1-2 比例線段

1 平行線截比例線段性質
2 平行線截比例線段性質的應用

主題 1 平行線截比例線段性質

三角形底邊與面積的關係

1 在此正式的說明「同底等高的三角形面積相等」，並作為平行線截比例線段性質的引理。

我們知道三角形的面積＝$\dfrac{底\times高}{2}$，

因此**當兩個三角形同底等高時，這兩個三角形的面積會相等**。

如圖 1，已知 $\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，

因為△ABC 和△DBC 有相等的高（$\overline{AP}=\overline{DQ}$），

又對應的底邊相同（$\overline{BC}$），

所以△ABC 面積＝△DBC 面積。

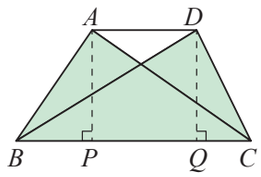


圖 1

那麼**當兩個三角形的高相等而底不相等時，這兩個三角形的面積和底邊有什麼關係呢？**

如圖 2，B、C、D、E 四點在同一直線上，

且 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$。

$\overline{AE}$ 是△ABD 與△ADC 的高，

所以△ABD 面積：△ADC 面積

$=\dfrac{\overline{BD}\times\overline{AE}}{2}:\dfrac{\overline{CD}\times\overline{AE}}{2}$

$=\overline{BD}:\overline{CD}$。

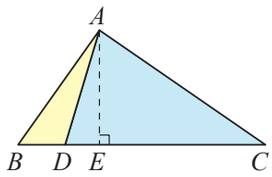


圖 2

由上述可知：

Key point 三角形面積與底邊的關係

若兩個三角形的高相等，則這兩個三角形的面積比＝對應底邊的比。

學習內容

S-9-3 **平行線截比例線段**：連接三角形兩邊中點的線段必平行於第三邊（其長度等於第三邊的一半）；平行線截比例線段性質；利用截線段成比例判定兩直線平行；平行線截比例線段性質的應用。

新綱異動 ＋新增或搬移；－刪除或搬移

－坐標平面上線段的中點坐標	根據審查意見刪除綱要中未提及之幾何內容和性質。

例 1

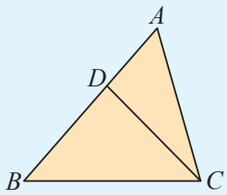
◆搭配習作 P.6 第 1 題

三角形底邊與面積的關係 學習內容 S-9-3

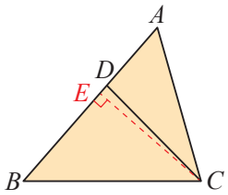
如右圖，△ABC 中，D 為 $\overline{AB}$ 上一點，且 $\overline{AD}=3$、$\overline{DB}=5$，則：

(1) △ADC 面積：△DBC 面積＝？

(2) △DBC 面積：△ABC 面積＝？



解 通過 C 點作 $\overline{AB}$ 的高 $\overline{CE}$，



(1) $\overline{CE}$ 是△ADC 與△DBC 的高，

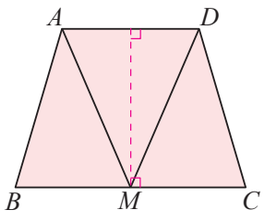
∴△ADC 面積：△DBC 面積＝$\overline{AD}$：$\overline{DB}$＝3：5。

(2) $\overline{CE}$ 是△DBC 與△ABC 的高，

∴△DBC 面積：△ABC 面積＝$\overline{DB}$：$\overline{AB}$＝5：(3＋5)＝5：8。

隨堂練習

如右圖，在梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}$ // $\overline{BC}$，且 $\overline{AD}=7$、$\overline{BC}=12$。若 M 為 $\overline{BC}$ 的中點，則△ABM 面積：△AMD 面積：△DMC 面積為何？



