1-1 數列

• 數列的意義　• 等差數列　• 等比數列　• 等差中項與等比中項

檢測概念

1.～2.
目的在檢驗學生是否具備基礎的數形觀察能力。

溫故啟思

1. 下圖是某學期安排的值日生輪值表，從 1 號開始依序輪值，已知這學期從 9 月 1 日開始每個星期一到星期五都有排值日生，而阿達的號碼為 23 號，則他第一次排到值日生的日期是星期＿五＿。（學生號碼從 1 號開始沒有跳號）

九月分月曆

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
			1 1號	2 2號	3 3號	4
5	6 4號	7 5號	8 6號	9 7號	10 8號	11
12	13 9號	14 10號	15 11號	16 12號	17 13號	18
19	20 14號	21 15號	22 16號	23 17號	24 18號	25

2. 用等長的火柴棒排成如下列的圖形，試完成下列的空格：

4 根	7 根	10 根	13 根

動畫 數列的意義

1 數列的意義

在日常生活中，常常可以看到數列的例子。例如：大樂透的開獎號碼，如右圖，依開獎順序為 34 , 38 , 42 , 17 , 22 , 6 , 20。

教學補給站

於 2013 年 2 月上映的電影「丈量世界」，內容講述數學家高斯與地理學家洪堡如何利用自己的方式來丈量世界。高斯從小天賦異稟，不出門就能計算世界有多大，而洪堡則是一步一腳印親身體驗周遭世界。高斯被認為是自牛頓以來最偉大的數學天才，洪堡則被稱為哥倫布第二，教師可推薦相關數學家相關電影供學生觀賞。

像 34 , 38 , 42 , 17 , 22 , 6 , 20 依序排成一列的數，我們稱為**數列**。數列中的每一個數稱為**項**，
第一個數稱為第 1 項（或首項），可記為 a_1；
第二個數稱為第 2 項，記為 a_2；
⋮
第 n 個數稱為第 n 項，記為 a_n。
而數列中的最後一項稱為末項。這個數列共有 7 項，即**項數** $n=7$。

再舉個例子，我們知道圓周率寫成小數形式記成 3.14159265358979……如果我們以第一個數字視為第一項，第二個數字視為第二項，可紀錄如下：

$$\begin{array}{ccccccccc} 3, & 1, & 4, & 1, & 5, & 9, & 2, & \cdots\cdots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \end{array}$$

其中第 1 項 $a_1=3$，第 2 項 $a_2=1$，……，第 7 項 $a_7=2$。

① 教學提醒

1. 引進代數符號，描述數列的項，讓學生感受到使用符號的便利性，而非強記。
2. 理解數列的概念與名詞。

② 教學提醒

藉由圓周率的數列沒有規律性，強調數列不一定有規律性。

隨堂練習

某田徑隊有十名隊員，他們做了一個百米賽跑的檢測，檢測結果依檢測先後順序記錄成一數列如下：

12 , 13 , 12.1 , 12.8 , 14.5 , 14 , 12.7 , 15.6 , 14.9 , 14

則此數列項數 $n=$＿10＿，$a_1=$＿12＿，$a_2=$＿13＿，$a_{10}=$＿14＿。

某些數列的排列會有規律性，例如溫故啟思 2，我們把每一個圖所用到的火柴棒數量記錄下來，分別為 4 , 7 , 10 , 13，這一連串的火柴棒排法蘊含了一種特別的規律性，也反映在這一個數列中，我們可藉其規律性，找出數列中的其他項。

例 1 找出數列的規律

教學提醒 ①
引導從已知的項數觀察數列的規律，再找出空格中的數。

觀察下列數列的規律，並在空格中填入適當的數：

(1) 11 , 13 , 15 , ______ , 19。

(2) 17 , 12 , 7 , ______ , −3 , ______ , −13。

(3) 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ______ , 128 , ______。

解 (1) 觀察數列 11 , 13 , 15 , ______ , 19，
可發現從第 2 項起，各項均比前一項多 2，
所以接下來的數應為 __17__ , 19。
故空格中填入的數為 17。

(2) 觀察數列 17 , 12 , 7 , ______ , −3 , ______ , −13，
可發現從第 2 項起，各項均比前一項少 5，
所以接下來的數應為 __2__ , −3 , __−8__。
故空格中填入的數依序為 2、−8。

