

第 2 章 分數的運算

2-1 因數與倍數

主題一 因數與倍數

國小曾經學過， a 、 b 兩個正整數，若 a 可以被 b 整除，那麼 a 就是 b 的倍數， b 是 a 的因數。因此由下面的除式得知：

$132 \div 6 = 22$ ，所以 132 是 6 的倍數，而 6 是 132 的因數。

$58 \div 6 = 9 \cdots 4$ ，所以 58 不是 6 的倍數，而 6 不是 58 的因數。

隨堂練習

判斷下列各數中，哪些是 144 的因數？

1 3 6 8 14 24 44 144

a 、 b 、 c 三個正整數，若 $a = b \times c$ ，則表示 $a \div b = c$ 和 $a \div c = b$ 都會成立，這時 a 是 b 和 c 的倍數，而 b 和 c 是 a 的因數，所以可以由 $144 = 6 \times 24$ 得知 144 是 6 和 24 的倍數，或說 6 和 24 是 144 的因數。

例 1 寫出整數的因數

寫出 48 的因數。

解：因為 $48 = 1 \times 48 = 2 \times 24 = 3 \times 16 = 4 \times 12 = 6 \times 8$ ，

所以 48 的因數有 1、2、3、4、6、8、12、16、24、48。

隨堂練習

寫出 216 的因數。

請寫出下列各題的因數。

(1) 42 : _____ (2) 29 : _____

(3) 45 : _____ (4) 54 : _____

(5) 60 : _____ (6) 91 : _____

(7) 108 : _____ (8) 120 : _____

隨堂練習

寫出 198 的因數。

請寫出下列各題的因數。

(1) 76 : _____ (2) 87 : _____

(3) 80 : _____ (4) 53 : _____

(5) 58 : _____ (6) 79 : _____

(7) 52 : _____ (8) 101 : _____

隨堂練習

寫出 550 的因數。

請寫出下列各題的因數。

(1) 84 : _____ (2) 105 : _____

(3) 95 : _____ (4) 51 : _____

(5) 100 : _____ (6) 66 : _____

(7) 81 : _____ (8) 125 : _____

因為每一個正整數都可以寫成 1 和它自己的乘積，所以 1 是任何正整數的因數，或者說任何正整數都是 1 的倍數。

又因為 0 不能當除數，所以 0 不是任何整數的因數；而 $0=1\times 0=2\times 0=3\times 0=\dots$ ，即任意一個非零整數乘以 0 都得到 0，所以 0 是任意非零整數的倍數。

Hint

(1) 任何正整數都是 1 的倍數。

(2) 0 是任意非零整數的倍數。

因數和倍數也可以延伸到負整數，說明如下：

由 $8=1\times 8=2\times 4$ ，可以得到 1、2、4、8 是 8 的因數；又 $8=(-1)\times(-8)=(-2)\times(-4)$ ，因此 1、2、4、8 和它們的相反數 -1、-2、-4、-8 都是 8 的因數。其中，1、2、4、8 稱為 8 的正因數，-1、-2、-4、-8 稱為 8 的負因數。

主題二 倍數判別法

*2、5 的倍數判別法

在國小時我們曾經學過：

1. 如果一個整數的個位數字是 0、2、4、6、8，那麼這個數一定是 2 的倍數；否則就不是 2 的倍數。一般稱 2 的倍數為偶數，不是 2 的倍數為奇數。
2. 如果一個整數的個位數字是 0 或 5，那麼這個數一定是 5 的倍數；否則就不是 5 的倍數。