由 $\overline{BC}=12$、M 為 $\overline{BC}$ 的中點，得 $\overline{BM}=\overline{MC}=6$

又 $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$

∴△ABM、△AMD、△DMC 有相等的高

故△ABM 面積：△AMD 面積：△DMC 面積

＝$\overline{BM}$：$\overline{AD}$：$\overline{MC}$

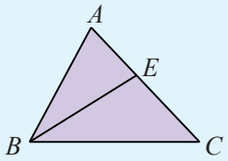
＝6：7：6

我們在第四冊已經學過利用簡單的推理方式，去驗證一些幾何性質。接下來，我們將以觀察、測量加上推理的方式來探討本章的性質。

重新布題

如右圖，△ABC 中，$\overline{AE}$：$\overline{EC}$＝5：7，則△BEC 的面積：△BAC 的面積＝？

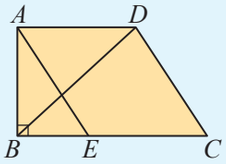
答：7：12



重新布題

如右圖，在梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}$ // $\overline{BC}$，$\overline{AE}$ // $\overline{DC}$，且∠B＝90°，若 $\overline{AD}=5$、$\overline{BC}=8$，則△ABE 面積：△DBC 面積為何？

答：3：8



平行線截比例線段性質

性質證明
《可搭配附錄 P.VII 補充》

1 利用距離相等的平行線，來說明平行線截比例線段性質，並利用比例式的運算，推出其他線段的比例關係。

問題探索 平行線截比例線段① —1—

如圖 3，已知筆記本上相鄰格線皆是距離相等的平行線，小妍在筆記本上畫了△ABC，試回答下列問題。

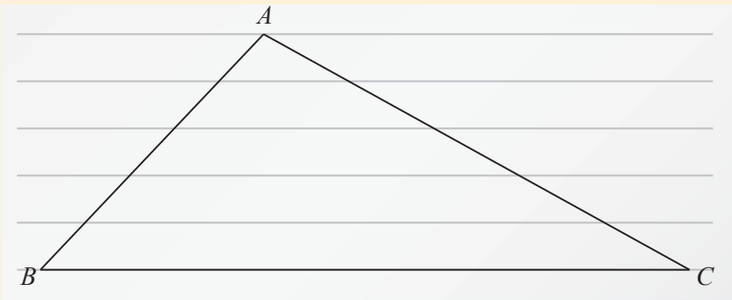


圖 3

(1) $\overline{AB}$ 被格線分成五條線段，量量看，這五條線段的長度是否相同？
是，皆為 1 公分

(2) $\overline{AC}$ 被格線分成五條線段，量量看，這五條線段的長度是否相同？
是，皆為 1.5 公分

(3) 如圖 4，若有一條格線與 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 分別交於 D、E 兩點，則 $\overline{AD}:\overline{DB}$ 與 $\overline{AE}:\overline{EC}$ 是否相等？

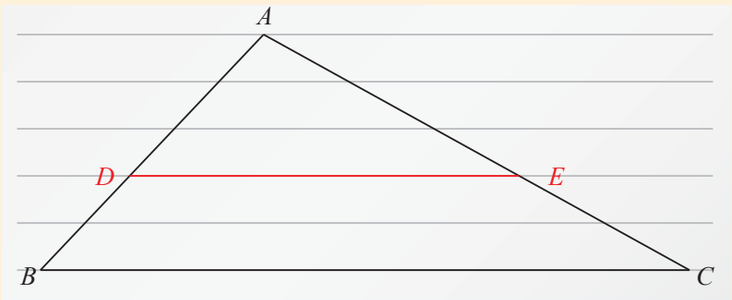


圖 4

是。
$\overline{AD}:\overline{DB}=3:2$
$\overline{AE}:\overline{EC}=4.5:3=3:2$
$\therefore \overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}=3:2$

(4) $\overline{AD}:\overline{AB}$ 與 $\overline{AE}:\overline{AC}$ 是否相等？

是。

$\overline{AD}:\overline{AB}=3:5$

$\overline{AE}:\overline{AC}=4.5:7.5=3:5$

$\therefore \overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$

(5) $\overline{DB}:\overline{AB}$ 與 $\overline{EC}:\overline{AC}$ 是否相等？

是。

$\overline{DB}:\overline{AB}=2:5$

$\overline{EC}:\overline{AC}=3:7.5=2:5$

$\therefore \overline{DB}:\overline{AB}=\overline{EC}:\overline{AC}$

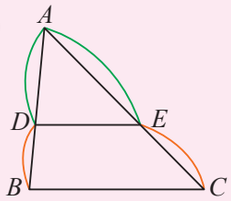
由問題探索可知 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$、$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$、$\overline{DB}:\overline{AB}=\overline{EC}:\overline{AC}$，像這樣成比例的線段，就稱為**比例線段**。當一條直線平行於三角形的一邊，且與另外兩邊相交，此直線會把三角形的兩邊截成比例線段，就稱這個性質為**平行線截比例線段性質**。

