



4-1 對角與對邊

1. 女孩站在 P 處觀看台北 101 大樓，
 - (1) 請畫出女孩觀看 101 大樓從 C 到 B 的視角。
 - (2) 請畫出女孩觀看 101 大樓從 C 到 A 的視角。
 - (3) 視角越大，可以看到的樓層數會越_____。



2. 防燙夾可以根據被夾物品的大小，張開適當的**寬度**來夾住物品，在此同時，防燙夾的什麼也跟著改變了？
_____。

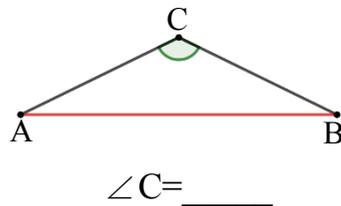
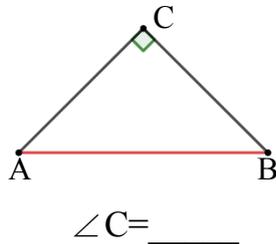
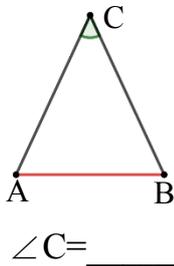
3. 油漆師傅會使用行走梯方便移動到油漆的地方，你知道為什麼梯子中間要綁繩子嗎？

_____。

這個支架 AB 的長度會影響梯子的夾角喔！請猜看看下列圖形的 $\angle C$ 的夾角大概是多少？



註：行走梯不符合職業安全衛生法。

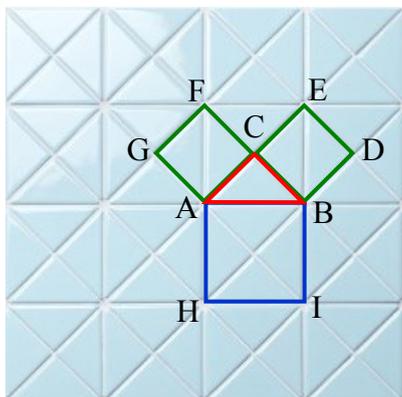


單元素養：三角形其中一個夾角變大的同時，其對邊也會變大。

4-2 畢氏定理

1. 到底等腰三角形頂角的對邊要多長才會形成等腰直角三角形呢？我們先來觀察一下地磚圖形中的等腰直角三角形！

下面的地磚是由紅色等腰直角三角形相同的三角形所拼出來的。



- (1) 以 \overline{AB} 為邊的正方形 $ABIH$ 是由 ___ 個紅色等腰直角三角形拼出來。
- (2) 以 \overline{AC} 為邊的正方形 $ACFG$ 是由 ___ 個紅色等腰直角三角形拼出來。
- (3) 以 \overline{BC} 為邊的正方形 $BCED$ 是由 ___ 個紅色等腰直角三角形拼出來。

