

1-2 多項式與其加減運算

1 認識多項式

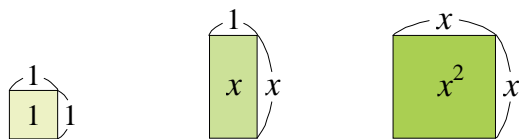
2 多項式的加減運算

主題 1 認識多項式

如下圖，小正方形的邊長為 1 單位，面積是 1 平方單位；

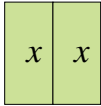
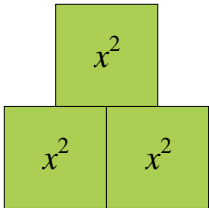
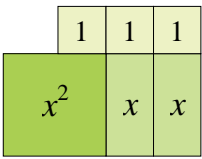
長方形的長為 x 單位、寬為 1 單位，面積是 x 平方單位；

大正方形的邊長為 x 單位，面積是 x^2 平方單位。



由上面三種形狀所組成的圖形，其面積可以用 1 、 x 、 x^2 的式子表示。

例如：

圖示	甲 	乙 	丙 
面積和	$2x$	$3x^2$	$x^2 + 2x + 3$

像 $2x$ 、 $3x^2$ 、 $x^2 + 2x + 3$ 這類由數和文字符號 x 進行加法與乘法運算所構成的式子，我們稱為 x 的多項式。

$$\text{因為 } \frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{2} \cdot x + (-3)$$

$$-x^2 = (-1) \cdot x \cdot x$$

$$4 = 0 \cdot x + 4$$

所以 $\frac{1}{2}x - 3$ 、 $-x^2$ 、 4 這一類的式子也是 x 的多項式。

但是當 x 出現在分母或是絕對值符號內時，例如： $\frac{1}{x-2}$ 、 $|x|$ ，這樣的式子就不是 x 的多項式。

Key point 多項式

由數和文字符號 x 進行加法與乘法運算所構成的式子，稱為 x 的多項式。

項、係數、次數

在多項式 $7x^2+x+5$ 中，加號(+)所隔開的每一部分： $7x^2$ 、 x 、 5 都稱為這個多項式的項。

$7x^2$ 稱為這個多項式的二次項(或 x^2 項)， 7 為二次項(或 x^2 項)的係數；

x 稱為這個多項式的一次項(或 x 項)， 1 為一次項(或 x 項)的係數，

5 稱為這個多項式的常數項(或零次項)。

當多項式含有減號時，例如 $5x^3-3x^2+1$ ，可以寫成 $5x^3+(-3)x^2+1$ ，因此， x^3 項的係數是 5 ； x^2 項的係數是 -3 ；常數項是 1 。多項式 $5x^3-3x^2+1$ 中沒有 x 項，我們可將此多項式的 x 項看成 $0 \cdot x$ ，因此 x 項的係數是 0 。

$$\begin{array}{ccccccc} & x^3 \text{ 項} & & x^2 \text{ 項} & & x \text{ 項} & \text{常數項} \\ 5x^3 - 3x^2 + 1 = & 5x^3 & + & (-3)x^2 & + & 0x & + & 1 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & x^3 \text{ 項係數} & & x^2 \text{ 項係數} & & x \text{ 項係數} & & \end{array}$$

在一個多項式中，係數不為 0 且次數最高的項稱為最高次項，而最高次項的次數稱為此多項式的次數。例如多項式 x^3+5x^2-x+1 的次數是 3 ，稱此多項式為 x 的三次多項式或三次式。同理， $-3x^2+4$ 的次數是 2 ，稱為 x 的二次多項式或二次式。

隨堂練習

下列多項式分別是幾次多項式？各項的係數是多少？完成下表。

多項式	$6x^3 + 3x^2 + 8x - 4$	$-x + x^2 - 4x^3 + 6$	$3 - x^2$
多項式的次數	三次	三次	二次
x^3 項係數	6	-4	0
x^2 項係數	3	1	-1
x 項係數	8	-1	0
常數項	-4	6	3