(3) 觀察數列 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ______ , 128 , ______，
可發現從第 2 項起，各項均為前一項的 2 倍，
所以接下來的數應為 __64__ , 128 , __256__。
故空格中填入的數依序為 64、256。

教學提醒 ②
觀察數列的規律不應只單憑幾項就決定，必須多觀察幾項才下結論。

隨堂練習

觀察下列數列的規律，並在空格中填入適當的數：

(1) 6 , 12 , 18 , __24__ , 30 , __36__ , 42。

(2) 10 , 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , __4__ , 3。

(3) 1 , 4 , 9 , 16 , 25, __36__ , 49, 64。

類題演練 配合例題 1

觀察下列數列的規律，並在空格中填入適當的數：

(1) 16 , 11 , 6 , 1 , __−4__ , __−9__ , −14。

(2) 8 , __11__ , 14 , 17 , 20 , 23 , __26__ , 29。

大考試題

小明在一本有一千頁的書中，從第 1 頁開始，逐頁依順序在第 1 頁寫 1，第 2 頁寫 2、3，第 3 頁寫 3、4、5，⋯，依此規則，即第 n 頁從 n 開始，寫 n 個連續正整數。求他第一次寫出數字 1000 是在第幾頁？

(A) 500　(B) 501　(C) 999　(D) 1000

《100.基測(二)》第 19 題

解▶ (B)。

探索活動

數列的規律

在網路上出現過一個問題：

「已知一個數列的前 3 項為 1 , 2 , 4，你覺得第 4 項會是什麼呢？」

香香認為答案是 8，小可認為答案是 7，你認為他們的答案合理嗎？

他們是如何推得答案的呢？兩人的想法都合理。

香香的想法

$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8$

小可的想法

$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+3} 7$

例 2 連續偶數的數列

教學提醒 ③
讓學生察覺該數列的規律性後，透過歸納法寫出一般項。

某個運動中心有個雙層置物櫃，上面都有編號，而下排的號碼形成一個連續偶數的數列：

2 , 4 , 6 , ⋯⋯ , 200 , 202

(1) 寫出第 1 項 a_1、第 2 項 a_2、第 6 項 a_6。

(2) 寫出第 n 項 a_n。(用 n 來表示)

(3) 寫出第 50 項 a_{50}。

解 (1) 觀察數列可發現 $a_1=2$，$a_2=4$，$a_6=12$。

(2) 因為編號是連續偶數，
所以 $a_1=2\times1$，$a_2=2\times2$，$a_3=2\times3$，可推知第 n 項 $a_n=2n$。

(3) 因為第 n 項 $a_n=2n$，當 $n=50$ 時，$a_{50}=2\times50=100$。

在例題 2 中，數列的第 n 項可表示成 $2n$，我們稱此數列的**一般項**為 $2n$。

概念澄清
a_i 的 i 表示足碼 (*index*)，數列中 a_n 表示第 n 項，提醒學生別把 a_n 與 an 或 a^n 搞混，其意義是不同的。

隨堂練習

設某數列的一般項 $a_n=2n-1$，則 $a_1=$ __1__ ，$a_2=$ __3__ ，$a_{10}=$ __19__ 。

類題演練 配合例題 2

某電影院座位排列如右圖，為了慶祝週年慶舉辦免費贈票活動，依照現場排隊序號，依序從 A-1、B-1、C-1、⋯⋯ 至 E-1，再由 A-2、B-2、⋯⋯ 發放座號。已知嘉昌排第 43 個，則拿到的座位編號為 __C-9__ 。

	1	2	⋯⋯
A	A-1	A-2	⋯⋯
B	B-1	B-2	⋯⋯
C	C-1	C-2	⋯⋯
D	D-1	D-2	⋯⋯
E	E-1	E-2	⋯⋯

延伸演練

設數列的一般項 $a_n=(-1)^n(4n-9)$，則 $a_{50}+a_{51}$ 的值為多少？

(A) 4　(B) −4
(C) 386　(D) −386

解▶ (B)。

關於數列的規律，我們還可以去檢視某些分數化成小數的情形，譬如 $\frac{1}{3}$ 寫成小數為 0.3333333……，將小數點後的每一位數作為數列，令小數點後第 n 位為 a_n，則 $a_1=3$，$a_2=3$，$a_3=3$……，此數列的一般項 $a_n=3$。