例 2 判別 2、5 的倍數

若五位數 $1893\square$ 是 2 的倍數，也是 5 的倍數，則 $\square=?$

解：如果 $1893\square$ 是 2 的倍數，則 \square 可能為 0、2、4、6、8；

如果 $1893\square$ 是 5 的倍數，則 \square 可能為 0、5；

五位數 $1893\square$ 是 2 的倍數，也是 5 的倍數，則 $\square=0$ 。

隨堂練習

設 a 是四位數 $946\square$ ，試回答下列問題：

(1)若 a 是 5 的倍數，也是 2 的倍數，則 \square 為多少？

(2)若 a 是 5 的倍數，但不是 2 的倍數，則 \square 為多少？

* 4 的倍數判別法

【4 的倍數判別法】

如果一個整數的末兩位數字是 4 的倍數【可整除 4】或都是 0，那麼這個整數就是 4 的倍數；否則就不是 4 的倍數。

例 3 判別 4 的倍數

判別 1998 和 52160 這兩個數是不是 4 的倍數。

解：(1)1998 的末兩位數為 98，而 $98 \div 4 = 24 \cdots 2$ ，所以 1998 不是 4 的倍數。

(2)52160 的末兩位數為 60，而 $60 \div 4 = 15$ ，所以 52160 是 4 的倍數。

隨堂練習

1.判別 2576 和 39528 是不是 4 的倍數。

2.若五位數 $864\square 2$ 是 4 的倍數，那麼 \square 中可以是哪些數字？

隨堂練習

(1) 要使 $76\square$ 成為 5 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(2) 要使 $4\square 2$ 成為 4 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(3) 要使 $85\square$ 成為 2 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(4) 下列各數中，有哪些是 2 的倍數？有哪些是 4 的倍數？有哪些是 5 的倍數？

496	89228	240	5022	253355	150
525	44044	1136	18950	999998	55552

2 的倍數：_____

4 的倍數：_____

5 的倍數：_____

隨堂練習

(1) 要使 $85\square$ 成為 5 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(2) 要使 $6\square 2$ 成為 4 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(3) 要使 $79\square$ 成為 2 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(4) 下列各數中，有哪些是 2 的倍數？有哪些是 4 的倍數？有哪些是 5 的倍數？

382	79415	720	3022	15415	75
605	4212	806	14155	99772	44156

2 的倍數：_____

4 的倍數：_____

5 的倍數：_____

隨堂練習

(1) 要使 $52\square$ 成為 5 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(2) 要使 $4\square6$ 成為 4 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(3) 要使 $11\square$ 成為 2 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(4) 下列各數中，有哪些是 2 的倍數？有哪些是 4 的倍數？有哪些是 5 的倍數？

622	4508	2105	4212	5703	24
425	7210	7515	7321	4515	2476

2 的倍數：_____

4 的倍數：_____

5 的倍數：_____

*9 的倍數判別法

【9 的倍數判別法】

如果一個整數的各個數字和是 9 的倍數，那麼這個整數就是 9 的倍數；否則就不是 9 的倍數。

例 4 判別 9 的倍數

判別 1998 和 2005 這兩個數是不是 9 的倍數。

解：(1)1998 的各個數字和是 $1+9+9+8=27$ ，【每個數字加起來再除以 9】
而 27 是 9 的倍數，因此 1998 是 9 的倍數。

(2)2005 的各個數字和是 $2+0+0+5=7$ ，【每個數字加起來再除以 9】
7 不是 9 的倍數，因此 2005 不是 9 的倍數。

隨堂練習

- 1.判別 2556 和 18954 這兩個數是不是 9 的倍數。
- 2.若四位數 $4\square 32$ 是 9 的倍數，那麼 \square 中可以是哪些數字？
- 3.判別 3717 和 9876 這兩個數是不是 9 的倍數。
- 4.若四位數 $5\square 62$ 是 9 的倍數，那麼 \square 中可以是哪些數字？

隨堂練習

1. 判別 4212 和 5744 這兩個數是不是 9 的倍數。
2. 若四位數 $4\square 16$ 是 9 的倍數，那麼 \square 中可以是哪些數字？
3. 判別 3764 和 21854 這兩個數是不是 9 的倍數。
4. 若四位數 $35\square 6$ 是 9 的倍數，那麼 \square 中可以是哪些數字？
3. 判別 24147 和 51543 這兩個數是不是 9 的倍數。
4. 若四位數 $57\square 8$ 是 9 的倍數，那麼 \square 中可以是哪些數字？