Key point

平行線截比例線段性質①

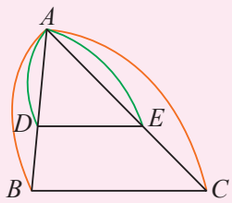
$\triangle ABC$ 中，若 D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{DE} // \overline{BC}$，則：

(1)



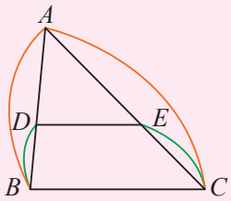
$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$

(2)



$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$

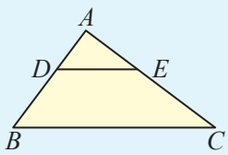
(3)



$\overline{DB}:\overline{AB}=\overline{EC}:\overline{AC}$

重新布題

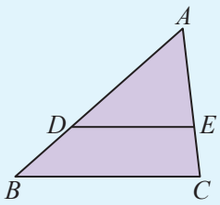
如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{DE} // \overline{BC}$，若 $\overline{AD}=2$ 公分，$\overline{BD}=3$ 公分，$\overline{CE}=4$ 公分，則 $\overline{AE}$ 為多少公分？



答：$\frac{8}{3}$ 公分

重新布題

如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{DE} // \overline{BC}$，若 $\overline{AD}=6$，$\overline{AB}=9$，$\overline{CE}=2$，則 $\overline{AE}$ 為多少？



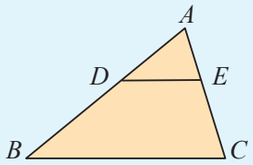
答：4

例 2

◆搭配習作
P.6 第 2 題
P.7 第 3 題

平行線截比例線段性質① 學習內容 S-9-3

如右圖，△ABC 中，D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$。若 $\overline{AD}=6$、$\overline{DB}=9$、$\overline{AE}=4$，則 $\overline{EC}$ 的長度為何？



解 ∵$\overline{DE}$ // $\overline{BC}$，∴$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$，

$6:9=4:\overline{EC}$，

$6\overline{EC}=36$，得 $\overline{EC}=6$。

隨堂練習

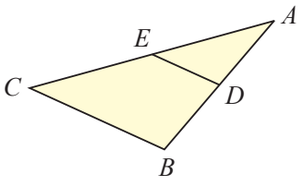
如右圖，△ABC 中，D 點在 $\overline{AB}$ 上，過 D 點作 $\overline{BC}$ 的平行線，交 $\overline{AC}$ 於 E 點，若 $\overline{AB}=12$ 公分、$\overline{AC}=18$ 公分、$\overline{AD}=6$ 公分，則 $\overline{AE}$、$\overline{EC}$ 分別為多少公分？

∵$\overline{DE}$ // $\overline{BC}$，∴$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$

$6:12=\overline{AE}:18$

$12\overline{AE}=108$，得 $\overline{AE}=9$（公分）

$\overline{EC}=\overline{AC}-\overline{AE}=18-9=9$（公分）



性質證明

《可搭配附錄 P.VII 補充》

問題探索 平行線截比例線段②

將第 22 頁圖 3 中的 $\overline{AB}$ 與格線的交點依序標記為 D_1、D_2、D_3、D_4；$\overline{AC}$ 與格線的交點依序標記為 E_1、E_2、E_3、E_4，如圖 5 所示。試回答下列問題。

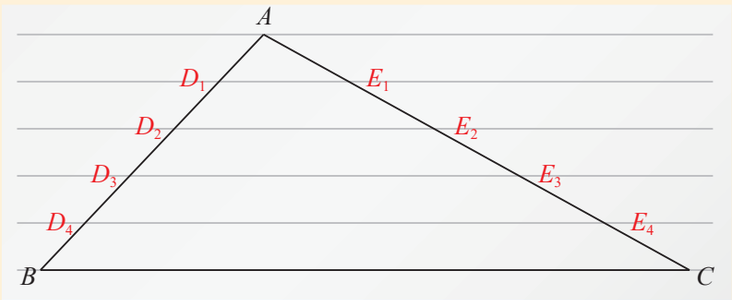
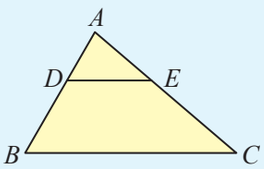


