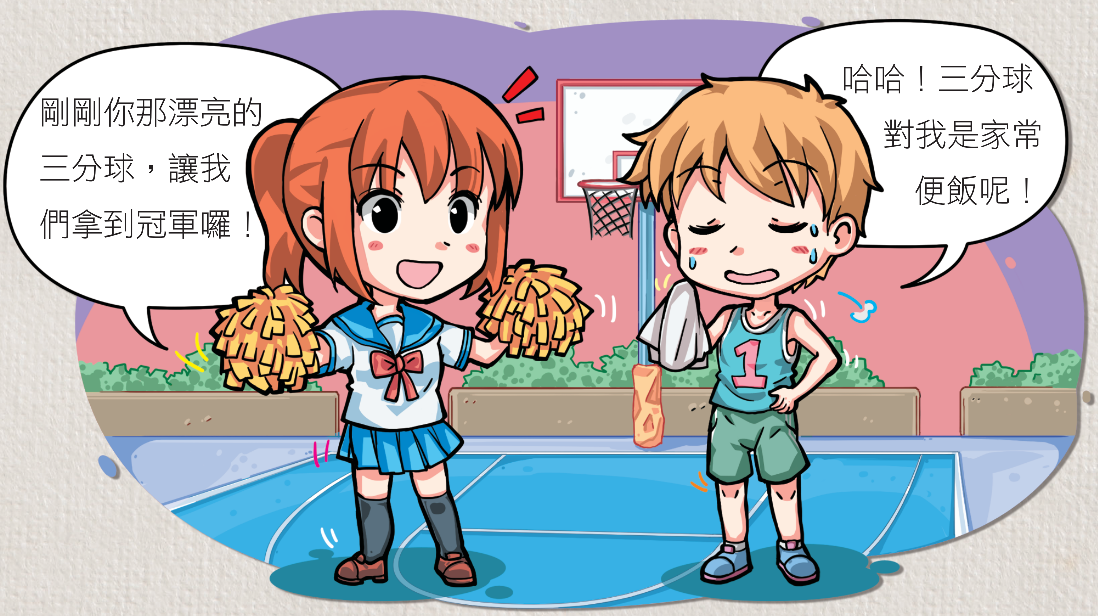
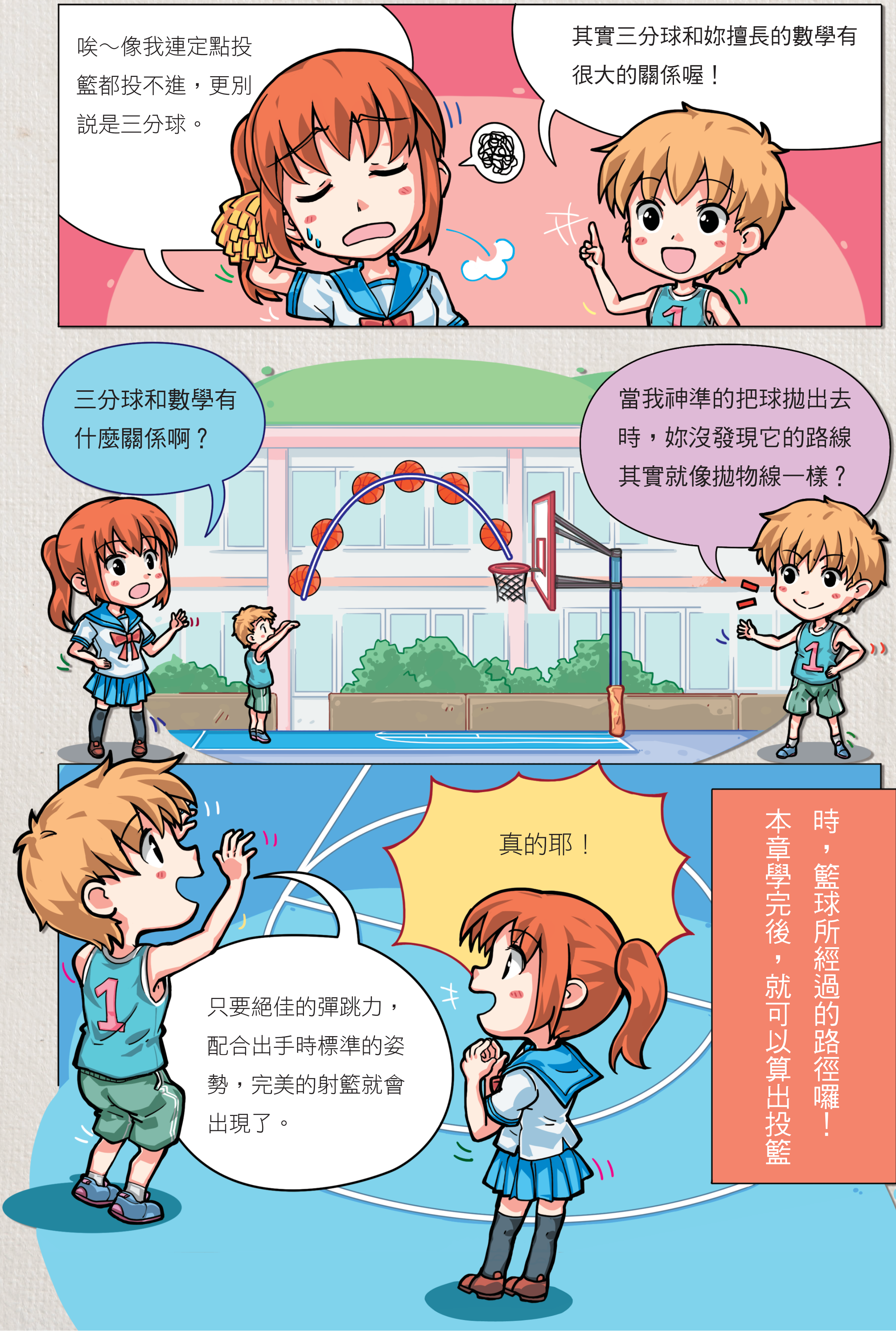
CHAPTER 1

二次函數




唉～像我連定點投籃都投不進，更別說是三分球。
其實三分球和妳擅長的數學有很大的關係喔！
三分球和數學有什麼關係啊？
當我神準的把球拋出去時，妳沒發現它的路線其實就像拋物線一樣？
只要絕佳的彈跳力，配合出手時標準的姿勢，完美的射籃就會出現了。
真的耶！
時，籃球所經過的路徑囉！
本章學完後，就可以算出投籃

