



### 隨堂練習

判斷下列式子是否為一元二次方程式？是的打「○」，不是的打「×」。

( ) (1)  $x+3=0$

( ) (2)  $x^2+5x=-13$

( ) (3)  $(x-4)(x+3)=0$

( ) (4)  $2x^2+5x-2=(2x+1)(x-2)$

( ) (5)  $x^2+x-3$

如果將某數代入一元二次方程式的未知數中，會使等號左右兩邊的值相等，就稱這個數為此一元二次方程式的**解**或**根**。而求出一元二次方程式的解或根的過程，稱為**解一元二次方程式**。

### 例 1

#### 判別一元二次方程式的解

- 判別 5 是否為一元二次方程式  $x^2+25x=50$  的解？
- 判別 -1 是否為一元二次方程式  $x^2-5x=-2x+4$  的解？

解

- 將  $x=5$  代入等號左邊，

$$\text{得到 } 5^2+25 \times 5=25+125 \neq 50,$$

所以 5 不是一元二次方程式  $x^2+25x=50$  的解。

- 將  $x=-1$  代入等號左邊，得到  $(-1)^2-5 \times (-1)=6$ ，

$$\text{將 } x=-1 \text{ 代入等號右邊，得到 } -2 \times (-1)+4=6,$$

等號左、右兩邊的值相等，

所以 -1 是一元二次方程式  $x^2-5x=-2x+4$  的解。



### 隨堂練習

1. 判別 0 是否為一元二次方程式  $x^2 - 5 = 4x$  的解？
2. 判別 4 和 -3 是否為一元二次方程式  $(x - 4)(x + 3) = 0$  的解？

由例 1 和隨堂練習可知，要判別一個數是不是方程式的解，只要將該數代入方程式的未知數中，看看是否能讓方程式的等號成立就知道了。但如果用代入法找一元二次方程式  $2x^2 - 87x - 135 = 0$  的解，假設我們從整數 1 開始一個一個代進去試，則要試到 45 才能找到這個方程式的一個解。而它的另一個解  $-\frac{3}{2}$  為負分數，若只拿整數試，則永遠也找不到  $-\frac{3}{2}$  這個解。

因此，接下來將學習其他更有效率的方法來解一元二次方程式。

數

學

好

好

玩

「代數」的由來



花拉子米

(約西元 780~850 年) 阿拉伯數學家，其著作《代數學》是第一本關於代數的著作，與丟番圖共享為「代數之父」。

《代數學》由阿拉伯數學家、天文學家花拉子米 (*al-Khwārizmī*，約西元 780~850 年) 所著，是第一本解決一元二次方程式的著作。

書中首創還原 (*al-jabr*) 及平衡 (*al-muqābala*) (相當於現今的「移項」和「合併同類項」) 的方法，並明確提出代數、已知數、未知數、根及移項等一系列概念，有系統的闡述一元二次方程式的解法，把代數學發展成一門與幾何學相提並論的獨立學科。代數 (*Algebra*) 一詞即是源自書中解法之一的 *al-jabr*。



▲前蘇聯發行的花拉子米 1200 歲誕辰紀念郵票

## 主題 2 利用因式分解解一元二次方程式

我們知道，當兩數都不為 0 時，這兩數的乘積一定不為 0。那麼當兩數的乘積為 0 時，這兩數可能會是哪些數呢？

**問題探索** 若  $A \times B = 0$ ，則  $A = 0$  或  $B = 0$

設  $A$ 、 $B$  為兩數，且  $A \times B = 0$ ，則：

- (1) 當  $A \neq 0$  時， $B$  是不是一定要等於 0？
- (2) 當  $B \neq 0$  時， $A$  是不是一定要等於 0？
- (3)  $A$ 、 $B$  可不可能都是 0？
- (4)  $A$ 、 $B$  可不可能都不是 0？

由問題探索可以知道，若  $A$ 、 $B$  為兩數，當  $A \times B = 0$  時，則  $A$  和  $B$  至少有一個是 0，即  $A = 0$  或  $B = 0$ 。

利用這個結論可以解一元二次方程式。

例如：方程式  $(x-3)(3x-2)=0$  表示  $(x-3)$  和  $(3x-2)$  的乘積是 0，因為  $(x-3)$  和  $(3x-2)$  都是數，利用問題探索的結論，可得  $x-3=0$  或  $3x-2=0$ ，再解這兩個一元一次方程式，即得到方程式  $(x-3)(3x-2)=0$  的解為 3 和  $\frac{2}{3}$ 。



### 隨堂練習

找出下列各方程式的解。

(1)  $x(x+3)=0$

(2)  $(4x-2)(2x+5)=0$

若一個一元二次方程式可化簡為「等號的一邊是兩個一次式的乘積，另一邊是0。」則可利用「有兩數  $A$ 、 $B$ ，若  $A \times B = 0$ ，則  $A = 0$  或  $B = 0$ 。」的性質求解。我們來看下面的例題。

## 例 2

### 利用提公因式解方程式

解下列各一元二次方程式。

(1)  $2x^2 + 3x = 0$

(2)  $\frac{2}{3}x^2 + 4x = 0$

解

(1)  $2x^2 + 3x = 0$

$x(2x + 3) = 0$  提公因式  $x$

$x = 0$  或  $2x + 3 = 0$

$x = 0$  或  $x = -\frac{3}{2}$

所以方程式的解為 0 和  $-\frac{3}{2}$ 。

(2)  $\frac{2}{3}x^2 + 4x = 0$

$x(\frac{2}{3}x + 4) = 0$  提公因式  $x$

$x = 0$  或  $\frac{2}{3}x + 4 = 0$

$x = 0$  或  $x = -6$

所以方程式的解為 0 和  $-6$ 。



### 隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

(1)  $3x^2 - 7x = 0$

(2)  $-\frac{1}{2}x^2 + 8x = 0$

## 例 3

## 先移項再提公因式解方程式

解一元二次方程式  $(x-1)(2x+3)=(x-1)(x+2)$ 。

解  $(x-1)(2x+3)=(x-1)(x+2)$

$(x-1)(2x+3)-(x-1)(x+2)=0$  } 移項使等號右邊為 0

$(x-1)[(2x+3)-(x+2)]=0$  } 提公因式  $(x-1)$

$(x-1)(x+1)=0$

$x-1=0$  或  $x+1=0$

$x=1$  或  $x=-1$

所以方程式的解為 1 和  $-1$ 。



## 隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

(1)  $(x+3)(x+4)=(x+3)(2x-1)$     (2)  $(x-1)^2=(x-1)(2x+3)$

## 動 動 腦

例 3 中，若將  $(x-1)(2x+3)=(x-1)(x+2)$  兩邊同時除以  $(x-1)$  得  $2x+3=x+2$ ，解一元一次方程式得  $x=-1$ ，這樣的解法對不對？說說看你的想法。