圖 5

重新布題

如右圖，在△ABC 中，$\overline{DE}$ // $\overline{BC}$，若 $\overline{AD}=4$ 公分，$\overline{BD}=6$ 公分，$\overline{CE}=8$ 公分，則 $\overline{AC}$ 為多少公分？

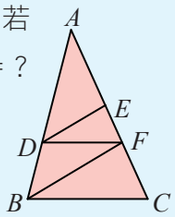
答：$\frac{40}{3}$ 公分



重新布題

如右圖，$\overline{DE}$ // $\overline{BF}$，$\overline{DF}$ // $\overline{BC}$。若 $\overline{AD}:\overline{BD}=3:1$，則 $\overline{EF}:\overline{AC}=$？

答：3：16



(1) 量量看，$\overline{BC}$ 為多少公分？

10 公分

(2) 量量看，$\overline{D_1E_1}$、$\overline{D_2E_2}$、$\overline{D_3E_3}$、$\overline{D_4E_4}$ 分別為多少公分？

$\overline{D_1E_1}=2$ 公分，$\overline{D_2E_2}=4$ 公分
$\overline{D_3E_3}=6$ 公分，$\overline{D_4E_4}=8$ 公分

(3) $\overline{D_1E_1}:\overline{BC}$ 與 $\overline{AD_1}:\overline{AB}$ 是否相等？

是。
$\overline{D_1E_1}:\overline{BC}=2:10=1:5$
$\overline{AD_1}:\overline{AB}=1:5$
$\therefore \overline{D_1E_1}:\overline{BC}=\overline{AD_1}:\overline{AB}=1:5$

(4) $\overline{D_2E_2}:\overline{BC}$ 與 $\overline{AD_2}:\overline{AB}$、
$\overline{D_3E_3}:\overline{BC}$ 與 $\overline{AD_3}:\overline{AB}$、
$\overline{D_4E_4}:\overline{BC}$ 與 $\overline{AD_4}:\overline{AB}$ 是否都會相等？

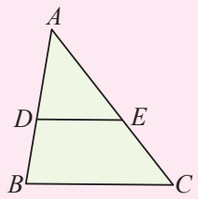
是。
$\overline{D_2E_2}:\overline{BC}=\overline{AD_2}:\overline{AB}=2:5$
$\overline{D_3E_3}:\overline{BC}=\overline{AD_3}:\overline{AB}=3:5$
$\overline{D_4E_4}:\overline{BC}=\overline{AD_4}:\overline{AB}=4:5$

由上面問題探索可知，當一條直線平行於三角形的一邊，且與另外兩邊相交時，還可以得到另一個平行線截比例線段性質：

Key point

平行線截比例線段性質②

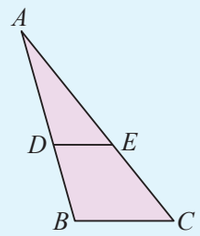
$\triangle ABC$ 中，若 D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$，則 $\overline{DE}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{AB}$。



例 3 平行線截比例線段性質② 學習內容 S-9-3

◆搭配習作 P.6 第 2 題 P.7 第 3 題

如右圖，△ABC 中，D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$。已知 $\overline{DE}=3$，$\overline{DB}=4$，$\overline{BC}=5$，則 $\overline{AD}$ 長度為何？



解 設 $\overline{AD}=x$，

$\because \overline{DE}$ // $\overline{BC}$，$\therefore \overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$，

$x:(x+4)=3:5$，

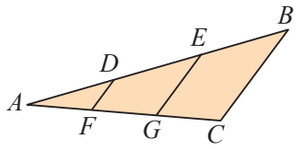
$3x+12=5x$，$2x=12$，$x=6$，

故 $\overline{AD}=6$。

1 教師可適時補充另一種解法：
$\overline{DF}:\overline{EG}:\overline{BC}$
$=\overline{AD}:\overline{AE}:\overline{AB}$
$=1:2:3$
得 $\overline{DF}=\frac{1}{3}\overline{BC}=4$，
$\overline{EG}=\frac{2}{3}\overline{BC}=8$。

隨堂練習 1

如右圖，△ABC 中，已知 D、E 兩點把 $\overline{AB}$ 分成三等分，且 F、G 兩點在 $\overline{AC}$ 上。若 $\overline{DF}$ // $\overline{EG}$ // $\overline{BC}$，$\overline{BC}=12$，則 $\overline{DF}$、$\overline{EG}$ 的長度各為何？