例 3 求數列的第 n 項

計算機按法請參考附錄

將分數 $\frac{26}{111}$ 化成小數，得到 $\frac{26}{111}=0.234234$ ……。請問：

(1) 小數點後第 7 位數字為何？

(2) 小數點後第 27 位數字為何？小數點後第 37 位數字為何？

解 (1) 用計算機計算後可看出小數點後第 7 位數字為 2，而且可以觀察到小數點後的數字 2，3，4，2，3，4，……，「2，3，4」這一組數字一直重複循環出現。

(2) 將小數點以後的數字依序排成數列 2，3，4，2，3，4，……，

因為 $27\div3=9\ ...\ 0$

$37\div3=12\ ...\ 1$

所以 $a_{27}=a_3=4$，$a_{37}=a_1=2$。

故小數點後第 27 位數字為 4，小數點後第 37 位數字為 2。

教學提醒 ①

此數列是週期數列（週期為 3），可藉此介紹循環小數的名詞及表示法，但並非本節的教學重點。

隨堂練習

已知 $\frac{412}{999}=0.412412$……，將小數點以後的數字依序排成數列 4，1，2，4，1，2，……，求小數點後第 60 位數字。

$60\div3=20\ ...\ 0$，

故第 60 位數字＝第 3 位數字＝2。

類題演練 配合例題 3

1. 已知 $\frac{1}{11}=0.0909$……，將小數點以後的數字依序排成數列 0、9、0、9、……，求數列的第 205 項及第 190 項。解▶ 第 205 項＝0，第 190 項＝9。

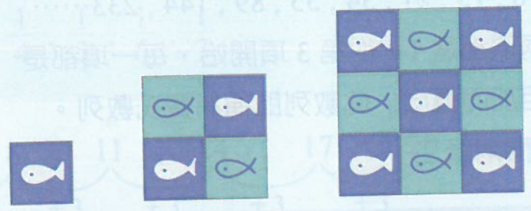
2. 已知 $\frac{4}{37}=0.108108$……，將小數點以後的數字依序排成數列 1、0、8、1、0、8、……，求數列的第 96 項、第 2008 項。解▶ 第 96 項＝8，第 2008 項＝1。

例 4 圖形的規律

阿達拿了一堆正方形地墊要鋪在廣場。第一次放 1 片地墊，如圖(一)；

第二次放 4 片地墊，排出一個大正方形，如圖(二)；

第三次放 9 片地墊，排出一個大正方形，如圖(三)；……。



圖(一)　圖(二)　圖(三)

阿達每次鋪的時候，每邊的地墊數都比前一次多一片，若將每次排出圖形的地墊個數，依序排成一個數列，求此數列的第 4 項 a_4 及第 10 項 a_{10}。

解 由圖可知，排出的圖形中，每邊的地墊數依序為 1 片、2 片、3 片，

因此 $a_1=1$，$a_2=2^2=4$，$a_3=3^2=9$。

觀察前三項後，可發現之後的圖(四)、圖(十)的圖形每邊各有 4 片、10 片地墊，

因此第 4 項 $a_4=4^2=16$，第 10 項 $a_{10}=10^2=100$。

② 教學提醒

讓學生自己去發現圖形的規律，再設法解決問題，請勿直接以告知的方式教學。

隨堂練習

承例題 4，如果每一片地墊的邊長為 1 單位，則圖(一)的周長為 4 單位，將這些圖的周長依序寫成數列，求此數列的第 4 項 a_4、第 10 項 a_{10} 及第 n 項 a_n。

$a_4=16$，$a_{10}=40$，$a_n=4n$

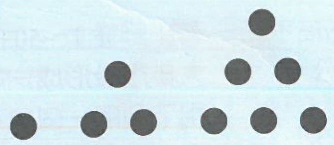
教學小幫手

可搭配：
習作 P 2～3
習題 1～3。

類題演練 配合例題 4

如右圖，試問圖(五)、圖(六)的黑點分別有多少個？

解▶ 圖(五)有 15 個黑點，圖(六)有 21 個黑點。



圖(一)　圖(二)　圖(三)

教學補給站

觀察連續奇數的和，可得以下規律：

$1+3=4=2^2$

$1+3+5=9=3^2$

$1+3+5+7=16=4^2$

$1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$

數養時光機 費氏數列

義大利數學家費波那契（*Leonardo Pisano*，別名 *Fibonacci*，西元 1170～1250）在他的著作《計算書》中，曾提出兔子的繁殖問題，他設定出一種生長規則，去探討兔子每一個月會生長成幾對，記錄成數列如下：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233……