從上面地磚的圖形，我們可以觀察到下面的關係：

等腰直角三角形兩個腰長所圍出來的兩個綠色正方形剛好可以拼出以直角對邊(斜邊)為邊的藍色正方形。

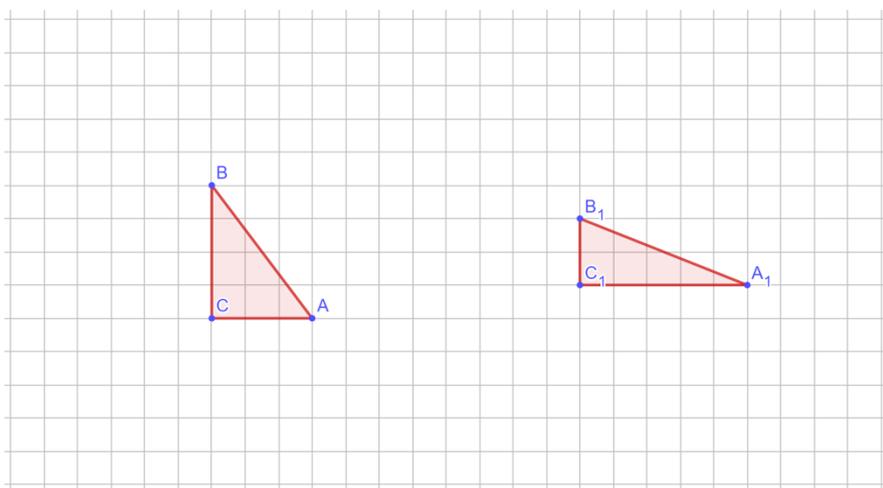
如果不是等腰直角三角形，會不會有相同的性質呢？

猜想：

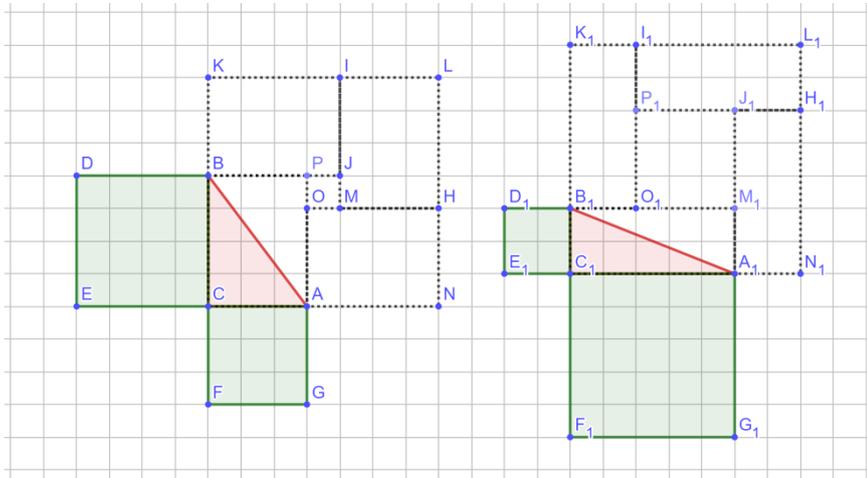
分別以兩邊為邊的正方形面積相加等於以斜邊為邊的正方形面積！

熱身一下，我們先練習畫正方形：

2. 以直角三角形的三個邊為邊，分別畫出正方形

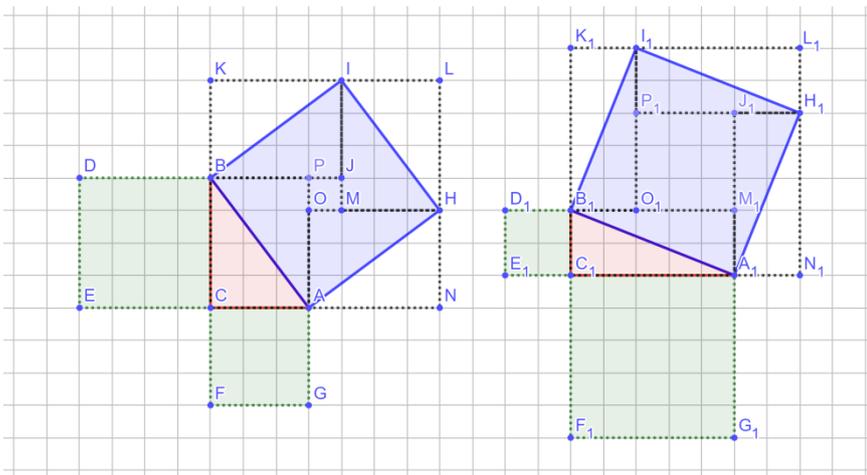


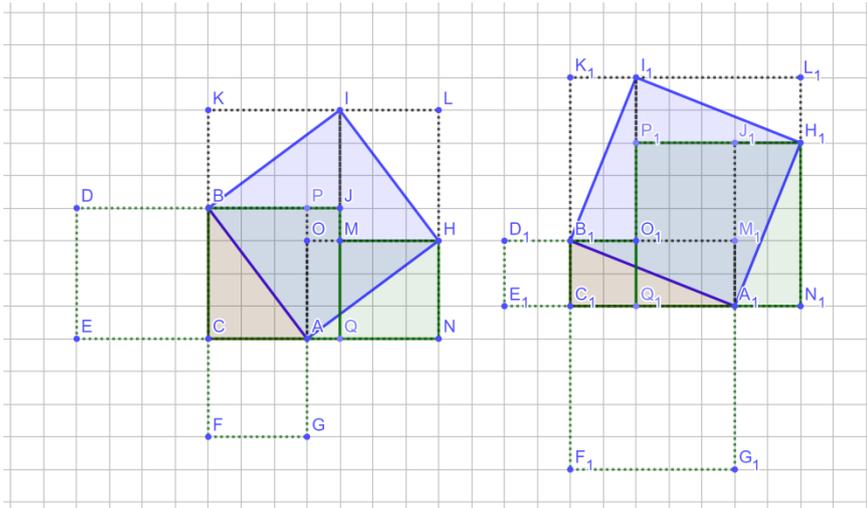
3. 以斜邊為邊畫正方形時，會利用矩形畫出對角線，請分別畫出以斜邊 \overline{AB} 和 $\overline{A_1B_1}$ 為邊的正方形。