$\because D$、E 兩點把 $\overline{AB}$ 分成三等分

$\therefore \overline{AD}:\overline{AE}:\overline{AB}=1:2:3$

又 $\overline{DF}$ // $\overline{EG}$ // $\overline{BC}$，且 $\overline{BC}=12$

因此 $\overline{DF}:12=\overline{AD}:\overline{AB}=1:3$，得 $\overline{DF}=4$

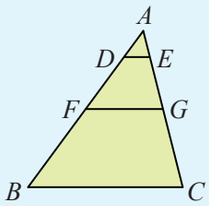
$\overline{EG}:12=\overline{AE}:\overline{AB}=2:3$，得 $\overline{EG}=8$

在前面我們提到，若一條直線平行於三角形的一邊，且與另外兩邊相交，則此直線會把三角形的兩邊截成比例線段。那麼**如果有一條直線將三角形的兩邊截成比例線段，這條直線會與三角形的第三邊平行嗎？**

重新布題

如右圖，△ABC 中，$\overline{DE}$ // $\overline{FG}$ // $\overline{BC}$，且 $\overline{AD}:\overline{DF}:\overline{BF}=1:2:3$。若 $\overline{BC}=30$，則 $\overline{FG}=$？

答：15



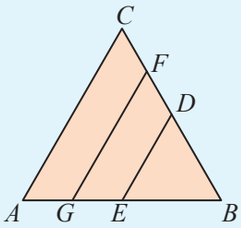
重新布題

如右圖，在△ABC 中，$\overline{DE}$ // $\overline{FG}$ // $\overline{CA}$，若 $\overline{BD}=2\overline{FD}=2\overline{CF}$，則 $\overline{DE}:\overline{FG}:\overline{CA}=$？

(A) 1：2：2　(B) 2：3：3

(C) 2：3：4　(D) 2：3：5

答：(C)



2 這是平行線截比例線段性質的逆敘述，由成比例的線段推得 $\overline{DE} // \overline{BC}$。

問題探索 利用截比例線段判斷平行《可搭配附件 1 操作》 2

如圖 6，在△ABC 中，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上分別有 D、E 兩點，已知 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$，試回答下列問題。

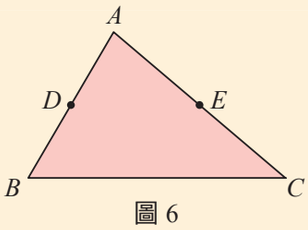


圖 6

(1) 連接 $\overline{DE}$，並利用附件 1 量量看，$\angle ADE$ 與 $\angle B$ 是否相等？

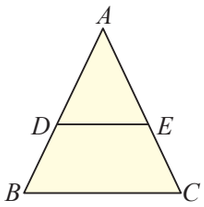
是

(2) $\overline{DE}$ 與 $\overline{BC}$ 是否互相平行？

是。

∵同位角相等，∴$\overline{DE} // \overline{BC}$

由問題探索可知，△ABC 中，若 D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$，則 $\overline{DE} // \overline{BC}$。事實上，如果 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$ 或 $\overline{DB}:\overline{AB}=\overline{EC}:\overline{AC}$，也可以得到 $\overline{DE} // \overline{BC}$，因此：

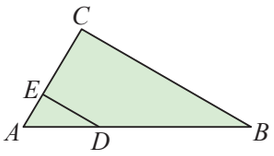


Key point 利用截比例線段判斷平行

如果一條直線將三角形的兩邊截成比例線段，那麼此直線會與三角形的第三邊平行。

隨堂練習

如右圖，若 $\overline{AE}=2$、$\overline{AD}=\overline{EC}=4$、$\overline{DB}=8$，且 $\angle B=30^\circ$，則 $\angle ADE$ 的度數為何？



∵$\overline{AE}:\overline{EC}=2:4=1:2$

$\overline{AD}:\overline{DB}=4:8=1:2$

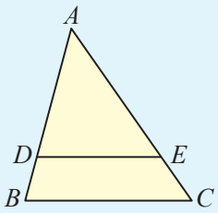
∴$\overline{AE}:\overline{EC}=\overline{AD}:\overline{DB}$

故 $\overline{DE} // \overline{BC}$，$\angle ADE=\angle B=30^\circ$（同位角相等）

重新布題

如右圖，△ABC 中，D、E 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，已知 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$，若 $\angle ADE=75^\circ$，則 $\angle B$ 的度數為何？