這個數列的前兩項都是 1，從第 3 項開始，每一項都是由之前的兩數相加而得出，此數列即稱為費氏數列。

（相關延伸請參閱附錄二）

動畫 等差數列

2 等差數列

生活中常常出現有規律的數列，譬如球鞋尺寸，以美制（*US*）來看，男鞋的尺碼由小到大依序為

6，6.5，7，7.5，……，12.5，13

我們可以觀察到上面數列後項減前項的差都是 0.5。

尺寸表 男鞋

US	Eure	CM
6	38.5	24
6.5	39	24.5
7	40	25
7.5	40.5	25.5
8	41	26
8.5	42	26.5
9	42.5	27
9.5	43	27.5
10	44	28
10.5	44.5	28.5
11	45	29
11.5	45.5	29.5
12	46	30
12.5	47	30.5
13	47.5	31

一般而言，如果數列中的任意相鄰兩項，後項減前項的差都相同，那麼這個數列稱為**等差數列**，而這個差稱為此數列的**公差**，公差通常用小寫字母 d 表示，亦即 $a_{n+1}-a_n=d$。例如上面數列的公差 $d=0.5$。

也可以說，每一項（a_n）加上公差（d）即為下一項（a_{n+1}）的值，寫成 $\boldsymbol{a_{n+1}=a_n+d}$。

家庭

教學提醒 1

用生活中的實例引進等差數列，讓學生感受等差數列的涵義，並知道「公差＝後項－前項」。

教學補給站

等差數列（即算術數列）英文為 *arithmetic progression*（*sequence*），簡寫為 *A.P.*。公差的英文為 *common difference*。

大考試題

若小舒從 1～50 的整數中挑選 4 個數，使其由小到大排序後形成一等差數列，且 4 個數中最小的是 7，則下列哪一個數不可能出現在小舒挑選的數之中？

(A) 20　(B) 25　(C) 30　(D) 35

解▶(C)。

《107.會考》第 16 題

例 5 認識等差數列

判斷下列數列是否為等差數列。如果是，求出其公差。

(1) 2，5，8，11，14，17，20

(2) 3，3，3，3，3，3，3

(3) $\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{7}$

教學提醒 2

判別等差數列與否，即是要判斷該數列中的後項－前項的差是否皆相等。提醒學生公差 d 可以為正數、負數或 0。

解

(1) $2\ ,\ 5\ ,\ 8\ ,\ 11\ ,\ 14\ ,\ 17\ ,\ 20$ （相鄰兩項之差：$+3$，$+3$，$+3$，$+3$，$+3$，$+3$）

因為後項減前項的差皆為 3，所以是等差數列，公差 $d=3$。

$a_{n+1}-a_n=5-2$
$=8-5=11-8$
$=\cdots\cdots=3$

(2) $3\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ 3$ （相鄰兩項之差：$+0$，$+0$，$+0$，$+0$，$+0$，$+0$）

因為後項減前項的差皆為 0，所以是等差數列，公差 $d=0$。

(3) $\frac{1}{1}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ \frac{1}{6}\ ,\ \frac{1}{7}$ （相鄰兩項之差：$-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{6}$）

因為後項減前項的差不相等，所以不是等差數列。

隨堂練習

判斷下列數列是否為等差數列。如果是，求出其公差。

(1) 0，5，10，15，20，25，30

是，公差 $d=5$。

(2) 1，2，1，2，1，2，1，2

不是。

(3) 5，3，1，－1，－3，－5，－7

是，公差 $d=-2$。

類題演練 配合例題 5

判斷下列數列是否為等差數列。如果是，求出其公差。

(1) 0，1，0，1，0，1，0，1　解▶不是。

(2) 11，18，25，32，39，46，53　解▶是，公差＝7。

(3) 1，2，4，8，16，32　解▶不是。

大考試題

下列選項中的數列，哪一個不是等差數列？

(A) $1\frac{1}{7}$，$2\frac{1}{7}$，$3\frac{1}{7}$，$4\frac{1}{7}$　(B) $1\frac{1}{7}$，$2\frac{2}{7}$，$3\frac{3}{7}$，$4\frac{4}{7}$