4. 請說明第 3 題中的四邊形 $ABIH$ 和 $A_1B_1I_1H_1$ 為正方形！

5. 剪剪貼貼看看，兩個綠色正方形是否可以剛好拼出藍色正方形？





在上面的左圖中，

將正方形 $BCED$ 剪下，貼到正方形 _____ ，

將正方形 $ACFG$ 剪下，貼到正方形 _____ ，

然後，將 $\triangle ABC$ 剪下，貼到 \triangle _____ ，

將 $\triangle AHN$ 剪下，貼到 \triangle _____ 。

就可以看到 **兩個綠色正方形** 剪貼後剛好可以拼出 **藍色正方形** ！

在上面的右圖中，

將正方形 $B_1C_1E_1D_1$ 剪下，貼到正方形 _____ ，

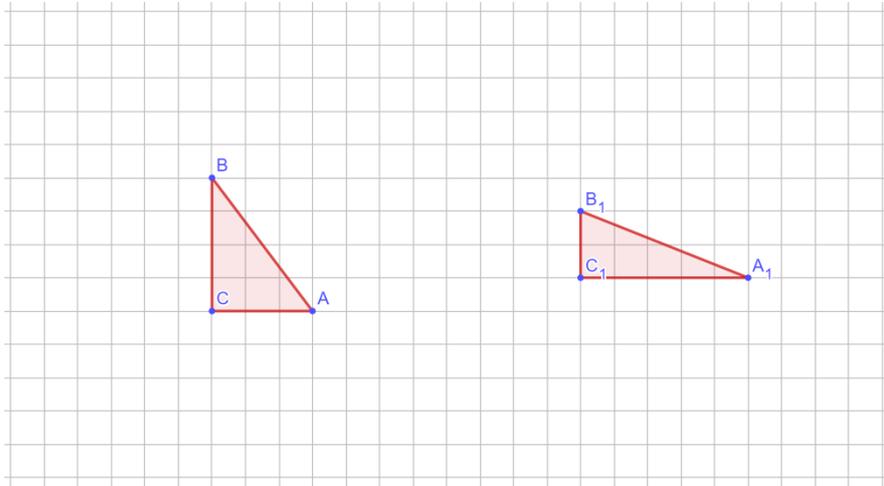
將正方形 $A_1C_1F_1G_1$ 剪下，貼到正方形 _____ ，

然後，將 $\triangle A_1B_1C_1$ 剪下，貼到 \triangle _____ ，