1-1 二次函數及其圖形

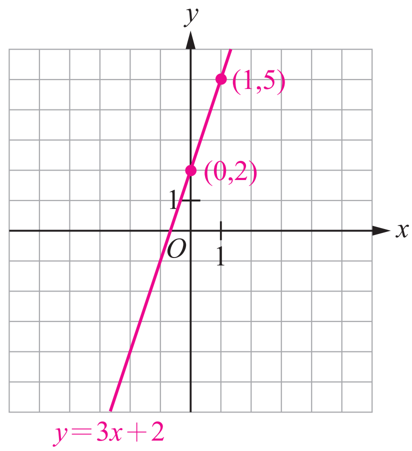
溫故啟思

1. 試在坐標平面上畫出一次函數 $y=f(x)=3x+2$ 的圖形。

任取 $y=3x+2$

的兩組解：

x	0	1
y	2	5



1 二次函數的意義

在第二冊時，我們曾討論對於兩個變數 x 與 y，當給定一個 x 值時，只有一個 y 值與之對應，我們稱此對應關係為 y 是 x 的函數，舉例如下：

1.　正方形邊長與周長的對應關係

假設一個邊長為 x 公分的正方形，其周長為 y 公分。已知它們的對應關係為：

邊長 x (公分)	1	2	3	4	$\frac{1}{2}$
周長 y (公分)	4	8	12	16	2

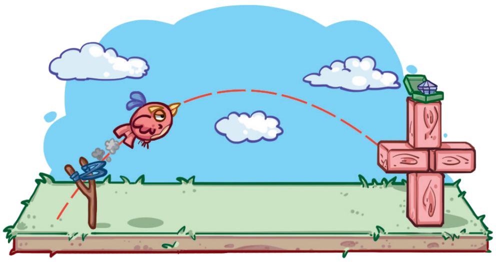
x 與 y 之間的對應關係可以表示成 $y=f(x)=4x$。

2.　正方形邊長與面積的對應關係

假設一個邊長為 x 公分的正方形，其面積為 y 平方公分。依正方形的面積公式，x 與 y 之間的對應關係可以表示成 $y=g(x)=x^2$。

3. 拋射物高度與水平距離的對應關係

風靡一時的憤怒鳥遊戲中，憤怒鳥每次從彈弓拋射出去的路線都不一樣。假設拋射後，憤怒鳥與彈弓的水平距離為 x 公尺時，離地面高度為 y 公尺，x 與 y 之間的對應關係可以表示成 $y=h(x)=-0.1x^2+x+1$。



上述三個例子中，因為 $4x$ 是 x 的一次多項式，所以我們稱 $y=f(x)=4x$ 為 x 的一次函數，而 x^2 與 $-0.1x^2+x+1$ 都是 x 的二次多項式，因此 $y=g(x)=x^2$ 和 $y=h(x)=-0.1x^2+x+1$ 皆為 x 的二次函數。

一般而言，假設 a、b、c 為常數，且 $a\neq 0$，則稱 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 是 x 的二次函數。為方便起見，我們可以省略符號 $f(x)$，僅以 $y=ax^2+bx+c$ 表示二次函數。

隨堂練習

下列哪一個選項中的 y 是 x 的二次函數？

(A) $y=-2x^2+3x-5$

(B) $y=2x+8$

(C) $y=\dfrac{1}{x^2}$

(D) $y=3x-\dfrac{1}{2}x^2-x^3$

因為 $-2x^2+3x-5$ 為 x 的二次多項式，故選(A)。

例題 1 判斷二次函數

有一條長度為 20 公尺的繩子。若圍成長為 x 公尺的長方形時，其面積為 y 平方公尺，則：

(1) x、y 的關係式為何？

(2) y 是否為 x 的二次函數？

解 (1) 當長為 x 公尺時，寬為 $(10-x)$ 公尺，

故長方形面積為 $x(10-x)$ 平方公尺。

即 x、y 的關係式為 $y=x(10-x)$。

(2) 因為 $y=x(10-x)=-x^2+10x$，

所以 y 是 x 的二次函數。

隨堂練習

若底是 $3x$ 公分，其對應高是 x 公分的三角形面積為 y 平方公分，則：

(1) x、y 的關係式為何？

因為三角形的面積 $=\frac{1}{2}\times$底$\times$高，

所以 $y=\frac{1}{2}\times 3x\times x=\underline{\underline{\frac{3}{2}x^2}}$。

(2) y 是否為 x 的二次函數？

因為 $y=\frac{3}{2}x^2$，所以 y 是 x 的二次函數。

2 二次函數的圖形

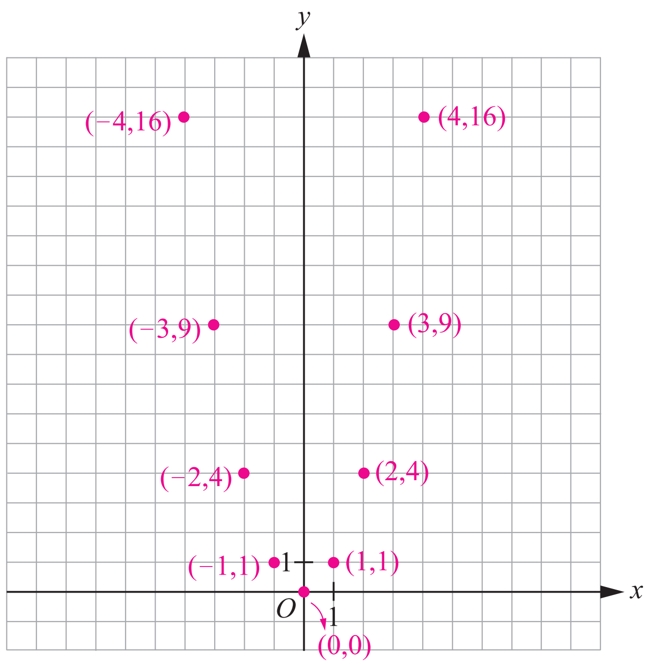
　　我們知道一次函數與常數函數的圖形都是直線，那麼二次函數的圖形會是什麼呢？其實可以藉由描繪合於函數關係 $y=f(x)$ 的有序數對 (x,y) 所對應的點觀察之。

探索活動　畫二次函數 $y=x^2$ 的圖形

1. 已知二次函數 $y=x^2$，試寫出下列 x 值所對應的函數值。

x	……	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	……
y	……	16	9	4	1	0	1	4	9	16	……

2. 承 **1.**，將有序數對 (x,y) 所對應的點標示在坐標平面上。



3. 附件㈠是利用電腦，找到更多合於 $y=x^2$ 的數對 (x,y)，所繪製出的圖形。分別將兩個圖形的 x、y 軸與上圖對齊，觀察 $y=x^2$ 的圖形是否會形成一條平滑的曲線。

透過附件操作，觀察出 $y=x^2$ 的圖形會形成一條平滑的曲線。

$y=ax^2+k$ ($a\neq 0$) 的圖形

由上頁探索活動的結果可知，若我們把更多合於二次函數 $y=x^2$ 的點畫在坐標平面上，其圖形將會形成一條平滑的曲線。接下來，我們討論二次函數 $y=ax^2+k$ 的圖形，首先討論 $k=0$ 的情況。

