. 能了解多項式及其相關名詞的意義. 2. 熟練多項式的四則運算. 3. 熟練分離係數法及綜合除法的運算. 4. 能了解多項式的除法定理及其應用. 5. 能了解餘式定理及其應用.	6

三、教材地位分析

已習教材	本章教材	未習教材



四、教學方法與教學診所

◆ 3-1 多項式的運算與應用

1. 多項式與方程式常讓初學者混淆,教師要特別說明其差別.例如：學生常將多項式 $2x^2+4x-2$ 化簡為 x^2+2x-1.
2. 雖然 $5, -8, 0$ 都是多項式,但在上課時不要太強調這種多項式.
3. 對於零多項式無次數可言,不宜作太深入的探討.
4. 利用分離係數法作四則運算時,必須特別強調缺項一定要補「0」,以免產生錯誤的答案.
5. 對於綜合除法與長除法,必須舉例讓學生了解兩者的使用時機,以加強學生處理問題的能力.
6. 除式為二次式雖然也有「綜合除法」,但並不簡易好記,不如仍用長除法.因此不宜講授,以免徒增學生的負擔.
7. 強調可利用綜合除法將一般的多項式表成 $(ax-b)$ 之多項式.
8. 餘式定理雖好用但卻抽象,教師可用長除法或綜合除法來驗證餘式定理,讓學生相信餘式原來可以這麼簡單求出,再進而證明餘式定理.
9. 強調當餘式定理中的餘式 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$ 等於 0 時,則為因式定理.

10. 講授牛頓定理時必須說明兩點：

(1)適用於整係數多項式.

(2)找出所有可能的一次因式 $ax-b$ 只是必要條件,因此還必須利用因式定理作進一步的篩選.

11. 可先讓學生知道：若多項式 $f(x)$ 的所有係數和等於 0,則 $f(x)$ 有 $x-1$ 的因式;若 $f(x)$ 的奇數項係數和等於偶數項係數和,則 $f(x)$ 有 $x+1$ 的因式.當遇到一多項式沒有 $x+1$ 及 $x-1$ 的因式時,再引入牛頓定理,如此往往可降低學生尋找一次因式的難度.

12. 插值多項式宜清楚的交代如何產生,不可要求學生一味的強記.

五、補充例題

◆ 3-1 多項式的運算與應用

1

設 a,b,c 為實數,且 $\dfrac{3x+2}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$,求 a,b,c 的值.

解 兩邊同乘 x^3+1,得 $3x+2=a\left(x^2-x+1\right)+\left(bx+c\right)\left(x+1\right)$

$$=\left(a+b\right)x^2+\left(-a+b+c\right)x+\left(a+c\right).$$

比較係數,可列得

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b+c=3 \\ a+c=2 \end{cases}$$ 解得 $a=-\dfrac{1}{3}$,$b=\dfrac{1}{3}$,$c=\dfrac{7}{3}$.

2

設 $x=z+\dfrac{1}{z}$,試將 $z^8+\dfrac{1}{z^8}$ 表為 x 的多項式.

解 由 $x=z+\dfrac{1}{z}$ 兩邊平方,得 $x^2=z^2+2+\dfrac{1}{z^2}\Rightarrow x^2-2=z^2+\dfrac{1}{z^2}$.

上式兩邊平方,得 $\left(x^2-2\right)^2=z^4+2+\dfrac{1}{z^4}\Rightarrow x^4-4x^2+2=z^4+\dfrac{1}{z^4}$

上式兩邊平方,得 $\left(x^4-4x^2+2\right)^2=z^8+2+\dfrac{1}{z^8}$.

移項整理得 $z^8+\dfrac{1}{z^8}=\left(x^4-4x^2+2\right)^2-2=x^8-8x^6+20x^4-16x^2+2$.

3

設多項式 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $x+1$;除以 $x-2$ 的餘式為 10,求 $f(x)$ 除以 $(x-2)\left(x^2+x+1\right)$ 的餘式.

解 設 $f(x)=\left(x^2+x+1\right)q(x)+(x+1)$

$$=\left(x^2+x+1\right)\left((x-2)q_1(x)+a\right)+(x+1)$$

$$=(x-2)\left(x^2+x+1\right)q_1(x)+a\left(x^2+x+1\right)+(x+1)$$

因為 $f(2)=10$,所以 $7a+3=10\Rightarrow a=1$.