單項式、常數多項式

如果一個多項式只有單獨一項，則稱此多項式為單項式。

例如： $\frac{3}{4}x^2$ 、 $-2x$ 、 13 都是單項式。

如果單項式為常數項時，則稱此單項式為常數多項式。

例如： 13 、 $-\frac{1}{2}$ 、 0 都是常數多項式。

隨堂練習

若多項式 $(a-2)x^2 + (b+3)x + 7$ 是一個常數多項式，則 a 、 b 兩數的條件為何？

多項式 $(a-2)x^2 + (b+3)x + 7$ 是一個常數多項式

即 x^2 項與 x 項的係數都是 0

$$\text{得} \begin{cases} a-2=0 \\ b+3=0 \end{cases}, \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$$

主題 2 多項式的加減運算

升幂排列、降幂排列

在一個 x 的多項式中，我們習慣將各項按照 x 的次數大小來排列，次數由小到大的排列稱為**升幂排列**(或升次排列)；

次數由大到小的排列稱為**降幂排列**(或降次排列)。

例如： $3x^2 + 6x^3 - 4 + 8x$ ，按升幂排列为 $-4 + 8x + 3x^2 + 6x^3$ ；

按降幂排列为 $6x^3 + 3x^2 + 8x - 4$ 。

隨堂練習

將下列各多項式按照指定方式排列。

多項式	$3x + x^2 - 2$	$1 + 2x^3 - 4x$
升幂排列	$-2 + 3x + x^2$	$1 - 4x + 2x^3$
降幂排列	$x^2 + 3x - 2$	$2x^3 - 4x + 1$

同類項

文字符號及次數均相同的項稱為**同類項**，

例如：多項式 $3x + x^2 - 2 + 2x^2 + 1 - 4x$ 中，

x^2 和 $2x^2$ 是同類項；

$3x$ 和 $-4x$ 是同類項；

-2 和 1 是同類項。

隨堂練習

下列哪些式子是 x^2 的同類項？是的打「○」，不是的打「×」。

(○) (1) $\frac{5}{2}x^2$

(×) (2) $4x^3$

(○) (3) $-8x^2$

(×) (4) $-x$

多項式的加法

問題探索 透過圖像，探討多項式的加法運算

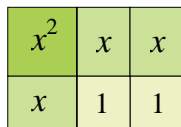


圖 1

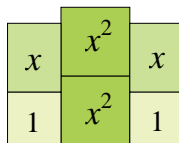


圖 2

圖 1 及圖 2 中各有數個面積為 x^2 的大正方形、面積為 x 的長方形和面積為 1 的小正方形磁磚。試回答下列問題：

- 分別將它們的個數填入下表，並將兩圖的面積以多項式表示。
- 如果將圖 1 和圖 2 合併計算，三種面積不同的磁磚個數各有幾個？合起來面積是多少？完成下表。

	面積為 x^2 的大正方形個數	面積為 x 的長方形個數	面積為1的小正方形個數	以多項式來表示該圖形面積
圖1	1	3	2	$x^2 + 3x + 2$
圖2	2	2	2	$2x^2 + 2x + 2$
兩圖合併	3	5	4	$3x^2 + 5x + 4$

由問題探索可知，圖 1 的面積為 $x^2 + 3x + 2$ ；

圖 2 的面積為 $2x^2 + 2x + 2$ ，

而合併後的面積為

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x + 2) + (2x^2 + 2x + 2) &= (1 + 2)x^2 + (3 + 2)x + (2 + 2) \\ &= 3x^2 + 5x + 4 \end{aligned}$$

可以發現：兩個多項式相加，就是將同類項合併計算(係數相加)。

例 1 多項式的加法 學習內容 A-8-3

計算 $(4x+5+2x^2)+(1+2x+x^2)$ 。

解 1 直式：首先把多項式按降冪排列：

$$4x+5+2x^2 \text{ 寫成 } 2x^2+4x+5$$

$$1+2x+x^2 \text{ 寫成 } x^2+2x+1$$

$$\begin{array}{r} 2x^2+4x+5 \\ +) \quad x^2+2x+1 \\ \hline 3x^2+6x+6 \end{array}$$

Hint

直式計算時也可以用升冪排列：

$$\begin{array}{r} 5+4x+2x^2 \\ +) \quad 1+2x+x^2 \\ \hline 6+6x+3x^2 \end{array}$$