例題 2 $y=ax^2$ ($a>0$) 的圖形

在坐標平面上畫出二次函數 $y=2x^2$ 的圖形。

解 先找出合於函數 $y=2x^2$ 的一些數對 (x , y)。

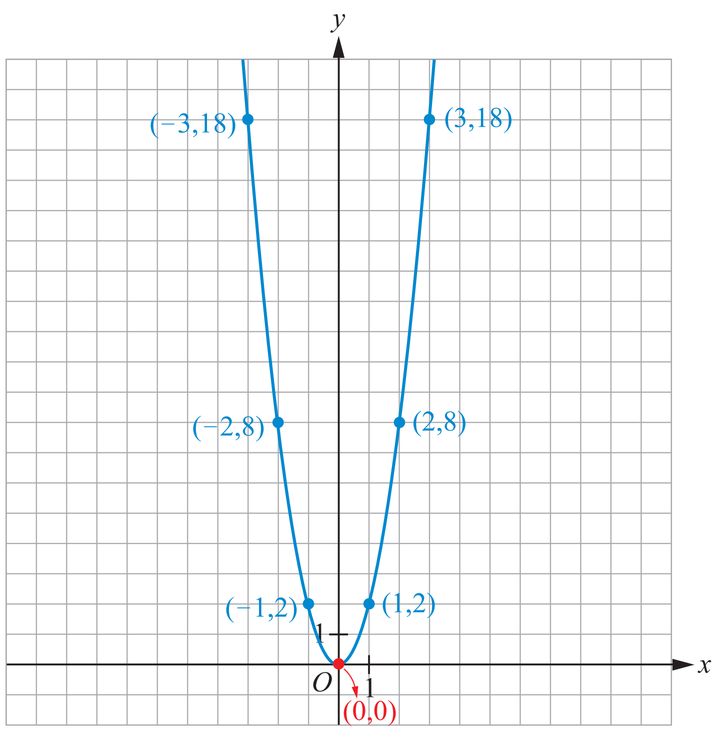
當 $x=0$ 時，$y=0$；

當 $x=1$ 或 $x=-1$ 時，y 皆為 2。

依此，我們找出函數圖形上的一些點：

x	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	……
y	……	18	8	2	0	2	8	18	……

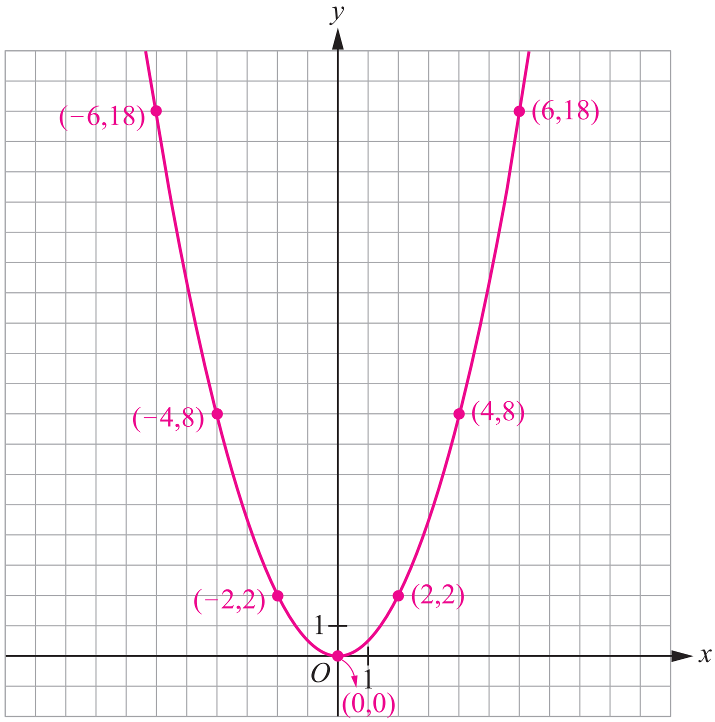
將上表中數對 (x , y) 所對應的點描在坐標平面上，再將這些點依序用平滑的曲線連接起來，即可得到 $y=2x^2$ 的圖形。



由例題 2 可以知道，二次函數 $y=2x^2$ 圖形中的點 (1 , 2) 與 (−1 , 2)、(2 , 8) 與 (−2 , 8)、⋯⋯ 是分別以 y 軸為對稱軸的對稱點，且圖形的最低點坐標為 (0 , 0)。

隨堂練習

1. 在坐標平面上畫出二次函數 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形。



x	−6	−4	−2	0	2	4	6
y	18	8	2	0	2	8	18

2. 承 **1.**，求此函數圖形的對稱軸。

y 軸。

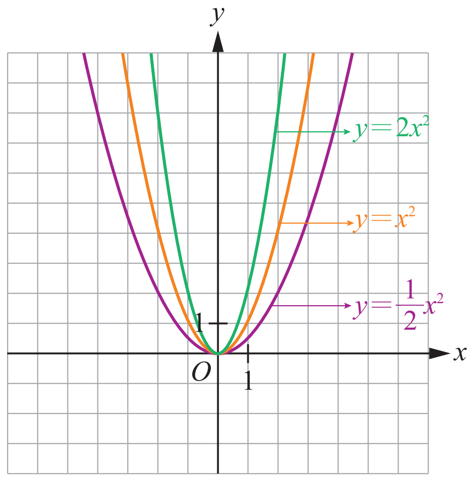
3. 承 **1.**，求此函數圖形的最低點坐標。

(0 , 0)。

4. 承 **1.**，寫出此函數圖形的任兩組對稱點。(答案不唯一)

(2 , 2) 與 (−2 , 2)、(4 , 8) 與 (−4 , 8)。

觀察二次函數 $y=x^2$、$y=2x^2$ 與 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形，



可以發現它們都有下面幾個特徵：

1. 開口方向及大小

在這三個圖形中，原點左右兩方的圖形一直往上延伸，彼此不相交，我們就說此二次函數的圖形**開口向上**，而從圖中可以發現，當二次項的係數愈大時，其圖形開口愈小。

2. 對稱軸

將這三個圖形分別沿著 y 軸對摺，可以發現在 y 軸左右兩邊的圖形會完全疊合。因此，這些函數圖形都是以 y 軸為對稱軸的線對稱圖形。

3. 最低點

在這三個圖形中，點的橫坐標 x 值以 0 為中心，向右增加或向左減少時，這些點的位置愈來愈高，因此對應的 y 值愈來愈大，故 $(0, 0)$ 為這些函數圖形的**最低點**。