故所求餘式為 $\left(x^2+x+1\right)+(x+1)=x^2+2x+2$.

4

求多項式 $x^{100}-2x^3+5$ 除以 x^2+1 的餘式為何?

解 設 $f(x)=x^{100}-2x^3+5=\left(x^2+1\right)Q(x)+(ax+b)$.因為

$$f(i)=i^{100}-2(-i)+5=0+(ai+b),$$

所以 $6+2i=b+ai\Rightarrow a=2,b=6$.故所求餘式為 $2x+6$.

六、補充教材

1. 零多項式的次數

設多項式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$,若 $a_n\neq 0$,則稱 $f(x)$ 的次數為 n,記作 $\deg f(x)=n$.而當 $f(x)$ 為零多項式時,通常都不討論它的次數,然而零多項式的次數應為何?我們從多項式的次數與運算的關係切入.

設 $f(x)$, $g(x)$ 為二非零多項式,則

(1)若 $f(x)+g(x)\neq 0$,則 $\deg\big(f(x)+g(x)\big)\leq \max\big(\deg f(x),\deg g(x)\big)$.

(2) $\deg\big(f(x)g(x)\big)=\deg f(x)+\deg g(x)$.

上述這個立論中,我們必須小心的要求各多項式均不為零,否則將因次數無意義,而出現破綻.有沒有可能定義零多項式的次數,使得上面兩個性質對所有多項式(包括零多項式)仍然成立?

首先考慮(1),如果 $f(x)=-g(x)$,則 $f(x)+g(x)$ 為零多項式,代入(1)式得

$$\deg 0\leq n,\ n \text{ 為非負整數}.$$

因此如果規定 $\deg 0=-1$ 就可以使(1)式成立,當然用任何負數代替 -1 也可以.

其次考慮(2),如果 $f(x)$ 為零多項式,代入(2)式得 $\deg 0=\deg 0+n$.

可知 $\deg 0$ 不能是一個有限的數,除非 ∞ 或 $-\infty$ 才有這種「加之不增,減之無傷」的特性,若再配合前面的條件: $\deg 0\leq 0$,則只要規定 $\deg 0=-\infty$,那麼(1)(2)兩個性質,對所有多項式 $f(x)$, $g(x)$ 恆成立.不但如此,在這樣的約定下,一些涉及次數的敘述,就不須把零多項式另外討論.例如:

(1) 多項式除法定理中,設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為兩個多項式,則存在有兩個多項式 $q(x)$ 與 $r(x)$,使得 $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$,

其中 $r(x)=0$ 或 $0\leq\deg r(x)<\deg g(x)$.

有了 $\deg 0=-\infty$ 的規定,上式就可以簡寫成 $\deg r(x)<\deg g(x)$ 就可以了.

(2) 若一個多項式 $f(x)$ 可表為 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,

我們說 $f(x)$ 為一個次數不超過 n 次的多項式,而不須擔心當 $f(x)$ 為零多項式

時次數無意義的問題.然而,這樣的約定仍然有缺憾,當「倍式的次數不小於因式的次數」及「0 是所有多項式的倍式」的條件下,我們又該規定 $\deg 0=\infty$.

七、充實教材

◆ 1. 巴貝奇定理

西元 1822 年英國 劍橋大學數學家巴貝奇(Charles Babbage)在研究對數表時設計一套差分機(difference engine),由於當時的科技水準無法製造出非常精密的零件,因此該機器並沒有完成.但他的構想極為珍貴,他認為這部機器應包括輸入、輸出、儲存、運算、控制等五個單元,與目前的電腦架構極為接近,可說是電腦的開山鼻祖.

> 巴貝奇定理:
>
> 設 $f(x)$ 為多項式,$d\neq 0$,則
>
> (1) 若 $f(x)=k$,k 為常數,則 $f(a+d)-f(a)=0$.
>
> (2) 若 $f(x)$ 為一次式,則 $f(a+2d)-2f(a+d)+f(a)=0$.
>
> (3) 若 $f(x)$ 為二次式,則 $f(a+3d)-3f(a+2d)+3f(a+d)-f(a)=0$.
>
> (4) 若 $f(x)$ 為三次式,則
>
> $f(a+4d)-4f(a+3d)+6f(a+2d)-4f(a+d)+f(a)=0$.