*3 的倍數判別法

【3 的倍數判別法】

如果一個整數的各個數字和是 3 的倍數，那麼這個整數就是 3 的倍數；否則就不是 3 的倍數。

例 5 判別 3 的倍數

判別 1977 和 1997 這兩個數是不是 3 的倍數。

解：(1)1977 的各個數字和是 $1+9+7+7=24$ ，
24 是 3 的倍數，因此 1977 是 3 的倍數。
(2)1997 的各個數字和是 $1+9+9+7=26$ ，
26 不是 3 的倍數，因此 1997 不是 3 的倍數。

隨堂練習

- 1.判別 2056 和 6501 是不是 3 的倍數。
- 2.若四位數 $4\square 31$ 是 3 的倍數，那麼 \square 中可以是哪些數字？
- 3.判別 4012 和 1542 是不是 3 的倍數。
- 4.若四位數 $5\square 14$ 是 3 的倍數，那麼 \square 中可以是哪些數字？

隨堂練習

1. 判別 52473 和 674521 是不是 3 的倍數。
2. 若四位數 $527\square$ 是 3 的倍數，那麼 \square 中可以是哪些數字？
3. 判別 1438 和 3513 是不是 3 的倍數。
4. 若四位數 $3\square 23$ 是 3 的倍數，那麼 \square 中可以是哪些數字？
5. 判別 5724 和 4065 是不是 3 的倍數。
6. 若四位數 $467\square$ 是 3 的倍數，那麼 \square 中可以是哪些數字？

* 11 的倍數判別法

要檢查一個整數是否為 11 的倍數，判別方法如下：

【11 的倍數判別法】

先算出這個數的奇數位數字和及偶數位數字和，如果這兩個和的差是 11 的倍數或 0，那麼這個整數就是 11 的倍數；否則就不是 11 的倍數。

例如：



奇數位數字和 = $5 + 4 + 9 = 18$

偶數位數字和 = $6 + 1 = 7$

因為 $18 - 7 = 11$ ，而 11 是 11 的倍數，
所以 56419 是 11 的倍數。

隨堂練習

除除看，56419 是否真的是 11 的倍數？

例 6 判別 11 的倍數

判別 51370 和 281604 這兩個數是不是 11 的倍數。

解：(1) 因為 51370 的奇數位數字和減偶數位數字和為

$$(5 + 3 + 0) - (1 + 7) = 0 \text{ 是 } 11 \text{ 的倍數，}$$

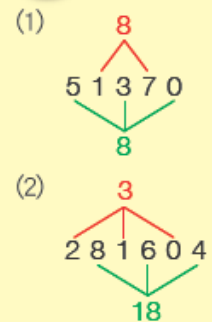
所以 51370 是 11 的倍數。

(2) 因為 281604 的奇數位數字和減偶數位數字和為

$$(8 + 6 + 4) - (2 + 1 + 0) = 15 \text{ 不是 } 11 \text{ 的倍數，}$$

所以 281604 不是 11 的倍數。

Hint



隨堂練習

1. 判別 2468 和 13579 這兩個數是不是 11 的倍數。

2. 若 $73854\square 6$ 是 11 的倍數，那麼 \square 中可以是哪些數字？

隨堂練習

(1) 要使 $27\square$ 成為 3 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(2) 要使 $5\square62$ 成為 3 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(3) 要使 $42\square13$ 成為 3 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(4) 要使 $36\square$ 成為 9 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(5) 要使 $16\square8$ 成為 9 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(6) 要使 $24\square6$ 成為 9 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(7) 要使 $\square3852$ 成為 11 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(8) 要使 $78\square3526$ 成為 11 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(9) 下列各數中，有哪些是 3 的倍數？有哪些是 9 的倍數？有哪些是 11 的倍數？