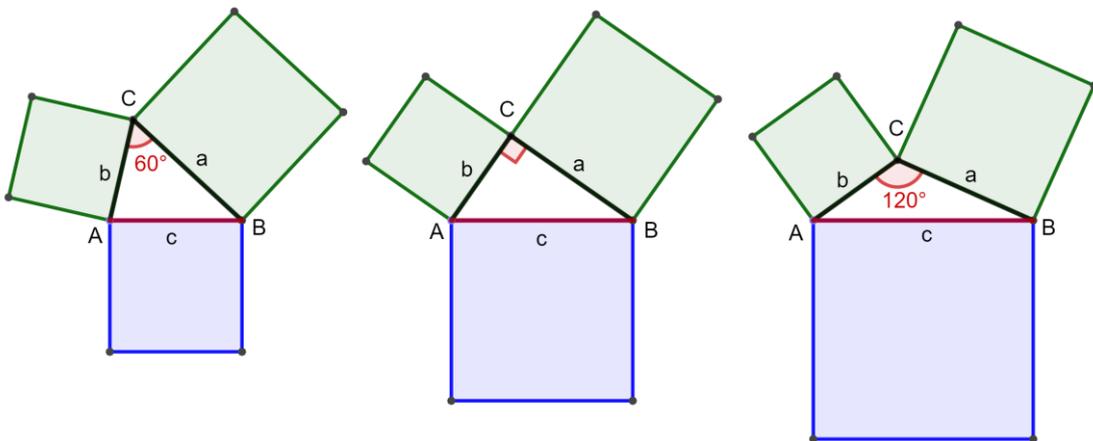
將 $\triangle A_1H_1N_1$ 剪下，貼到 \triangle _____ 。

就可以看到 **兩個綠色正方形** 剪貼後剛好可以拼出 **藍色正方形** ！

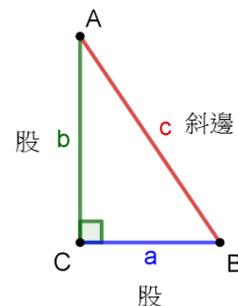
6. 再畫一次，分別畫出以三個邊為邊的正方形，再將兩個小正方形透過剪剪貼貼拼出以斜邊為邊的大正方形。



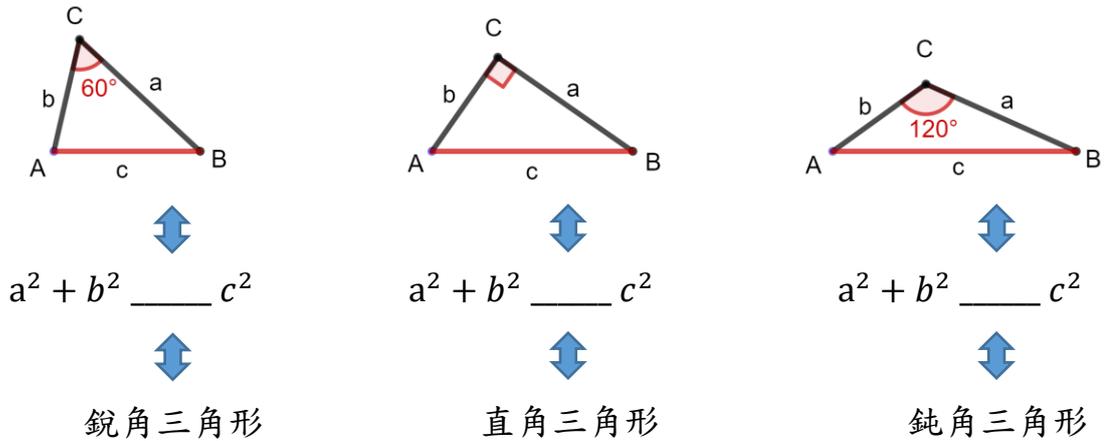
7. 如下圖，在 $\triangle ABC$ 中， a 和 b 兩邊固定，當 $\angle C = 90^\circ$ ，經過上面的討論，我們知道，分別以 a 、 b 為邊的正方形，經過適當的切割，剛好拼出以 c 為邊的正方形，那，當 $\angle C \neq 90^\circ$ ，這樣的關係變得不可能，你知道為什麼嗎？