解 2 橫式： $(4x+5+2x^2)+(1+2x+x^2)$

$$=4x+5+2x^2+1+2x+x^2$$

$$=(2+1)x^2+(4+2)x+(5+1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{同類項合併} \\ \leftarrow \end{array} \right\}$$

$$=3x^2+6x+6$$

例 1 的直式計算是將同類項對齊排列，然後同類項合併計算。一般而言，對齊排列的方法可以按升冪排列或降冪排列。在本書的例子中，都用降冪排列來計算，答案也以降冪排列呈現。

隨堂練習

計算下列各式。

(1) $(5x+3x^2+1)+(x^2+7x+5)$

$$5x+3x^2+1 \text{ 寫成 } 3x^2+5x+1$$

$$3x^2+5x+1$$

$$+) \quad x^2+7x+5$$

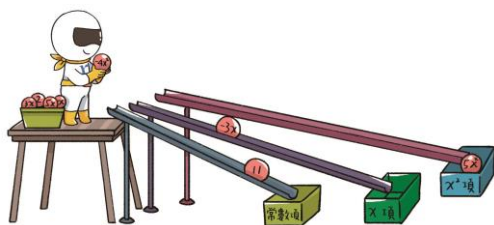
$$4x^2+12x+6$$

(2) $(3x-5+5x^2)+(6+2x^2-3x)$

$$=3x-5+5x^2+6+2x^2-3x$$

$$=(5+2)x^2+(3-3)x+(-5+6)$$

$$=7x^2+1$$



如果多項式中缺少某一項(簡稱缺項)，代表這項係數是 0，在直式計算時，缺項的部分會補上 0。

例 2 有缺項的多項式加法 學習內容 A-8-3

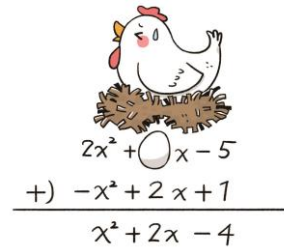
計算 $(-x^2 + 2x + 1) + (2x^2 - 5)$ 。

解 1 直式：

$$\begin{array}{r} -x^2 + 2x + 1 \\ +) \quad 2x^2 + 0x - 5 \\ \hline x^2 + 2x - 4 \end{array}$$

解 2 橫式：

$$\begin{aligned} & (-x^2 + 2x + 1) + (2x^2 - 5) \\ &= -x^2 + 2x + 1 + 2x^2 - 5 \\ &= (-1 + 2)x^2 + 2x + (1 - 5) \quad \leftarrow \text{同類項合併} \\ &= x^2 + 2x - 4 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 2x^2 + 0x - 5 \\ +) -x^2 + 2x + 1 \\ \hline x^2 + 2x - 4 \end{array}$$

隨堂練習

計算下列各式。

(1) $(5x - x^2) + (2x^2 - 3)$

$$\begin{aligned} & 5x - x^2 \text{ 寫成 } -x^2 + 5x \\ & \quad -x^2 + 5x + 0 \\ +) & \quad 2x^2 + 0x - 3 \\ \hline & x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

(2) $(4x - x^3 + 8) + (-2x^3 + 3x^2)$

$$\begin{aligned} &= 4x - x^3 + 8 - 2x^3 + 3x^2 \\ &= (-1 - 2)x^3 + 3x^2 + 4x + 8 \\ &= -3x^3 + 3x^2 + 4x + 8 \end{aligned}$$