證 (1) $f(a+d)-f(a)=k-k=0$.

(2) 設 $f(x)=px+r$,$p\neq 0$,

則 $f(x+d)-f(x)=(p(x+d)+r)-(px+r)=pd$,

取 $x=a$,得 $f(a+d)-f(a)=pd$ ①

取 $x=a+d$,得 $f(a+2d)-f(a+d)=pd$ ②

由②−①得 $f(a+2d)-2f(a+d)+f(a)=0$,

故得證.

(3) 令 $g(x)=f(x+d)-f(x)$ ③

因 $f(x)$ 為二次式,所以 $g(x)$ 為一次式.

因此 $g(a+2d)-2g(a+d)+g(a)=0$ ④

在③式中分別取 $x=a+2d$, $a+d$, a ,得

$$\begin{cases} g(a+2d)=f(a+3d)-f(a+2d), \\ g(a+d)=f(a+2d)-f(a+d), \\ g(a)=f(a+d)-f(a), \end{cases}$$

代入④式,得 $f(a+3d)-3f(a+2d)+3f(a+d)-f(a)=0$,

故得證.

(4) 令 $h(x)=f(x+d)-f(x)$ ⑤

因 $f(x)$ 為三次式,所以 $h(x)$ 為二次式.

因此 $h(a+3d)-3h(a+2d)+3h(a+d)-h(a)=0$ ⑥

在⑤式中分別取 $x=a+3d$, $a+2d$, $a+d$, a ,得

$$\begin{cases} h(a+3d)=f(a+4d)-f(a+3d), \\ h(a+2d)=f(a+3d)-f(a+2d), \\ h(a+d)=f(a+2d)-f(a+d), \\ h(a)=f(a+d)-f(a), \end{cases}$$

代入⑥式,得 $f(a+4d)-4f(a+3d)+6f(a+2d)-4f(a+d)+f(a)=0$,

故得證.

例:設 $f(x)$ 為三次多項式,且 $f(1981)=1$, $f(1982)=9$, $f(1983)=9$, $f(1984)=9$,求 $f(1985)$ 的值.

解一 因 $f(x)$ 為三次多項式,

所以 $f(a+4d)-4f(a+3d)+6f(a+2d)-4f(a+d)+f(a)=0$

$\Rightarrow f(1981)-4f(1982)+6f(1983)-4f(1984)+f(1985)=0$

$\Rightarrow 1-4\times9+6\times9-4\times9+f(1985)=0$

$\Rightarrow f(1985)=17$.

解二 設 $f(x)=a(x-1981)(x-1982)(x-1983)$

$$+b(x-1981)(x-1982)+c(x-1981)+1$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f(1982)=c+1=9 \\ f(1983)=2b+2c+1=9 \\ f(1984)=6a+6b+3c+1=9 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{4}{3}, \\ b=-4, \\ c=8, \end{cases}$$

所以 $f(1985)=\dfrac{4}{3}\times 4\times 3\times 2-4\times 4\times 3+8\times 4+1=17.$

◆ 2. 多項方程式的公式解

1. 解多項方程式具有很悠久的歷史,遠在西元前 1600 年,巴比倫人就提出了解二次方程式的問題.他們雖然提供了求解的方法,但並未發現代數公式來表示其根.而古希臘人雖以幾何作圖的方法解二次方程式,但至少到西元 100 年才發現了代數公式來表示其根.
2. 所謂方程式的代數公式解就是由方程式的係數經過四則運算與開方等有理運算所得的解,通常稱為根式解（solution by radicals）.例如:

   一元一次方程式 $ax+b=0$ 的根式解為 $x=-\dfrac{b}{a}$.

