單元三：畢氏定理

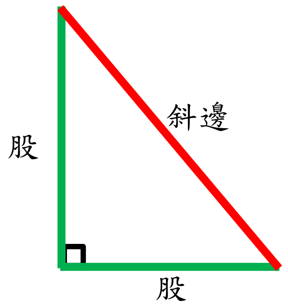
課文 A：畢氏定理

我們國小學過，一個三角形當中如果有一個角是直角，那麼我們就稱那個三角形是直角三角形。這單元當中，直角三角形很重要！

如右圖，在直角三角形當中，

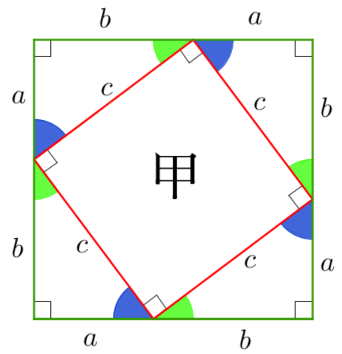
直角的兩個旁邊，我們都稱為「股」；

不是直角的旁邊，是直角的對面，我們稱它為「斜邊」。



■關鍵：那這兩股與斜邊之間有什麼關係呢？

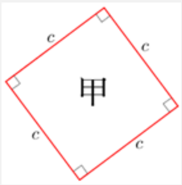
我們從下面的圖來試著觀察看看！



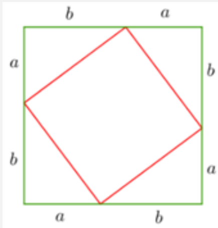
在圖中，有 4 個直角三角形跟 1 個正方形甲，合成一個大正方形。

而且這 4 個三角形其實都是一樣的。

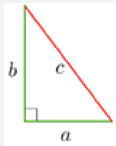
所以 正方形甲的面積 ＝ 大正方形 － 四個直角三角形面積



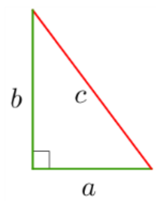
＝



－ 四個



$$\begin{aligned} c^2 &= (a+b)^2 - 4 \times \frac{ab}{2} \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$



從上面的說明，我們就可以知道：$c^2 = a^2 + b^2$，

而 a, b, c 其實就是直角三角形的三邊長，

c 就是這個直角三角形的斜邊，a, b 就是這個直角三角形的兩股，

所以 $c^2 = a^2 + b^2$ 代表的就是

「直角三角形中，斜邊平方等於兩股平方和」，

這種關係我們就稱作**畢氏定理**。

在中國古代數學名著《九章算術》中，直角兩旁較短的邊為「勾」、較長的邊為「股」；直角的對面，稱為「弦」。所以，**畢氏定理**也可稱為**勾股定理或勾股弦定理**。

接著，我們來做五個例題。這些例題的目標如下：

例題 1. 已知直角三角形的兩股長，求斜邊長

例題 2. 已知直角三角形的兩邊長，求第三邊長

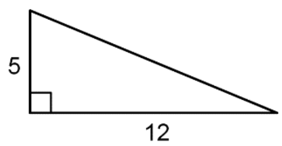
例題 3. 利用畢氏定理，求出長方形的對角線長

例題 4. 已知直角三角形的兩股長，求斜邊上的高

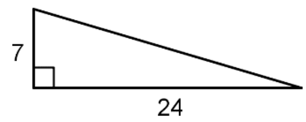
例題 5. 利用畢氏定理，解決生活中的應用問題

Ex 1：已知下列各直角三角形的兩股長，求斜邊長。

(1)



(2)



$\boxed{\text{解}}$：

(1) 假設斜邊為 x，根據畢氏定理「斜邊平方等於兩股平方和」，

$$x^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

$$x = \pm\sqrt{169} = \pm 13$$

因為斜邊長 > 0，所以斜邊長$= 13$。

(2) 假設斜邊為 y，根據畢氏定理「斜邊平方等於兩股平方和」，

$$y^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$$

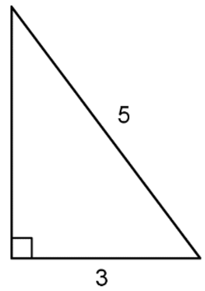
$$y = \pm\sqrt{625} = \pm 25$$

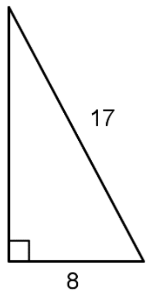
因為斜邊長 > 0，所以斜邊長$= 25$。

上面這題是我們知道兩股長，利用畢氏定理求斜邊長。

接下來我們知道斜邊及其中一股長，要利用畢氏定理求另一股長。

Ex 2：已知下列各直角三角形的斜邊及一股長，求另一股長度為何？

(1) 

(2) 

$\boxed{解}$：

(1)設要求的股長為 x，根據畢氏定理「斜邊平方等於兩股平方和」，

$$x^2+3^2=5^2 \Rightarrow x^2+9=25 \Rightarrow x^2=25-9=16$$

$x=\pm\sqrt{16}=\pm4$ ，股長必為正的，所以另一股為 4 。

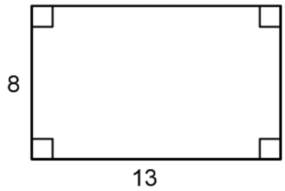
(2)設要求的股長為 y，根據畢氏定理「斜邊平方等於兩股平方和」，

$$y^2+8^2=17^2 \Rightarrow y^2+64=289 \Rightarrow y^2=289-64=225$$

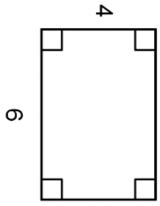
$x=\pm\sqrt{225}=\pm15$ ，股長必為正的，所以另一股為 15 。

Ex 3：求出下列各矩形的對角線長。

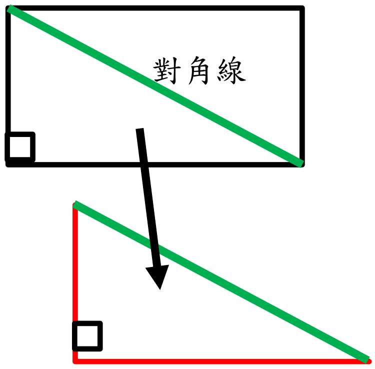
(1)



(2)



◎解題思維：



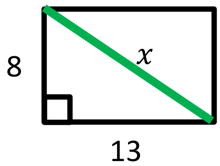
將長方形的兩邊看成兩股，對角線看成斜邊，

接下來，就可以利用

畢氏定理「斜邊平方等於兩股平方和」，

求出矩形的對角線長了！

$\boxed{\text{解}}$：(1) 將對角線令為 x，



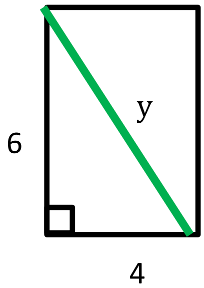
根據畢氏定理可以列式：$x^2 = 8^2 + 13^2$

$x^2 = 8^2 + 13^2 = 64 + 169 = 233$，

$x = \pm\sqrt{233}$（因為對角線長是長度，所以負不合）

所以對角線長$= \sqrt{233}$。

(2) 將對角線令為 y，



根據畢氏定理可以列式：$y^2 = 6^2 + 4^2$

$y^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$，

$y = \pm\sqrt{52} = \pm\sqrt{4 \times 13} = \pm 2\sqrt{13}$（對角線長是長度，故負不合）

所以對角線長$= 2\sqrt{13}$。