多項式的減法

做多項式的減法與做多項式的加法類似，當兩個多項式相減時，就是將同類項合併計算(係數相減)，我們來看下面的例題。

例 3 多項式的減法 學習內容 A-8-3

計算 $(x^2+5x+1)-(2-3x^2-x)$ 。

解 1 直式：

$$\begin{array}{r} x^2+5x+1 \\ -) -3x^2-x+2 \\ \hline 4x^2+6x-1 \end{array}$$

解 2 橫式： $(x^2+5x+1)-(2-3x^2-x)$

$$=x^2+5x+1-2+3x^2+x$$

$$=(1+3)x^2+(5+1)x+(1-2)$$

$$=4x^2+6x-1$$

同類項合併

Hint

直式計算時也可以用升冪排列：

$$\begin{array}{r} 1+5x+x^2 \\ -) 2-x-3x^2 \\ \hline -1+6x+4x^2 \end{array}$$

對多項式加減法而言，不管用直式或橫式，算出來的結果是一樣的，因此計算時我們使用其中一種即可。

隨堂練習

計算下列各式。

(1) $(-x+1+2x^2)-(5x^2+4x-3)$

$-x+1+2x^2$ 寫成 $2x^2-x+1$

$$2x^2-x+1$$

$$-) 5x^2+4x-3$$

$$-3x^2-5x+4$$

(2) $(7-x^2)-(2x-4x^3+6)$

$$=7-x^2-2x+4x^3-6$$

$$=4x^3-x^2-2x+1$$

多項式的加減混合運算

例 4 多項式的加減混合運算 學習內容 A-8-3

計算 $(-3x^2-7+x)-[(1-2x^2)-(2x+6)]$ 。

$$\begin{aligned}\text{解 } & (-3x^2-7+x)-[(1-2x^2)-(2x+6)] \\ & = -3x^2-7+x-[1-2x^2-2x-6] \\ & = -3x^2-7+x-1+2x^2+2x+6 \\ & = (-3+2)x^2+(1+2)x+(-7-1+6) \\ & = -x^2+3x-2\end{aligned}$$

隨堂練習

計算 $(3x^2+6x-9)-(-3x^2+4x)+(-2x+3)$ 。

$$\begin{aligned}& (3x^2+6x-9)-(-3x^2+4x)+(-2x+3) \\ & = 3x^2+6x-9+3x^2-4x-2x+3 \\ & = (3+3)x^2+(6-4-2)x+(-9+3) \\ & = 6x^2-6\end{aligned}$$

例 5 多項式加減混合運算的應用 學習內容 A-8-3

若 A 是多項式，且 $A+(-4x^2+1+5x)=x^3+5-2x$ ，則多項式 $A=?$

$$\begin{aligned}\text{解 } & \text{由題目可知 } A=(x^3+5-2x)-(-4x^2+1+5x) \\ & = x^3+5-2x+4x^2-1-5x \\ & = x^3+4x^2-7x+4\end{aligned}$$

Hint

設 A 、 B 、 C 皆為多項式，
若 $A+B=C$ ，
則 $A=C-B$ 。

隨堂練習

若 B 是多項式，且 $B-(6x^3-2+x^2)=5x^2+11-3x$ ，則多項式 $B=?$

$$\begin{aligned}\text{由題目可知 } & B=(5x^2+11-3x)+(6x^3-2+x^2) \\ & = 5x^2+11-3x+6x^3-2+x^2 \\ & = 6x^3+6x^2-3x+9\end{aligned}$$

重點整理

1 多項式

由數和文字符號 x 進行加法與乘法運算所構成的式子，稱為 x 的多項式。

例 4 、 $2x$ 、 $3x^2$ 、 x^2+2x+3 是 x 的多項式。

2 項與係數

在 x 的多項式 ax^2+bx+c 中，二次項是 ax^2 ，其係數為 a ；

一次項是 bx ，其係數為 b ；常數項是 c 。

例 $7x^2+x+5$ 的二次項是 $7x^2$ ，其係數為 7 ；

一次項是 x ，其係數為 1 ；常數項是 5 。

3 多項式的次數

在一個多項式中，係數不為 0 且次數最高的項稱為最高次項，而最高次項的次數稱為此多項式的次數。

例 x^3+5x^2-x+1 的次數是 3 。

4 升幂排列與降幂排列

將 x 的多項式的各項按照 x 的次數由小到大排列，稱為升幂排列；

按照 x 的次數由大到小排列，稱為降幂排列。

例 將 $3x^2+6x^3-4+8x$ 按升幂排列為 $-4+8x+3x^2+6x^3$ ；

按降幂排列為 $6x^3+3x^2+8x-4$ 。

5 同類項

文字符號及次數均相同的項稱為同類項。

例 x^2 和 $-\frac{1}{3}x^2$ 是同類項； -2 和 1 是同類項。

6 多項式的加減運算

兩個多項式相加減時，就是將同類項合併計算(係數相加減)。

例 (1) $(4x+5+2x^2)+(1+2x+x^2)$
 $=4x+5+2x^2+1+2x+x^2$
 $=(2+1)x^2+(4+2)x+(5+1)$
 $=3x^2+6x+6$