一般而言，

> 二次函數 $y=ax^2$ $(a>0)$ 的圖形開口向上，且 a 愈大，開口愈小，
> $x=0$ (y 軸) 為對稱軸，$(0, 0)$ 為圖形的最低點。

例題 3　$y=ax^2$ ($a<0$) 的圖形

在坐標平面上畫出二次函數 $y=-x^2$ 的圖形。

解 先找出合於函數 $y=-x^2$ 的一些數對 (x , y)。

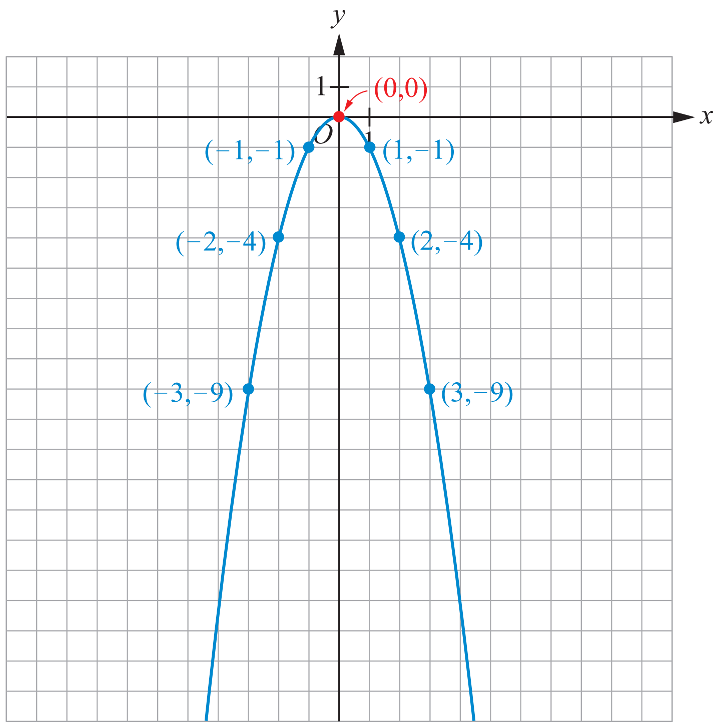
當 $x=0$ 時，$y=0$；

當 $x=1$ 或 $x=-1$ 時，y 皆為 -1。

依此，我們找出函數圖形上的一些點：

x	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	……
y	……	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	……

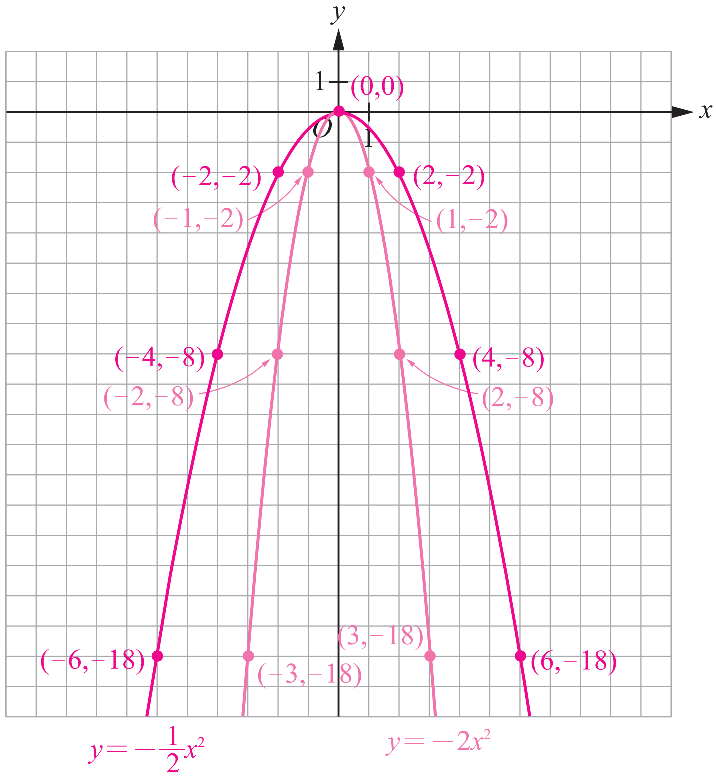
將上表中數對 (x , y) 所對應的點描在坐標平面上，再將這些點依序用平滑的曲線連接起來，即可得到 $y=-x^2$ 的圖形。



由例題 3 可以知道，二次函數 $y=-x^2$ 圖形中的點 (1 , -1) 與 (-1 , -1)、(2 , -4) 與 (-2 , -4)、…… 是分別以 y 軸為對稱軸的對稱點，且圖形的最高點坐標為 (0 , 0)。

隨堂練習

1. 在坐標平面上畫出二次函數 $y=-2x^2$ 及 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形。



$y=-2x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18

$y=-\frac{1}{2}x^2$

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18

2. 承 **1.**，分別求這兩個函數圖形的對稱軸。

$y=-2x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$ 圖形的對稱軸皆為 y 軸。

3. 承 **1.**，分別求這兩個函數圖形的最高點坐標。

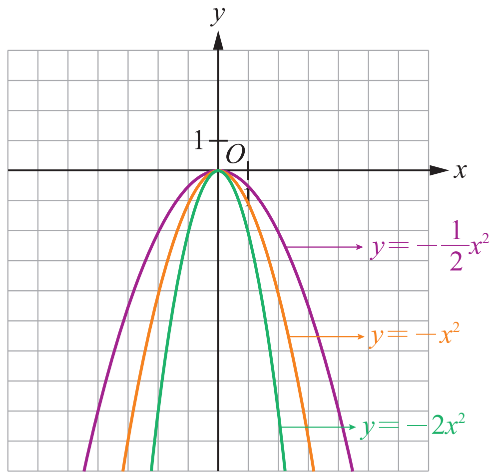
$y=-2x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$ 圖形的最高點坐標皆為 $(0,0)$。

4. 承 **1.**，分別寫出這兩個函數圖形的任兩組對稱點。（答案不唯一）

$y=-2x^2$：$(1,-2)$ 與 $(-1,-2)$、$(2,-8)$ 與 $(-2,-8)$，

$y=-\frac{1}{2}x^2$：$(2,-2)$ 與 $(-2,-2)$、$(4,-8)$ 與 $(-4,-8)$。

觀察二次函數 $y=-x^2$、$y=-2x^2$ 與 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形，



可以發現它們都有下面幾個特徵：

1. 開口方向及大小

在這三個圖形中，原點左右兩方的圖形一直往下延伸，彼此不相交，我們就說此二次函數的圖形**開口向下**，而從圖中可以發現，當二次項係數的絕對值愈大時，其圖形開口愈小。