8. **畢氏定理**：直角三角形斜邊(最長邊)的平方會等於兩個股長(短邊)的平方相加。
請利用畢氏定理寫出右邊直角三角形的三個邊長的關係式。_____。

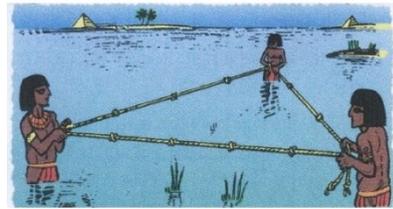


9. 在 \overline{AB} 和 \overline{AC} 長度固定之下，請在空格中填入 $>$ 、 $=$ 或 $<$ 來表現 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC} 的邊長關係。



10. 如圖，古埃及人用右邊方法做出直角。

(1) 為什麼這樣可以做出直角呢？



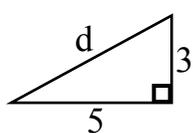
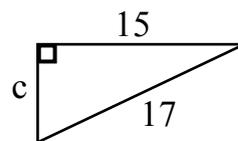
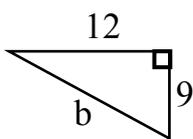
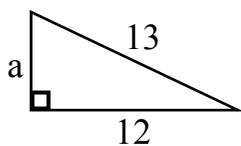
(2) 如果最長邊的繩結多了一節，剛剛的直角會變成_____角。

(3) 如果最長邊的繩結少了一節，剛剛的直角會變成_____角。

11. 請分別標示出下面直角三角形中最長的邊長，你是怎麼判斷的呢？



12. 請利用畢氏定理算出下面直角三角形當中不知道的邊長。

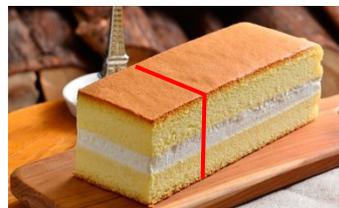


奇怪？d明明是邊長，應該算得出來啊，可是，好像找不到一個目前所學的數字，連乘兩次會等於34啊？這究竟是個什麼樣的數字呢？

4-3 平方根

1. 三姊妹要平分這塊蛋糕，姊姊從畫紅線處直直切下去，並拿走小塊的蛋糕，請問姊姊吃到的蛋糕□大於□等於□小於整個蛋糕的三分之一。怎麼檢查呢？

(小實驗：摺出一張紙的 $1/3$ ，怎麼確定摺出來的長度就是紙張的 $1/3$ ？)



2. 圓周長是直徑的 3 點多倍，這個倍數因為無法被寫成分數來表示，因此，採用希臘文中「周邊」一詞「περιφέρεια」的第一個字母___來表示直徑為 1 的圓周長，請寫出直徑為 6 的圓周長=___。



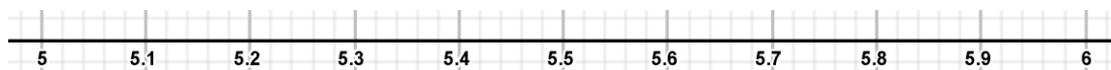
圖片來源：t.ly/UoMF

3. 將一個無法使用既有的數字來表達的數，我們會用一個適當的符號來代表那個數，例如我們用 π 這個符號來代表圓周率這個數，這樣方便記錄或指稱。我們再來看看符號的厲害！下面這些圖片是誰的商標呢？



4. 我們試著找出哪個數字**連乘兩次**會等於 34。

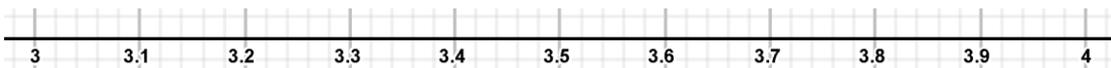
□	×	□	=	34	
5	×	5	=	25	比 34 小
6	×	6	=	36	比 34 大
5.8	×	5.8	=	33.64	比 34 小
5.9	×	5.9	=	34.81	比 34 大
5.83	×	5.83	=	33.9889	比 34 小
5.84	×	5.84	=	34.1056	比 34 大