(2) $(x^2+5x+1)-(2-3x^2-x)$
 $=x^2+5x+1-2+3x^2+x$
 $=(1+3)x^2+(5+1)x+(1-2)$
 $=4x^2+6x-1$

自我評量

1. 依照下列各式回答問題。

P.21~22 內文

(甲) x^3+x^2 (乙) $4x-1$ (丙) $-x^2-2x-1$ (丁) -7

(1) 哪一個是 x 的三次多項式？答： (甲) 。

(2) 哪一個是 x 的二次多項式？答： (丙) 。

(3) 哪一個是 x 的一次多項式？答： (乙) 。

(4) 哪一個是 x 的常數多項式？答： (丁) 。

2. 根據題目所給的多項式，完成下面表格。

P.22 上方隨堂、P.23 上方隨堂

多項式	$4x^2-2x^3+x+5$	$7-2x^2+5x$	$6x^2-12$
按升冪排列	$5+x+4x^2-2x^3$	$7+5x-2x^2$	$-12+6x^2$
多項式的次數	三次	二次	二次
x^2 項係數	4	-2	6
x 項係數	1	5	0
常數項	5	7	-12

3. 若多項式 $(a-3)x^2+(b+1)x+(c-2)$ 是 x 的一次多項式，則 $a \cdot b \cdot c$ 三個數的條件為何？

P.22 下方隨堂

多項式 $(a-3)x^2+(b+1)x+(c-2)$ 是 x 的一次多項式
即 x^2 項係數是0

$$\text{得} \begin{cases} a-3=0 \\ b+1 \neq 0 \\ c-2 \text{ 可為任意數} \end{cases}, \begin{cases} a=3 \\ b \neq -1 \\ c \text{ 為任意數} \end{cases}$$

4. 計算下列各式。

$$\begin{aligned} (1) & (5+2x^2+3x)+(-1+x^2+x) \\ & = 5+2x^2+3x-1+x^2+x \\ & = 3x^2+4x+4 \end{aligned}$$

P.25 例 1

$$\begin{aligned} (2) & (3+x^2)+(5x-3-3x^2) \\ & = 3+x^2+5x-3-3x^2 \\ & = -2x^2+5x \end{aligned}$$

P.26 例 2

$$\begin{aligned} (3) & (x^2-2+5x)-(2x+3x^2)+(4x^2-7) \\ & = x^2-2+5x-2x-3x^2+4x^2-7 \\ & = 2x^2+3x-9 \end{aligned}$$

P.28 例 4

$$\begin{aligned} (4) & (3x+4x^2+2)-[(2x-1+4x^2)+(2x^2+2x)] \\ & = 3x+4x^2+2-[2x-1+4x^2+2x^2+2x] \\ & = 3x+4x^2+2-[6x^2+4x-1] \\ & = 3x+4x^2+2-6x^2-4x+1 \\ & = -2x^2-x+3 \end{aligned}$$

P.28 例 4

5. 若多項式 A 與 $(-6x^3+7x^2-3x+9)$ 的和為 x^2+x-1 ，則多項式 A 為何？

P.28 例 5

$$A + (-6x^3 + 7x^2 - 3x + 9) = x^2 + x - 1$$

$$A = (x^2 + x - 1) - (-6x^3 + 7x^2 - 3x + 9)$$

$$= x^2 + x - 1 + 6x^3 - 7x^2 + 3x - 9$$

$$= 6x^3 - 6x^2 + 4x - 10$$

挑錯題

小妍和小翊以直式計算「 $(-2x^2+2x-8)-(x^2-3x+1)$ 」的過程如下。判斷他們的解法是否正確？若不正確，請標出錯誤的部分，並寫出正確的解法。

小妍：

$$\begin{array}{r} -2x^2 + 2x - 8 \\ -) \quad x^2 - 3x + 1 \\ \hline -3x^2 + 5x - 9 \end{array}$$

小翊：

$$\begin{array}{r} -2x^2 + 2x - 8 \\ -) \quad x^2 - 3x + 1 \\ \hline -3x^2 - x - 9 \end{array}$$

正確解法如小妍