495	920	204	666	919	468732
2838	103056	1276	6630	5793	7659

3 的倍數：_____

9 的倍數：_____

11 的倍數：_____

隨堂練習

(1) 要使 $16\square$ 成為 3 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(2) 要使 $3\square12$ 成為 3 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(3) 要使 $53\square4$ 成為 3 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(4) 要使 $47\square$ 成為 9 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(5) 要使 $36\square2$ 成為 9 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(6) 要使 $34\square9$ 成為 9 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(7) 要使 $\square1459$ 成為 11 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(8) 要使 $69\square342$ 成為 11 的倍數， \square 應該填入哪些數？

答：_____

(9) 下列各數中，有哪些是 3 的倍數？有哪些是 9 的倍數？有哪些是 11 的倍數？

515	1028	376	927	1056	694342
1935	10340	2373	5560	4932	8721

3 的倍數：_____

9 的倍數：_____

11 的倍數：_____

主題三 質數與質因數

* 質數的判別

每一個大於 1 的整數至少有兩個因數，一個是「1」，另一個是「它自己」。如果剛好只有 1 和它自己兩個因數，這樣的數稱為**質數**；如果除了 1 和它自己以外，還有其他的因數，這樣的數稱為**合數**。一般規定 1 不是質數也不是合數。

例 7 判斷質數與合數

判別 9 和 29 是質數還是合數。

解：(1)9 的因數除了 1 和 9 之外，還有因數 3，

所以 9 是合數。【 $9 = 1 \times 9 = 3 \times 3$ 】

(2)29 的因數只有 1 和 29，

所以 29 是質數。【 $29 = 1 \times 29$ 】

隨堂練習

1.20 以內(含 20)的質數有哪些？合數有哪些？

2.57 與 132 是質數嗎？說出你的理由。

隨堂練習

(1) 0~30 的質數有哪些？合數有哪些？

質數：_____

合數：_____

(2) 請回答下列問題：

① 請問最小的質數是多少？答：_____

② 請問最小的合數是多少？答：_____

③ 奇數中，最小的質數是多少？答：_____

④ 53 是質數還是合數？答：_____

⑤ 91 是質數還是合數？答：_____

(3) 20 的因數中，有哪些為質數？答：_____

(4) 36 的因數中，有哪些為質數？答：_____

(5) 84 的因數中，有哪些為質數？答：_____

隨堂練習

(1) 1~100 的質數有哪些？合數有哪些？

質數：_____

合數：_____

(2) 請回答下列問題：

① 29 是質數還是合數？答：_____

② 81 是質數還是合數？答：_____

(3) 45 的因數中，有哪些為質數？答：_____

(4) 108 的因數中，有哪些為質數？答：_____

(5) 87 的因數中，有哪些為質數？答：_____

要判別一個數是不是質數，只要看它能不能被比它小的質數整除就好。我們以 17 為例，判別 17 是不是質數。觀察 1~16 的整數：

17 不能被 2 整除，所以 17 也不能被 4、6、8、10、12、14、16 整除；

17 不能被 3 整除，所以 17 也不能被 6、9、12、15 整除；

17 不能被 5 整除，所以 17 也不能被 10、15 整除；

17 不能被 7 整除，所以 17 也不能被 14 整除；

17 不能被 11、13 整除。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17			

因此要判別 17 是不是質數，只要看 17 能不能被比 17 小的這些質數 2、3、5、7、11、13 整除就好。

隨堂練習

仿照上述方式判別 31 是不是質數。

*1~100 中的質數

有 2、3、5、7、11、13、17、19、
23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97，
它們都是質數。

*質因數分解

如果一個整數的因數是質數，我們稱此因數為這個整數的**質因數**。例如：18的因數有1、2、3、6、9、18，而18的這些因數中2、3是質數，所以2、3就是18的質因數；其他的因數1、6、9、18都不是18的質因數。