- (1) 請把 5, 6, 5.8, 5.9, 5.83, 5.84 等數字在數線上標記出來。
- (2) 利用這樣的計算方式，繼續往下算，可以剛好寫出空格中的數字嗎？還是，越來越接近空格中的數字呢？_____。

5. 下面的計算在找出哪個數字**連乘兩次**會等於 12。

□	×	□	=	12	
3	×	3	=	9	比 12 小
4	×	4	=	16	比 12 大
3.4	×	3.4	=	11.56	比 12 小
3.5	×	3.5	=	12.25	比 12 大
3.46	×	3.46	=	11.9716	比 12 小
3.47	×	3.47	=	12.0409	比 12 大



- (1) 請把 3, 4, 3.4, 3.5, 3.46, 3.47 等數字在數線上標記出來。
- (2) 利用這樣的計算方式，繼續往下算，可以剛好寫出空格中的數字嗎？還是，越來越接近空格中的數字呢？_____。

6. 從前面的討論，可以看到，像 34 和 12 這樣的數字，無法像 49 和 16 這樣的數字可以使用以前學過的數字連乘兩次算出來，但是，我們又知道這樣的數字是存在的，因此，我們使用下面的表示法來表現。

$$\boxed{\sqrt{12}} \times \boxed{\sqrt{12}} = 12 \quad \text{以 } \underline{\quad} \text{ 來表示連乘兩次(平方)會等於 12 的這個數字}$$

$$\boxed{\sqrt{34}} \times \boxed{\sqrt{34}} = 34 \quad \text{以 } \underline{\quad} \text{ 來表示連乘兩次(平方)會等於 34 的這個數字}$$

從前面兩題的討論，我們可以知道 $\sqrt{12}$ 和 $\sqrt{34}$ 分別有多大。

這樣的做法，我們稱為**開根號**。

也就是， $\sqrt{12} = 3.46 \dots$ ， $\sqrt{34} = \underline{\quad} \dots$ 。

$\sqrt{12}$ 被讀作**根號** 12， $\sqrt{34}$ 被讀作 $\underline{\quad}$ 。

因為 $\sqrt{12} \times \sqrt{12} = 12$ 、 $(-\sqrt{12}) \times (-\sqrt{12}) = 12$ ，

我們稱 12 的**平方根**¹有正、負兩個，分別為 $\underline{\quad}$ 和 $\underline{\quad}$ 。

7. 請寫出下面數字的**平方根**。

(1) 6 $\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} = 6$	(2) 21 $\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} = 21$
(3) 16 $\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} = 16$	(4) 25 $\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} = 25$
(5) 0 $\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} = 0$	(6) -9 $\boxed{\quad} \times \boxed{\quad} = -9$

¹平方根的定義源自於多項式，八年級才會教多項式。

因為 $\sqrt{12}$ 是多項式 $x^2 - 12$ 的一個根，我們稱 $\sqrt{12}$ 為 12 的**平方根**。

又， $-\sqrt{12}$ 也是多項式 $x^2 - 12$ 的一個根。

所以，我們稱 12 的**平方根**有正、負兩個，分別為 $\sqrt{12}$ 和 $-\sqrt{12}$ 。

8. 關於 -9 的平方根，
 是 3 嗎？可是 $3 \times 3 = 9$ 不是 -9 ，
 是 -3 嗎？可是 $(-3) \times (-3) = 9$ 也不是 -9 ，
以目前所學，找不到一個數字的**平方**(連乘兩次)會等於 -9 ，
 因此，我們說， -9 這個數字沒有平方根。
 也就是說，**以目前所學**²，沒有 $\sqrt{-9}$ 這樣的數字。
 其實，所有的 _____ 和 -9 這個數字一樣，都沒有平方根。