2. 對稱軸

將這三個圖形分別沿著 y 軸對摺，可以發現在 y 軸左右兩邊的圖形會完全疊合。因此，這些函數圖形都是以 y 軸為對稱軸的線對稱圖形。

3. 最高點

在這三個圖形中，點的橫坐標 x 值以 0 為中心，向右增加或向左減少時，這些點的位置愈來愈低，因此對應的 y 值愈來愈小，故 $(0, 0)$ 為這些函數圖形的**最高點**。

一般而言，

二次函數 $y=ax^2$ $(a<0)$ 的圖形開口向下，且 $|a|$ 愈大，開口愈小，$x=0$ (y 軸) 為對稱軸，$(0, 0)$ 為圖形的最高點 。

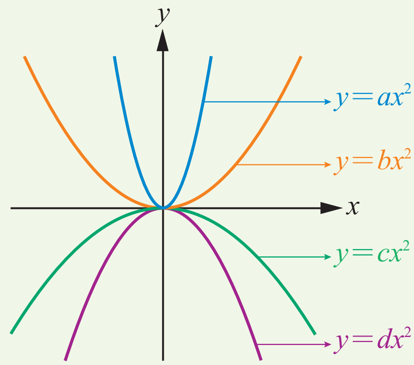
例題 4 二次函數圖形開口的大小

右圖分別為 $y=ax^2$、$y=bx^2$、$y=cx^2$、$y=dx^2$ 的圖形，請觀察圖形並回答下列問題：

(1) 說明 a、b、c、d 的正負。

(2) 比較 c、d 的大小。

(3) 比較 a、b、c、d 的大小。



解 (1) 由 $y=ax^2$ 與 $y=bx^2$ 的圖形開口向上，可知 $a>0$，$b>0$。

由 $y=cx^2$ 與 $y=dx^2$ 的圖形開口向下，可知 $c<0$，$d<0$。

(2) 由於 $y=dx^2$ 的圖形開口比 $y=cx^2$ 的圖形開口小，

因此 $|d|>|c|$，又 $c<0$，$d<0$，

故 $d<c<0$。

(3) 由於 $y=ax^2$ 的圖形開口比 $y=bx^2$ 的圖形開口小，

又 $a>0$，$b>0$，故 $a>b>0$。

由上述可知 $a>b>c>d$。

Note 二次項係數的絕對值愈大，開口愈小。

隨堂練習

試比較下列二次函數圖形的關係，並以代號填入下列空格：

(A) $y=-0.5x^2$　(B) $y=0.1x^2$　(C) $y=2x^2$　(D) $y=-x^2$

(1) 圖形開口向上的二次函數為 (B)(C)。

因為(B)(C)的二次項係數大於 0，所以圖形開口向上。

(2) 圖形開口向下的二次函數中，開口較大的為 (A)。

因為 $|-0.5|<|-1|$，故 $y=-0.5x^2$ 的圖形開口較大。

探索活動 二次函數圖形的疊合

1. 取下附件㈡，沿著 x 軸對摺，觀察哪些函數圖形會完全疊合。

$y=x^2$ 與 $y=-x^2$，$y=2x^2$ 與 $y=-2x^2$，$y=\frac{1}{2}x^2$ 與 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形會完全疊合。

2. 若二次函數 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的圖形沿著 x 軸對摺時，會與下列哪一個函數圖形完全疊合？