隨堂練習

寫出24的質因數。

$$24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$$

24的質因數有2、3

【質因數分解】

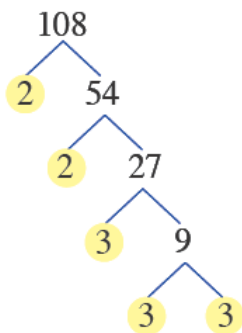
每一個合數都可以分解成質因數的連乘積，把一個正整數分解成質因數的連乘積的過程稱為**質因數分解**。

例8 整數的質因數分解

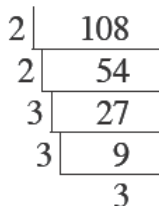
將108做質因數分解。

解：

樹狀圖



短除法



Hint

利用短除法做質因數分解時，要注意除數都要是質數喔！

$$\begin{array}{l} \text{除數} \rightarrow 2 \mid 108 \leftarrow \text{被除數} \\ \quad \quad \quad 54 \leftarrow \text{商} \end{array}$$

$$108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

隨堂練習

分別將120與504做質因數分解。

從例 8 可知，108 可以分解成兩個 2 和三個 3 的乘積。當兩個或兩個以上相同的數相乘時，還可以利用「指數」來表示，也就是

$$\begin{aligned} 108 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2 \text{ 個}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{3 \text{ 個}} \\ &= 2^2 \times 3^3 \end{aligned}$$

【標準分解式】

將一個合數做質因數分解，若按照質因數的大小，由小到大排列，並將相同質因數的乘積寫成指數的形式，則這樣的表示法稱為**標準分解式**。

例 9 利用質因數分解寫出標準分解式 對應能力指標 7-n-10

將 180 做質因數分解，再寫出它的標準分解式。

解：

$$\begin{array}{r|l} 2 & 180 \\ \hline 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 180 的標準分解式為 } 180 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \\ &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \end{aligned}$$

隨堂練習

分別將下列各數做質因數分解，再寫出它的標準分解式。

(1) 75

(2) 150

(3) 1188

隨堂練習

(1) 60

(2) 72

(3) 345

(4) 91

(5) 456

(6) 336

(7) 936

(8) 2475

(9) 1008

隨堂練習

(1) 85

(2) 172

(3) 476

(4) 920

(5) 832

(6) 198

(7) 376

(8) 1475

(9) 993

隨堂練習

(1) 402

(2) 515

(3) 355

(4) 258

(5) 561

(6) 729

(7) 303

(8) 428

(9) 444

重點整理

1. 因數、倍數的意義

a 、 b 、 c 為整數，且 $b \neq 0$ 、 $c \neq 0$ ，若 $a = b \times c$ ，則 a 為 b 、 c 的倍數； b 、 c 為 a 的因數。