那，其它數字呢？

數字 _____ 的平方根只有一個就是自己。

只要是 _____，都會有正負兩個平方根，而且互為相反數。

9. 我們知道 $2 < 3$ ，那， $\sqrt{2}$ 會小於 $\sqrt{3}$ 嗎？

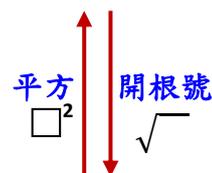
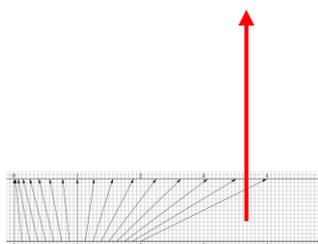
$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2, \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3,$$

數字越大，平方之後會越大，因此 $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ 。

請你試著說明當 $a < b$ 時， $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ， a 和 b 都是正數。

10. 從下面的圖形，可以看到數字越大，**平方**後也越大，同時，**根號數**也會越大。數字 1 兩側的箭頭(數字平方後)畫的方向剛好相反，這代表什麼意思呢？請比較下面數字的大小。

$$(1) \sqrt{0.25} \square 0.25 \quad (2) \sqrt{0.04} \square \sqrt{0.09} \quad (3) \sqrt{25} \square \sqrt{36}$$



²高中會談到 $\sqrt{-9} \times \sqrt{-9} = -9$ ， $\sqrt{-9}$ 是一種新的數字，被稱為**複數**。

4-4 根式運算

根號數這種全新的數字該怎麼進行運算呢？根號數源自於乘法運算，我們先討論根號數的乘除法。

1. 我們知道 $6 = 2 \times 3$ ，那， $\sqrt{6}$ 會等於 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 嗎？

$$\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 6$$

$$(\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) = (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{3}) = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{因此，}\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$$

(1) 請你試著說明 $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ， a 和 b 都是正數。

(2) 請你試著說明 $\sqrt{a \div b} = \sqrt{a} \div \sqrt{b}$ ， a 和 b 都是正數。

(3) 請你試著說明 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ， a 和 b 都是正數。

2. 以數字 $\sqrt{49}$ 為例。

$$\sqrt{49} = \sqrt{7 \times 7} = \sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$$

我們稱數字 49 **開根號** 後得到 7。

請以 **開根號** 的想法計算下面數字：

(1) $\sqrt{4} =$	(2) $\sqrt{36} =$
(3) $\sqrt{1} =$	(4) $\sqrt{0} =$
(5) $\sqrt{81} =$	(6) $\sqrt{12} =$

3. 以數字 $\sqrt{12}$ 為例。

$$\sqrt{12} = \sqrt{2 \times 2 \times 3} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

因為 12 無法分解為某個數字的**平方**，因此，12 無法以將數字分解的方式完成**開根號**，但，仍可以使用 4-3 小節**開根號**的做法來知道 $\sqrt{12}$ 的大小。

上述的作法是利用將 12 做分解的方式，將 $\sqrt{12}$ 改寫為 $2\sqrt{3}$ ，我們來練習將下面的數字改寫一下：

(1) $\sqrt{18} =$	(2) $\sqrt{20} =$
(3) $\sqrt{48} =$	(4) $\sqrt{54} =$

小結論： $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a \Rightarrow a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ ， $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ 。

4. 我們知道 $5 = 2 + 3$ ，那， $\sqrt{5}$ 會等於 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 嗎？

$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$= (\sqrt{2}) \times (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{3}) \times (\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$= 2 + \sqrt{6} + \sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\text{因此，}\sqrt{5} \neq \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

請你試著說明 $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ， a 和 b 都是正數。

5. 請比較 $4\sqrt{3}$ 和 $3\sqrt{5}$ 的大小。

做法 1：先平方再比大小。

$$4\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} =$$

$$3\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} =$$

做法 2：拉進根號內再比大小。

$$4\sqrt{3} = \sqrt{\quad} \times \sqrt{\quad} \times \sqrt{3} = \sqrt{\quad}$$

$$3\sqrt{5} = \sqrt{\quad} \times \sqrt{\quad} \times \sqrt{5} = \sqrt{\quad}$$

6. 請比較 $5\sqrt{4}$ 和 $4\sqrt{6}$ 的大小。

做法 1：先平方再比大小。

做法 2：拉進根號內再比大小。

7. 請化簡下列各式。

(1) $3 + \sqrt{16}$	(2) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$
(3) $\sqrt{2} + \sqrt{18}$	(4) $\sqrt{2^6 \times 3^5 \times 5^2}$