(A) $y=-\frac{1}{3}x^2$　(B) $y=3x^2$　(C) $y=-3x^2$　(D) $y=0.3x^2$

(A)。

由探索活動，我們可以發現：

二次函數 $y=ax^2$ 的圖形與 $y=-ax^2$ 的圖形對稱於 x 軸。

隨堂練習

求與 $y=-3x^2$ 的圖形對稱於 x 軸的二次函數。

$y=3x^2$。

接著，我們來討論當 $k \neq 0$ 時，$y = ax^2 + k\ (a \neq 0)$ 的圖形。

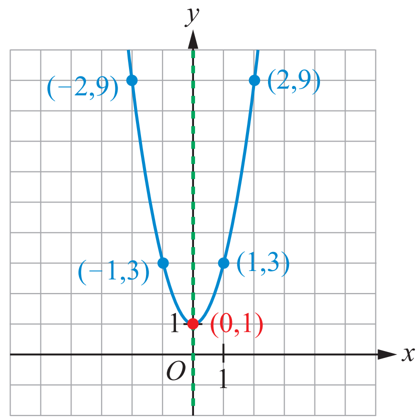
例題 5 $y = ax^2 + k\ (a \neq 0)$ 的圖形

在坐標平面上畫出 $y = 2x^2 + 1$ 的圖形，並說明其開口方向、對稱軸及最高點或最低點坐標。

解 先找出合於函數 $y = 2x^2 + 1$ 的一些數對 (x, y)：

x	……	-2	-1	0	1	2	……
y	……	9	3	1	3	9	……

將上表中數對 (x, y) 所對應的點描在坐標平面上，再將這些點依序用平滑的曲線連接起來，即可得到 $y = 2x^2 + 1$ 的圖形。



觀察其圖形，可以發現：

① 圖形的開口向上。

② y 軸為圖形的對稱軸。

③ $(0, 1)$ 為圖形的最低點。

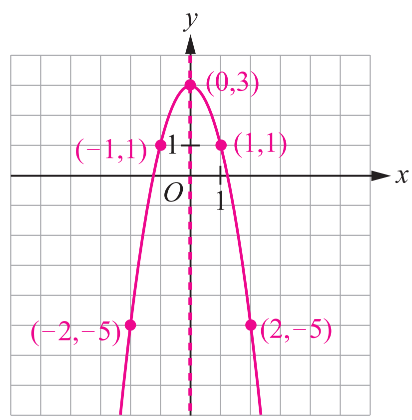
隨堂練習

在坐標平面上畫出 $y = -2x^2 + 3$ 的圖形，並說明其開口方向、對稱軸及最高點或最低點坐標。

x	-2	-1	0	1	2
y	-5	1	3	1	-5

開口向下，對稱軸為 y 軸，

最高點坐標為 $(0, 3)$。



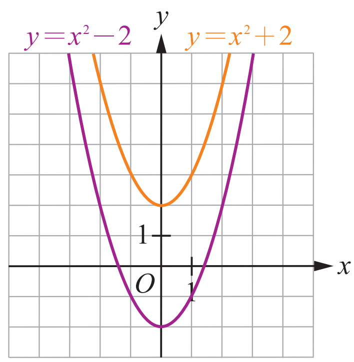
一般而言，

二次函數 $y=ax^2+k$ ($a\neq0$) 的圖形，以 $x=0$ (y 軸) 為對稱軸，

(1) 當 $a>0$ 時，開口向上，(0 , k) 為圖形的最低點。

(2) 當 $a<0$ 時，開口向下，(0 , k) 為圖形的最高點。

探索活動　二次函數的上、下平移



剪下附件(一)中 $y=x^2$ 圖形的透明片，並與右圖的 x 軸、y 軸對齊。

(1) 透明片 $y=x^2$ 的圖形向上或向下平移幾個單位後，會分別與 $y=x^2+2$、$y=x^2-2$ 的圖形完全疊合？

向上平移 2 個單位後，會與 $y=x^2+2$ 的圖形完全疊合。

向下平移 2 個單位後，會與 $y=x^2-2$ 的圖形完全疊合。

(2) $y=x^2-2$ 的圖形經過平移後，是否會與 $y=x^2+2$ 的圖形完全疊合？

$y=x^2-2$ 的圖形向上平移 4 個單位後，會與 $y=x^2+2$ 的圖形完全疊合。

由上面的探索活動，我們知道 $y=ax^2$ 的圖形向上平移 k 個單位後，其圖形與 $y=ax^2+k$ 的圖形疊合；而當 $y=ax^2$ 的圖形向下平移 k 個單位後，其圖形與 $y=ax^2-k$ 的圖形疊合。

隨堂練習

將二次函數 $y=x^2$ 的圖形向下平移 5 個單位所得到的圖形，與下列哪一個二次函數的圖形能完全疊合？

(A) $y=5x^2$　(B) $y=x^2+5$　(C) $y=x^2-5$　(D) $y=-x^2+5$

(C)。

解謎三角

$y=x^2-2$ 圖形的對稱軸為 $x=-2$ 嗎？

前面 $y=ax^2+k\ (a\neq 0)$ 的圖形是以 y 軸為對稱軸，現在我們來討論對稱軸不是 y 軸的二次函數圖形。

$y=a(x-h)^2+k\ (a\neq 0)$ 的圖形

例題 6 $y=a(x-h)^2\ (a\neq 0)$ 的圖形

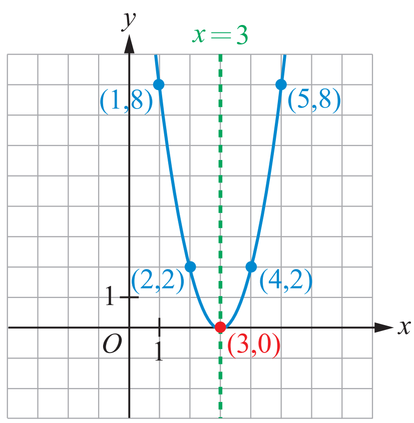
在坐標平面上畫出 $y=2(x-3)^2$ 的圖形，並說明其開口方向、對稱軸及最高點或最低點坐標。

解 先找出合於函數的一些數對 (x, y)，表列如下：

x	……	1	2	3	4	5	……
y	……	8	2	0	2	8	……

Note 當 $x=3$ 時，$y=0$；當 $x=3\pm1$，亦即 $x=4$ 或 $x=2$ 時，y 皆為 2。

將上表中數對 (x, y) 所對應的點描在坐標平面上，再將這些點依序用平滑的曲線連接起來，即可得到 $y=2(x-3)^2$ 的圖形。



觀察其圖形，可以發現：

① 圖形的開口向上。

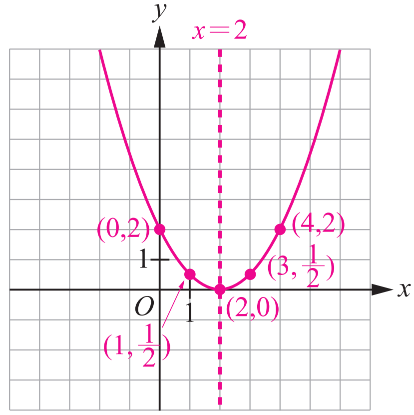
② $x=3$ 為圖形的對稱軸。

③ $(3, 0)$ 為圖形的最低點。

解 否，對稱軸為 $x=0$。

隨堂練習

1. 在坐標平面上畫出 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的圖形，並說明其開口方向、對稱軸及最高點或最低點坐標。

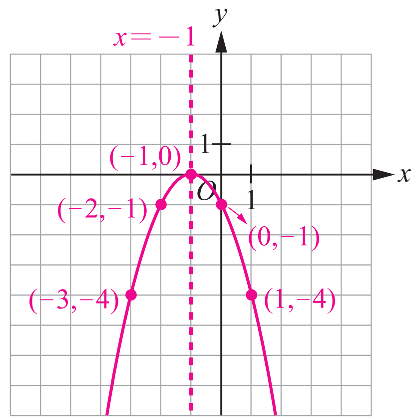


x	0	1	2	3	4
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

開口向上，對稱軸為 $x=2$，

最低點坐標為 $(2,0)$。

2. 在坐標平面上畫出 $y=-(x+1)^2$ 的圖形，並說明其開口方向、對稱軸及最高點或最低點坐標。



x	-3	-2	-1	0	1
y	-4	-1	0	-1	-4

開口向下，對稱軸為 $x=-1$，

最高點坐標為 $(-1,0)$。

一般而言，

二次函數 $y=a(x-h)^2\ (a\neq 0)$ 的圖形，以 $x=h$ 為對稱軸，

(1) 當 $a>0$ 時，開口向上，$(h,0)$ 為圖形的最低點。

(2) 當 $a<0$ 時，開口向下，$(h,0)$ 為圖形的最高點。

例題 7 $y=a(x-h)^2+k\ (a\neq 0)$ 的圖形

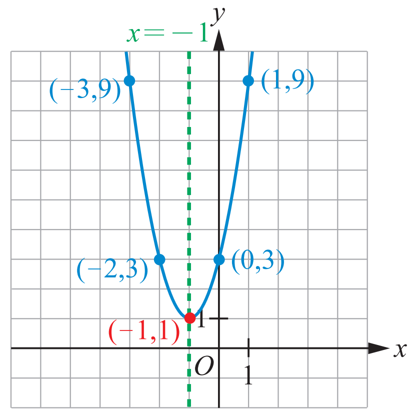
在坐標平面上畫出 $y=2(x+1)^2+1$ 的圖形，並說明其開口方向、對稱軸及最高點或最低點坐標。