   又一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根式解為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

   至於三次和四次方程式的根式解比較困難,直到西元 1535 年才分別由義大利的數學家 Cardano（1501～1576）和他的學生 Ferrari 所發現.現在看來很簡單的多項方程式的根式解在當時卻耗費了數學家們很多的光陰.當四次方程式的根式解發現後,當時的數學家們接著就想要求得五次方程式的根式解,發現有些五次方程式無法求得根式解.最後,數學家們有了一個共同的猜測,即一般的五次方程式不能以根式求解,但沒有人提出證明.到了西元 1813 年始由 Ruffini（1765～1833）提出證明.可是後來發現,Ruffini 所提出的證明有誤,最後才由挪威的一個農家子弟 Abel（1802～1829）證明出來.事實上,Abel 剛開始也曾經犯了錯誤,誤

證五次方程式有根式解.但很快的他就發現自己的錯誤,終於在 1824～1826 年間,證明了五次方程式不可能有根式解.Abel 解決了這個大問題之後,下一步很自然地尋求判斷一般的 n 次方程式是否可用根式求解的準則.當 Abel 正為此努力工作時,卻不幸因肺病於 1829 年逝世.在 1832 年,法國有一位青年數學家 Galois（1811～1832）,他利用根的排列群證明一般五次以上的方程式不可用根式求解,並發展出永垂不朽的 Galois 理論.我們在此所指的一般 n 次方程式是形如 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的多項有理係數方程式.

◆ 3. 三次方程式的解法

一般的三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$,可轉化成 $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$,所以解一般的三次方程式只要討論 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的解即可.

令 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$,

則 $f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f''(x)=6x+2a$, $f'''(x)=6$,

由泰勒展開式知

$$f(x)=\frac{f'''\left(-\frac{a}{3}\right)}{3!}\left(x+\frac{a}{3}\right)^3+\frac{f''\left(-\frac{a}{3}\right)}{2!}\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+\frac{f'\left(-\frac{a}{3}\right)}{1!}\left(x+\frac{a}{3}\right)+f\left(-\frac{a}{3}\right)$$

$$=\left(x+\frac{a}{3}\right)^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)\left(x+\frac{a}{3}\right)+\left(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}\right),$$

設 $y=x+\frac{a}{3}$,則 y 滿足缺二次項的三次方程式

$$y^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)y+\left(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}\right)=0,$$

因此如果能解出 $y^3+py+q=0$ 的根,就可以將原方程式解出.

令 $y=u+v$,則

$$y^3=(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)\Rightarrow y^3-3uvy-\left(u^3+v^3\right)=0,$$

上式與 $y^3+py+q=0$ 的解相同時,

$$\begin{cases} p=-3uv \\ q=-\left(u^3+v^3\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}, \\ u^3+v^3=-q, \end{cases}$$

故 u^3, v^3 為 z 的二次方程式 $z^2+qz-\dfrac{p^3}{27}=0$ 的二根.

不失一般性,可取

$$u^3=\frac{-q+\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{2}=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

$$v^3=\frac{-q-\sqrt{q^2+\dfrac{4p^3}{27}}}{2}=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

令 $\alpha=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$,

$\beta=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$,

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,

由於三次方程式 $x^3=r$ (r 為實數)的三個根為 $\sqrt[3]{r}$, $\sqrt[3]{r}\omega$, $\sqrt[3]{r}\omega^2$,

所以

$$u=\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2,$$

$$v=\beta, \beta\omega, \beta\omega^2,$$

但因 $uv=-\dfrac{p}{3}$ 為實數,得出三組解為

$$\begin{cases} u=\alpha \\ v=\beta \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} u=\alpha\omega \\ v=\beta\omega^2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} u=\alpha\omega^2, \\ v=\beta\omega, \end{cases}$$

所以三次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三個根為

$$x=-\frac{a}{3}+\alpha+\beta, -\frac{a}{3}+\alpha\omega+\beta\omega^2, -\frac{a}{3}+\alpha\omega^2+\beta\omega.$$

例:求方程式 $x^3+9x^2+33x+52=0$ 的根.

解 由公式, $a=9$, $b=33$, $c=52$ 代入得

$$p=b-\frac{a^2}{3}=33-\frac{9^2}{3}=6,$$

$$q=c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}=52-\frac{9\cdot 33}{3}+\frac{2\cdot 9^3}{27}=7.$$

所以

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{1}=1,$$

$$\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-8}=-2.$$

故原方程式的三個根為

$$x_1=-\frac{a}{3}+\alpha+\beta=-3+1-2=-4,$$

$$x_2=-\frac{a}{3}+\alpha\omega+\beta\omega^2=-3+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}-2\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{-5+3\sqrt{3}i}{2},$$

$$x_3=-\frac{a}{3}+\alpha\omega^2+\beta\omega=-3+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}-2\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{-5-3\sqrt{3}i}{2}.$$