(C) $1\frac{3}{7}$，$2\frac{4}{7}$，$4\frac{5}{7}$，$5\frac{6}{7}$　(D) $1\frac{2}{7}$，$2\frac{4}{7}$，$3\frac{6}{7}$，$5\frac{1}{7}$

解▶(C)。

《110.會考(二)》第 7 題

例 6 完成等差數列

在下列空格中填入適當的數，使各數列成為等差數列：

(1) $5, 4\frac{1}{2}, 4$, ______ , ______ , $2\frac{1}{2}$。

(2) ______ , 12 , 19 , ______ , 33。

(3) $a+5$, ______ , ______ , $a-10$, $a-15$。

解

(1) 公差 $d=4\frac{1}{2}-5=-\frac{1}{2}$，

$4+(-\frac{1}{2})=3\frac{1}{2}$，$3\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})=3$，

$5, 4\frac{1}{2}, 4$, $\underline{3\frac{1}{2}}$, $\underline{3}$, $2\frac{1}{2}$

成等差數列。

(2) 公差 $d=19-12=7$，

$12-7=5$，$19+7=26$，

$\underline{5}$, 12 , 19 , $\underline{26}$, 33 成等差數列。

(3) 公差 $d=(a-15)-(a-10)=-5$，

$(a+5)+(-5)=a$，$a+(-5)=a-5$，

$a+5$, $\underline{a}$, $\underline{a-5}$, $a-10$, $a-15$ 成等差數列。

由 $a_{n+1}=a_n+d$

$a_4=a_3+(-\frac{1}{2})$

$=4+(-\frac{1}{2})=3\frac{1}{2}$

隨堂練習

在下列空格中填入適當的數，使各數列成為等差數列：

(1) 64 , $\underline{49}$, 34 , $\underline{19}$, 4 , -11。

(2) $\underline{0}$, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $\underline{3\sqrt{3}}$, $4\sqrt{3}$, $\underline{5\sqrt{3}}$。

(3) b , $b+3$, $\underline{b+6}$, $b+9$, $\underline{b+12}$。

類題演練 配合例題 6

在下列空格中填入適當的數，使各數列成為等差數列：

(1) 4 , 0 , $\underline{-4}$, $\underline{-8}$, $\underline{-12}$。

(2) $a+d$, $a+3d$, $\underline{a+5d}$, $\underline{a+7d}$, $\underline{a+9d}$。

(3) $\underline{-8}$, -3 , 2 , $\underline{7}$, $\underline{12}$。

(4) $\underline{-2}$, $\underline{-2}$, -2 , -2 , $\underline{-2}$。

探索活動

找出等差數列的每一項

如果知道一個等差數列的首項 a_1 及公差 d，那麼依據等差數列的定義，就能求出該數列的任何一項。

例如：一等差數列的 $a_1=7$，$d=2$。

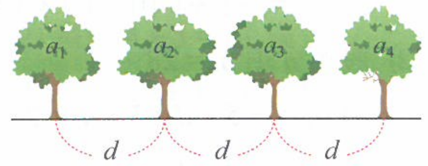
(1) 寫出此數列的前五項：

$\underline{7}$, $\underline{9}$, $\underline{11}$, $\underline{13}$, $\underline{15}$。

(2) $a_2=7+\underline{1}\times 2$

$a_3=7+\underline{2}\times 2$

$a_4=7+\underline{3}\times 2$



(3) $a_{100}=7+\underline{99}\times 2$。

$a_{100}=7+99\times 2$

從上面的探索活動，可得 $a_{100}=7+(100-1)\times 2$，

即第 n 項＝首項＋(項數 $n-1$)×公差

$$\underbrace{\underbrace{a_1 , a_2}_{d} , \underbrace{a_3}_{d} , \underbrace{a_4}_{d} , \cdots\cdots , a_n}_{(n-1)\times d}$$

由此可知：

等差數列第 n 項

若等差數列的首項為 a_1，公差為 d，則第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)d$。

1 教學提醒

透過首項及公差，讓學生以實例列出前 n 項，可為之後的第 n 項推導做伏筆。

2 教學提醒

教師可利用手指與指縫數來說明等差數列項數與公差數的關係。

教學補給站

等差數列：1 , 2 , □ , □ , 5 (猜成語)

解▶ 丟三落四。