解 先找出合於函數的一些數對 (x,y)，表列如下：

x	……	-3	-2	-1	0	1	……
y	……	9	3	1	3	9	……

Note 當 $x=-1$ 時，$y=1$；當 $x=-1\pm 1$，亦即 $x=0$ 或 $x=-2$ 時，y 皆為 3。

將上表中數對所對應的點描在坐標平面上，再將這些點依序用平滑的曲線連接起來，即可得到 $y=2(x+1)^2+1$ 的圖形。



觀察其圖形，可以發現：

① 圖形的開口向上。

② $x=-1$ 為圖形的對稱軸。

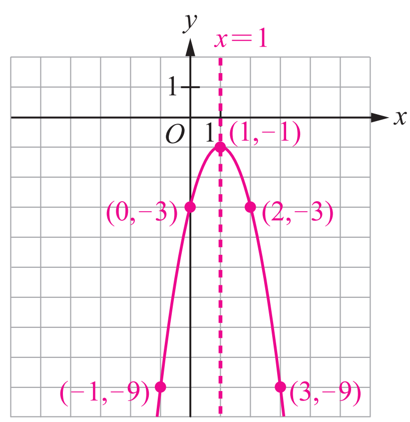
③ $(-1,1)$ 為圖形的最低點。

隨堂練習

在坐標平面上畫出 $y=-2(x-1)^2-1$ 的圖形，並說明其開口方向、對稱軸及最高點或最低點坐標。

x	-1	0	1	2	3
y	-9	-3	-1	-3	-9

開口向下，對稱軸為 $x=1$，
最高點坐標為 $(1,-1)$。



二次函數 $y=a(x-h)^2+k\ (a\neq 0)$ 的圖形，以 $x=h$ 為對稱軸，

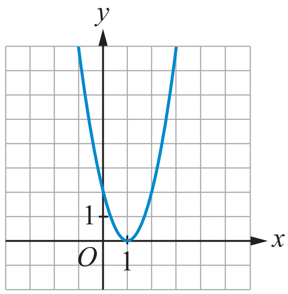
(1) 當 $a>0$ 時，開口向上，(h,k) 為圖形的最低點。

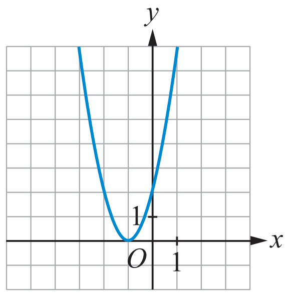
(2) 當 $a<0$ 時，開口向下，(h,k) 為圖形的最高點。

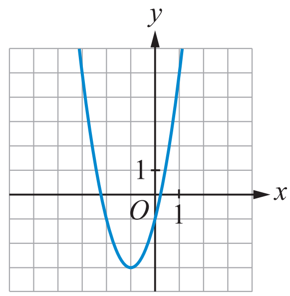
探索活動　二次函數圖形的平移

剪下附件㈠中 $y=2x^2$ 圖形的透明片，並分別與下圖的 x 軸、y 軸對齊。

(A) $y=2(x-1)^2$　　(B) $y=2(x+1)^2$　　(C) $y=2(x+1)^2-3$







(1) 若將透明片向左平移 1 個單位，則會和哪一個選項的圖形完全疊合？

(B)。

(2) 若將透明片向右平移 1 個單位，則會和哪一個選項的圖形完全疊合？

(A)。

(3) 若透明片中的圖形要與(C)選項的圖形完全疊合，則應該如何平移？（只能左右或上下平移）

向左平移 1 個單位，再向下平移 3 個單位。

在上面的探索活動，我們知道二次函數 $y=2(x-1)^2$、$y=2(x+1)^2$、$y=2(x+1)^2-3$ 的二次項係數都是 2，而這三個圖形經過平移後都可以和 $y=2x^2$ 的圖形完全疊合。例如：$y=2x^2$ 的圖形向左平移 1 個單位後，可與 $y=2(x+1)^2$ 的圖形完全疊合；再向下平移 3 個單位後，可與 $y=2(x+1)^2-3$ 的圖形完全疊合。

二次函數 $y=ax^2$ 的圖形經過平移後會與 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形完全疊合。

由於二次函數圖形平移時，圖形的開口大小及方向都沒有改變，因此我們僅須掌握最高點或最低點的位置即可。

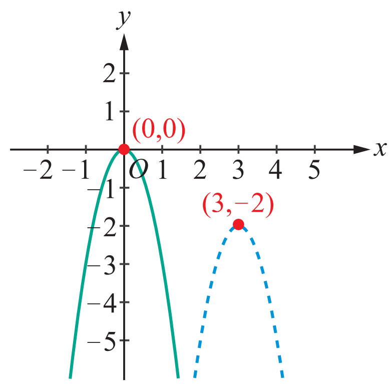
例題 8　二次函數圖形的平移

將 $y=-3x^2$ 的圖形向右平移 3 個單位，再向下平移 2 個單位，則：

(1) 經過平移後，新圖形的最高點或最低點坐標為何？

(2) 經過平移後的二次函數為何？

解 (1) 原圖形的最高點坐標為 $(0,0)$，
向右平移 3 個單位，則 x 坐標增加 3，
向下平移 2 個單位，則 y 坐標減少 2，
故新圖形的最高點坐標為 $(3,-2)$。



(2) 因為最高點坐標為 $(3,-2)$，
且二次項係數為 -3，
故此二次函數為 $y=-3(x-3)^2-2$。

隨堂練習

二次函數 $y=-2(x+3)^2-1$ 的圖形向右平移 2 個單位，再向下平移 4 個單位後，會與下列哪一個圖形完全疊合？

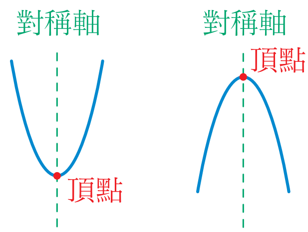
(A) $y=-2(x+5)^2-5$　　(B) $y=-2(x+1)^2-5$

(C) $y=2(x+5)^2-5$　　(D) $y=2(x+1)^2-5$

原圖形的最高點坐標為 $(-3,-1)$，
經過平移後，新圖形的最高點坐標為 $(-1,-5)$，
故會與(B) $y=-2(x+1)^2-5$ 的圖形完全疊合。
故選(B)。

投籃時籃球所經過的路線，或是飲水機水柱噴出後落下所經過的路線會形成一條平滑的曲線，我們稱為拋物線。本節中所繪製的二次函數圖形 $y=a(x-h)^2+k$，當 $a>0$ 時，開口向上；當 $a<0$ 時，開口向下，其圖形也類似籃球路線與水柱所形成的平滑曲線，故將二次函數的圖形稱為**拋物線**。

在這些拋物線的圖形中，我們發現開口向上的拋物線有最低點，開口向下的拋物線有最高點。無論最高點或是最低點，它們都是拋物線與其對稱軸的交點，我們稱此交點為**頂點**。



我們知道二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 圖形的頂點坐標為 (h, k)。反之，若知道頂點坐標為 (h, k)，也能假設此二次函數為 $y=a(x-h)^2+k$。