註：(1) 0 不是任意整數的因數；0 是任意非零整數的倍數。

(2) 1 是任意整數的因數；任意整數都是 1 的倍數。

2.2 的倍數判別法

如果一個整數的個位數字為 0、2、4、6、8，則這個整數就是 2 的倍數。

例 32、60、128、1356

3.5 的倍數判別法

如果一個整數的個位數字為 0 或 5，則這個整數就是 5 的倍數。

例 45、100、645、3370

4.4 的倍數判別法

如果一個整數的末兩位數字是 4 的倍數或都是 0，則這個整數就是 4 的倍數。

例 36、76、108、852、1468

5.9 的倍數判別法

如果一個整數的各個數字和是 9 的倍數，則這個整數就是 9 的倍數。

例 $612 : 6 + 1 + 2 = 9 \rightarrow 9$ 為 9 的倍數，所以 612 是 9 的倍數。

6.3 的倍數判別法

如果一個整數的各個數字和是 3 的倍數，則這個整數就是 3 的倍數。

例 $147 : 1 + 4 + 7 = 12 \rightarrow 12$ 為 3 的倍數，所以 147 是 3 的倍數。

7.11 的倍數判別法

如果一個整數的奇數位數字和與偶數位數字和的差是 11 的倍數或 0，則這個整數就是 11 的倍數。

$7+5=12$
例 7557：12-12=0→0 為 11 的倍數，所以 7557 是 11 的倍數。
 $5+7=12$

8.質數與合數

(1)一個大於 1 的整數，如果除了 1 和它自己以外，沒有其他的因數，則這個整數稱為質數。

例 2、7、31、73

(2)一個大於 1 的整數，如果除了 1 和它自己以外，還有其他的因數，則這個整數稱為合數。

例 4、25、91、143

註：1 不是質數也不是合數。

9.質因數

一個整數的因數如果是質數，則這個因數就是這個整數的質因數。

例

整數	所有因數	質因數
12	1、2、3、4、6、12	2、3

10.質因數分解

每一個合數都可以分解成它的質因數的連乘積，其中分解的過程稱為質因數分解。

11.標準分解式

將一個合數做質因數分解，若按照質因數的大小，由小到大排列，並將相同質因數的乘積寫成指數的形式，則這樣的表示法稱為標準分解式。

例 $180=2^2 \times 3^2 \times 5 \rightarrow 2^2 \times 3^2 \times 5$ 稱為 180 的標準分解式。

自我評量

1. 在表格內的適當位置打 \checkmark 。

	2 的倍數	3 的倍數	4 的倍數	9 的倍數	11 的倍數
4005		\checkmark		\checkmark	
4050	\checkmark	\checkmark		\checkmark	
59182	\checkmark				
15829					\checkmark
222222	\checkmark	\checkmark			\checkmark

2. 已知 $3415\square$ 是一個五位數，試回答下列問題。

(1) 若 $3415\square$ 是 2 的倍數，那麼 \square 可以是哪些數？

$$\square = 0、2、4、6、8$$

(2) 若 $3415\square$ 是 5 的倍數，那麼 \square 可以是哪些數？

$$\square = 0、5$$

(3) 若 $3415\square$ 是 4 的倍數，那麼 \square 可以是哪些數？

$$\square = 2、6$$

(4) 若 $3415\square$ 是 3 的倍數，那麼 \square 可以是哪些數？

$$\square = 2、5、8$$

(5) 若 $3415\square$ 是 9 的倍數，那麼 \square 可以是哪些數？

$$\square = 5$$

(6) 若 $3415\square$ 是 11 的倍數，那麼 \square 可以是哪些數？

$$\square = 5$$

3.111 是不是質數？你是怎麼知道的？

$111 = 1 \times 111 = 3 \times 37$ ，111 除了 1 和本身以外，還有因數 3 和 37，
所以 111 不是質數。

4. 下列哪些數是 459 的質因數？

1, 2, 3, 5, 6, 7, 13, 17, 22

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 459} \\ \underline{3} \\ 153 \\ \underline{3} \\ 51 \\ \underline{3} \\ 17 \end{array}$$

$$459 = 3^3 \times 17$$

所以 3、17 是 459 的質因數

5. 將 2448 做質因數分解，並寫出 2448 的質因數。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 2448} \\ \underline{2} \\ 1224 \\ \underline{2} \\ 612 \\ \underline{2} \\ 306 \\ \underline{2} \\ 153 \\ \underline{3} \\ 51 \\ \underline{3} \\ 17 \end{array}$$

$$2448 = 2^4 \times 3^2 \times 17$$

2448 的質因數有 2、3、17

6. 將 $12 \times 3 \times 57$ 做質因數分解，並寫出它的標準分解式。

$$\begin{aligned} & 12 \times 3 \times 57 \\ &= (2 \times 2 \times 3) \times 3 \times (3 \times 19) \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 19 \\ &= 2^2 \times 3^3 \times 19 \end{aligned}$$