8. 利用所附的**乘方開方表**，求出下列各數的**近似值**。

(1) $\sqrt{46} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\sqrt{1764} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $\sqrt{450} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

N	N ²	\sqrt{N} 的近似值	$\sqrt{10N}$ 的近似值
40	1600	6.324555	20.00000
41	1681	6.403124	20.24846
42	1764	6.480741	20.49390
43	1849	6.557439	20.73644
44	1936	6.633250	20.97618
45	2025	6.708204	21.21320
46	2116	6.782330	21.44761
47	2209	6.855655	21.67948

9. 根號數的**近似值**：請說明 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 有多大？

(1) 請試著使用**估算**的方法估計，估計到小數第 2 位。

$$\sqrt{2}$$

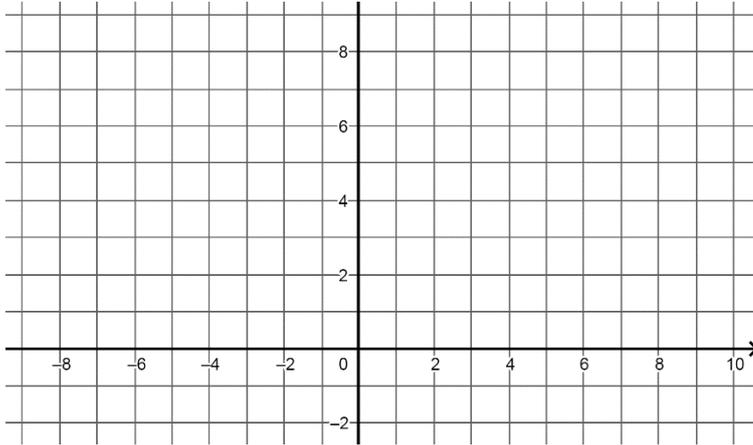
$$\sqrt{3}$$

(2) 使用**計算機**計算 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 。

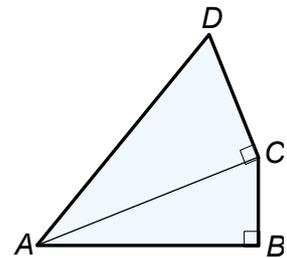
10. 在下面坐標平面上，完成下面事情。

(1) 標示出 $A(-4, 1)$ 、 $B(-4, 7)$ 、 $C(6, 7)$

(2) 求出 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 的長度



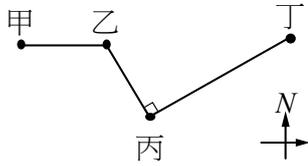
11. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle B$ 和 $\angle ACD$ 都是直角。若 $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 2$ ， $\overline{CD} = 3$ ，則 \overline{AD} 的長度為何？



12. 童軍旗的底座是每根為 80 公分木桿做成「工」字形的基座，正中央有一根 160 公分的木桿，上頭綁著童軍旗。如圖，我們用 4 條繩子加以固定，請問，如果忽略網綁時所需要的繩長，網綁以外所需要的繩子至少要準備多長呢？



13. 如圖，某車由甲地等速前往丁地，過程是：自甲向東直行 8 分鐘至乙後，朝東偏南直行 8 分鐘至丙，左轉 90 度直行 15 分鐘至丁。若此車由甲地以原來的速率向東直行可達丁地，則此車程需多少分鐘？



14. 已知小龍、阿虎兩人均在同一地點，若小龍向北直走 160 公尺，再向東直走 80 公尺後，可到神仙百貨，則阿虎向西直走多少公尺後，他與神仙百貨的距離為 340 公尺？