例題 9　已知頂點求二次函數

已知二次函數圖形的頂點為 $(3, -1)$，且通過點 $(2, 7)$，求此二次函數。

解　由二次函數圖形的頂點為 $(3, -1)$，

可設二次函數為 $y=a(x-3)^2-1$，

又圖形通過點 $(2, 7)$，

將 $x=2$，$y=7$ 代入得 $7=a(2-3)^2-1$，$7=a-1$，$a=8$，

故此二次函數為 $y=8(x-3)^2-1$。

隨堂練習

已知二次函數圖形的頂點為 $(-2, 3)$，且通過 $(1, -15)$，求此二次函數。

由頂點為 $(-2, 3)$，可設二次函數為 $y=a(x+2)^2+3$，

又圖形通過點 $(1, -15)$，

將 $x=1$，$y=-15$ 代入得 $-15=a(1+2)^2+3$，$-15=9a+3$，$a=-2$，

故此二次函數為 $\underline{y=-2(x+2)^2+3}$。

例題 10 已知對稱軸求二次函數

已知二次函數的圖形經過平移後會與 $y=3x^2$ 的圖形疊合，且其對稱軸為 $x=-4$，又通過點 $(-3,-4)$，求此二次函數。

解 因為二次函數的圖形經過平移後會與 $y=3x^2$ 的圖形疊合，

所以二次項係數為 3。

由對稱軸為 $x=-4$，可設二次函數為 $y=3(x+4)^2+k$，

又圖形通過點 $(-3,-4)$，

將 $x=-3$，$y=-4$ 代入得 $-4=3\times(-3+4)^2+k$，

$$-4=3\times1+k，$$

$$k=-7，$$

故此二次函數為 $y=3(x+4)^2-7$。

隨堂練習

已知二次函數的圖形經過平移後會與 $y=-6x^2$ 的圖形疊合，且其對稱軸為 $x=5$，又通過點 $(4,5)$，求此二次函數。

因為圖形經過平移後會與 $y=-6x^2$ 的圖形疊合，

所以二次項係數為 -6。

由對稱軸為 $x=5$，可設二次函數為 $y=-6(x-5)^2+k$，

又圖形通過點 $(4,5)$，

將 $x=4$，$y=5$ 代入得 $5=-6\times(4-5)^2+k$，

$$5=-6\times1+k，$$

$$k=11，$$

故此二次函數為 $\underline{y=-6(x-5)^2+11}$。

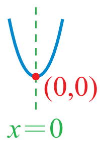
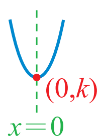
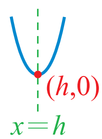
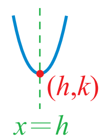
1-1 重點整理

1 二次函數的意義

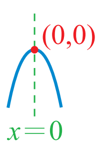
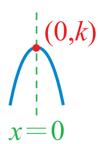
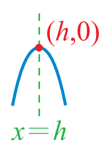
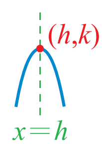
假設 a、b、c 為常數，且 $a\neq 0$，則稱 $y=ax^2+bx+c$ 是 x 的二次函數。

2 二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形

(1) $a>0$：開口向上，有最低點。

二次函數	$y=ax^2$	$y=ax^2+k$	$y=a(x-h)^2$	$y=a(x-h)^2+k$
簡圖				
對稱軸	$x=0$ (y 軸)	$x=0$ (y 軸)	$x=h$	$x=h$
最低點	$(0,0)$	$(0,k)$	$(h,0)$	(h,k)

(2) $a<0$：開口向下，有最高點。

二次函數	$y=ax^2$	$y=ax^2+k$	$y=a(x-h)^2$	$y=a(x-h)^2+k$
簡圖				
對稱軸	$x=0$ (y 軸)	$x=0$ (y 軸)	$x=h$	$x=h$
最高點	$(0,0)$	$(0,k)$	$(h,0)$	(h,k)

3 二次函數圖形的疊合

二次函數 $y=ax^2$ 的圖形經過平移後會與 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形完全疊合。

1-1 自我評量

P. 7 隨堂練習

1 下列哪一個選項中的 y 是 x 的二次函數？ (10 分)

(A) $y=3^2x-2$　(B) $y=5x+4$　(C) $y=\frac{1}{2x^2}-1$　(D) $y=4x^2-2x+3$

答：(D)。

因為 $4x^2-2x+3$ 為 x 的二次多項式，故選(D)。

P. 18 例 5　P. 20 例 6　P. 22 例 7

2 下列二次函數的圖形，哪一個有最高點？ (10 分)

(A) $y=2x^2-3$　(B) $y=5(x-1)^2+4$

(C) $y=-2(x-1)^2-9$　(D) $y=(3-x)^2$

答：(C)。

(C)開口向下，(A)(B)(D)開口向上，故(C)有最高點。

P. 18 隨堂練習　P. 24 例 8

3 已知二次函數 $y=-2x^2+1$，試回答下列問題： (每格 6 分)

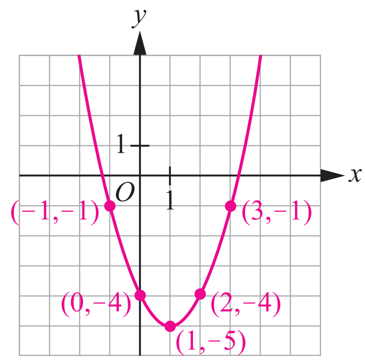
(1) 圖形開口向 下 (填上或下)，對稱軸為 $x=0$ (y 軸)，頂點為 $(0, 1)$。

(2) 將圖形向左平移 3 個單位，可得到新的二次函數 $y=-2(x+3)^2+1$，再向下平移 5 個單位後，可得到新的二次函數 $y=-2(x+3)^2-4$。

P. 22 例 7

4 在坐標平面上畫出二次函數 $y=(x-1)^2-5$ 的圖形。　(10 分)

x	-1	0	1	2	3
y	-1	-4	-5	-4	-1



P. 25 例 9

5 已知二次函數圖形的頂點為 $(3,-5)$，且通過 $(2,-9)$，求此二次函數。

由頂點為 $(3,-5)$，可設二次函數為 $y=a(x-3)^2-5$，　(20分)

又圖形通過點 $(2,-9)$，

將 $x=2$，$y=-9$ 代入得 $-9=a(2-3)^2-5$，$-9=a-5$，$a=-4$，

故此二次函數為 $\underline{y=-4(x-3)^2-5}$。

P. 26 例 10

6 已知二次函數的圖形經過平移後會與 $y=-2x^2$ 的圖形疊合，且其對稱軸為 $x=-2$，又通過點 $(1,3)$，求此二次函數。　(20 分)

因為平移後會與 $y=-2x^2$ 的圖形疊合，所以二次項係數為 -2。

由對稱軸為 $x=-2$，可設二次函數為 $y=-2(x+2)^2+k$，

將 $x=1$，$y=3$ 代入得 $3=-2\times(1+2)^2+k$，$3=-2\times9+k$，$k=21$，

故此二次函數為 $\underline{y=-2(x+2)^2+21}$。