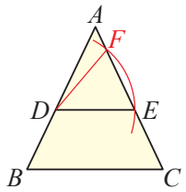
答：75°



1 動動腦的目的，是希望學生發現當 $\overline{DE}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{AB}$ 時，$\overline{DE}$ 不一定平行於 $\overline{BC}$。

動動腦 1

如右圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$。若以 D 點為圓心，$\overline{DE}$ 長為半徑畫弧，與 $\overline{AC}$ 交於另一點 F，則：



(1) $\overline{DF}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{AB}$ 嗎？

是

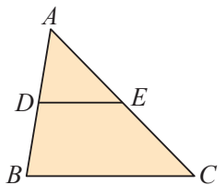
(2) $\overline{DF}$ 是否與 $\overline{BC}$ 平行呢？

否

三角形兩邊中點連線段性質

◆搭配習作 P.7 第 4 題

如右圖，$\triangle ABC$ 中，若 D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點，那麼 $\overline{DE}$ 與 $\overline{BC}$ 有什麼關係呢？



說明 因為 D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點，

$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}=1:1$，

所以 $\overline{DE}$ 與 $\overline{BC}$ 平行，

接著再利用平行線截比例線段性質可知，

$\overline{DE}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{AB}=1:2$，

也就是說 $\overline{DE}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$。

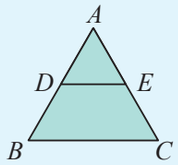
2 中點連線段性質可以看成是平行線截比例線段性質的特例。

由上面說明可知，**三角形兩邊中點的連線段平行於第三邊，且長度等於第三邊長度的一半**。 2

例 4 三角形兩邊中點連線段性質 學習內容 S-9-3

◆搭配習作 P.8 第 5 題

如右圖，△ABC 中，D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點，若 $\overline{AD}=\overline{DE}=4$，則 $\overline{AB}+\overline{BC}=$？



解 ∵D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點，

∴$\overline{AB}=2\,\overline{AD}=2\times4=8$，

$\overline{BC}=2\,\overline{DE}=2\times4=8$，

故 $\overline{AB}+\overline{BC}=8+8=16$。

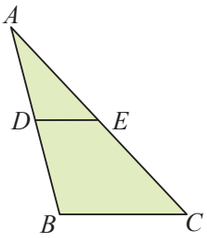
隨堂練習

如右圖，△ABC 中，D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點，若 $\overline{AB}=6$、$\overline{AC}=8$、$\overline{BC}=4$，則 $\overline{DE}$ 的長度為何？

∵D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點

∴$\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$

且 $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times4=2$



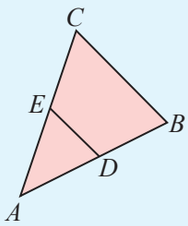
數學好好玩 逃出墓室

阿彭博士到埃及古墓考古時，不慎觸發機關導致墓室即將崩塌。請翻到書末 P.III「逃出墓室」，利用所學的平行線截比例線段性質來破解密碼，完成地圖。

重新布題

如右圖，△ABC 中，$\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$。已知 $\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{AC}$，$\overline{DE}=8$，則 $\overline{BC}$ 為多少？

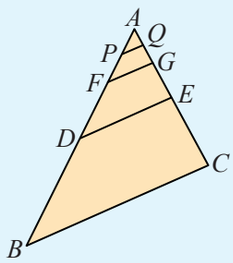
答：16



重新布題

如右圖，△ABC 中，D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點，F、G 分別為 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$ 的中點，P、Q 分別為 $\overline{AF}$、$\overline{AG}$ 的中點，若 $\overline{PQ}=5$，則 $\overline{FG}+\overline{DE}+\overline{BC}=$？

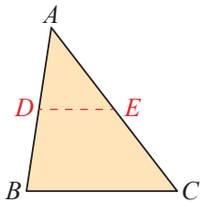
答：70



在前面我們知道，三角形兩邊中點的連線段會平行於第三邊，那如果通過一邊中點作另一邊的平行線，會通過第三邊的中點嗎？

說明 1

如右圖，$\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{AB}$ 的中點，
如果通過 D 點作 $\overline{BC}$ 的平行線，
且交 $\overline{AC}$ 於 E 點，
利用平行線截比例線段性質可知，
$\overline{AE}:\overline{EC}=\overline{AD}:\overline{DB}=1:1$，
可以發現 E 也是 $\overline{AC}$ 的中點。

