

多項式的運算

一、多項式之除法

除法定理：

設 $f(x), g(x)$ 為二多項式且 $g(x)$ 不是零多項式，則恰有二多項式 $q(x)$ 及 $r(x)$

滿足 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 其中 $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg g(x)$ 。

《註》 $f(x)$ 稱為被除式， $g(x)$ 稱為除式，而 $q(x)$ 稱為商式， $r(x)$ 稱為餘式。

範例 1.

若多項式 $x^3 + 4x^2 + 5x - 3$ 除以 $f(x)$ 的商式為 $x + 2$ ，餘式為 $2x - 1$ ，

則 $f(x) =$ _____

類題：

若多項式 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 4x - 2$ 除以 $g(x)$ 的商為 $x + 3$ ，餘式為 $x - 5$ ，

則 $g(x) =$ _____

範例 2.

設 $f(x)$ 為一多項式， $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$ ，若以 $x - \frac{b}{a}$ 除 $f(x)$ 的商為 $q(x)$ ，餘式為 r

則(1)以 $ax - b$ 除 $f(x)$ ，得商為 _____，餘式為 _____。

(2) 以 $x - b$ 除 $f\left(\frac{x}{a}\right)$ ，得商為 _____，餘式為 _____。

(3) 以 $x - b$ 除 $af\left(\frac{x}{a}\right)$ ，得商為 _____，餘式為 _____。

(4) 以 $x - \frac{1}{a}$ 除 $f(bx)$ ，得商為 _____，餘式為 _____。

(5) 以 $ax - b$ 除 $x^2 f(x)$ ，得商為 _____，餘式為 _____。

類題：

(一)設 $f(x)$ 為一多項式， $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$ 若以 $ax - b$ 除 $f(x)$ 的商為 $q(x)$ ，

餘式為 r 。則(1)以 $x - \frac{b}{a}$ 除 $f(x)$ ，得商為_____，餘式為_____。

(2) 以 $x - b$ 除 $f(\frac{x}{a})$ ，得商為_____，餘式為_____。

(二)設 $f(x) \div g(x)$ 的商為 $q(x)$ ，餘式為 $r(x)$ ，

則 (1) $f(x) \div 5g(x)$ 的商為_____。(2) $3f(x) \div 5g(x)$ 的商為_____。

二、 綜合除法:

(1) 除式為一次者:除式與被除式均按降冪排列,分離係數時缺項以零補之.

(2) 除式之領導係數必為 1,而領導係數 1 省略,以後各項係數要變號寫出.

範例 1.

(1) 試求 $x-1$ 除 $4x^4 + 5x^2 + 3x-2$ 之商_____及餘式_____。

(2) 試求 $2x-1$ 除 $4x^4 + 5x^2 + 3x-2$ 之商_____及餘式_____。

類題：

$6x^3 - 17x^2 + ax + b = (x-2)(cx-3)(3x+d)$ 求數對 $(a, b, c, d) =$ _____。

範例 2.

試求以 $x^2 + 3x-2$ 除 $2x^6 + 5x^5 - 10x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 20x + 7$ 之商與餘式。

類題：

試求以 $2x^2-x+1$ 除 $2x^5+x^4-4x^3+5x^2+3$ 所得的商式與餘式

三、 多項式的應用

1. 餘式定理

(1) 設 $f(x)$ 為一實係數多項式, α 而為一定數,

則 $f(x)$ 除以 $(x-\alpha)$ 之餘式為 $f(\alpha)$.

[證明] : 設 $f(x)$ 為多項式, 由除法原理得知,

$$f(x) = q(x) \cdot (x-\alpha) + r$$

令除式 $x-\alpha=0$ 則 $x=\alpha$ 代入上式, 得

$$f(\alpha) = q(\alpha) \cdot (\alpha-\alpha) + r = r \quad \text{故得證}$$

(2) 設 $f(x)$ 為一實係數多項式, $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$,

則 $f(x)$ 除以 $ax+b$ 之餘式為 $f(-\frac{b}{a})$

[證明] : 設 $f(x)$ 為一多項式, 以 $ax+b$ 除 $f(x)$, 由除法定理可知,

$$f(x) = q(x)(ax+b) + r \quad \text{令除式 } ax+b=0$$

$$\text{則 } x = -\frac{b}{a} \text{ 代入上式, 得 } f(-\frac{b}{a}) = q(-\frac{b}{a})[a(-\frac{b}{a})+b] + r = r$$

$$\text{即 } ax+b \text{ 除 } f(x) \text{ 的餘式 } r = f(-\frac{b}{a}) \quad \text{故得證}$$

註：在數學上求餘數最常用的兩個方法

(1) 餘式定理 (2) 綜合除法

範例 1.

設二次式 ax^2+bx-1 , 以 $x+2$ 除之餘 1, 以 $x-1$ 除之餘 7, 則以 $x+1$ 除之餘式為_____。

類題：

$f(x) = ax^2 + bx - 4$ ，以 $x + 1$ 除之餘數為 3，以 $x - 1$ 除之餘數為 1，則以 $x - 2$ 除 $f(x)$ 之餘數為_____。

範例 2.

(1) 設 $f(x) = x^7 - 50x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 25x^2 - 30x - 11$ ，則 $f(7)$
=_____。

(2) 求 $7^7 - 50 \times 7^5 + 6 \times 7^4 + 4 \times 7^3 + 25 \times 7^2 - 30 \times 7 - 11 =$ _____。

類題：

(1) 設則 $f(x) = x^7 - 10x^6 + 12x^5 - 25x^4 - 21x^3 + 32x^2 - 46x + 109$ ，
則 $f(9) =$ _____。

(2) 求 $9^7 - 10 \times 9^6 + 12 \times 9^5 - 25 \times 9^4 - 21 \times 9^3 + 32 \times 9^2 - 46 \times 9 + 109$ 之值
為_____。

範例 3.

若 $7^7 - 8 \times 7^6 + 9 \times 7^5 - 16 \times 7^4 + 17 \times 7^3 + k \times 7^2 - 6 \times 7 - 7 = 0$ ， $k =$ _____。

類題：

若 $2^6 - 3 \times 2^5 + 4 \times 2^4 - 6 \times 2^3 + k \times 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$ ，則 $k =$ _____。