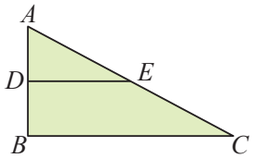


1 說明為三角形兩邊中點連線段性質的逆敘述。

由上面說明可知，**過三角形一邊中點且平行另一邊的直線，會通過第三邊的中點**。

隨堂練習 2

如右圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上一點，$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$，且 $\overline{AC}=17$、$\overline{BC}=15$、$\overline{AD}=\overline{DB}=4$，求 $\overline{AE}$ 與 $\overline{DE}$ 的長度。



由 $\overline{AD}=\overline{DB}=4$，可知 D 為 $\overline{AB}$ 的中點
又 $\overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$
$\therefore E$ 為 $\overline{AC}$ 的中點
$\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 17=\frac{17}{2}$
$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 15=\frac{15}{2}$

2 隨堂練習是檢核三角形兩邊中點連線段性質的逆敘述，和第 29 頁的隨堂練習不同。

Key point

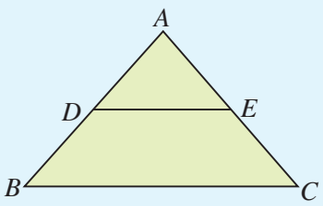
三角形兩邊中點連線段性質

1. 三角形兩邊中點的連線段平行於第三邊，且長度為第三邊長度的一半。
2. 過三角形一邊中點且平行另一邊的直線，會通過第三邊的中點。

重新布題

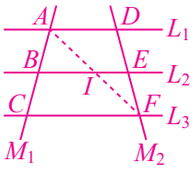
如右圖，等腰 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$D$ 為 $\overline{AB}$ 中點，作 $\overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$，與 $\overline{AC}$ 相交於 E 點。若 $\overline{DE}=4$，$\overline{DB}=3$，則 $\overline{AE}=$？$\overline{BC}=$？

答：3，8



主題 2 平行線截比例線段性質的應用

3 教師可適時補充另一種說明方法：



連接 $\overline{AF}$ 並交 L_2 於 I 點，

$\because L_2 // L_3$

$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AI}:\overline{IF}$

又 $L_1 // L_2$

$\therefore \overline{DE}:\overline{EF}=\overline{AI}:\overline{IF}$

故 $\overline{AB}:\overline{BC}$

$=\overline{DE}:\overline{EF}$。

如圖 7，$L_1 // L_2 // L_3$，而且分別與 M_1 交於 A、B、C 三點，與 M_2 交於 D、E、F 三點。此時 $\overline{AB}:\overline{BC}$ 與 $\overline{DE}:\overline{EF}$ 是否相等？

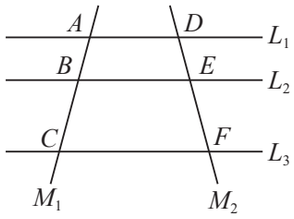


圖 7

說明 **3** 如圖 8，過 A 點作直線 M_3 平行 M_2，分別與 L_2、L_3 相交於 G、H 兩點，

可知四邊形 $AGED$ 與四邊形 $GHFE$ 都是平行四邊形，

因此 $\overline{AG}=\overline{DE}$，$\overline{GH}=\overline{EF}$ ……①。

在△ACH 中，

利用平行線截比例線段性質可知，

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AG}:\overline{GH}$ ……②，

由 ①、② 可知 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$。

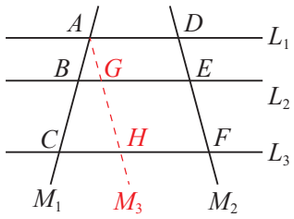


圖 8

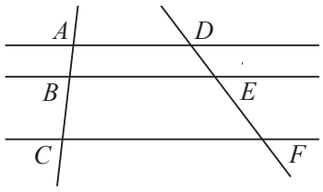
由上面說明可知，**若 $L_1 // L_2 // L_3$，且分別與 M_1 交於 A、B、C 三點，與 M_2 交於 D、E、F 三點，則 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$。**

◆搭配習作 P.8 第 6 題

4 課本上的比例式可用內項乘積＝外項乘積來計算，在此的乘積是一元一次方程式，老師也可以加深難度，設計一元二次方程式的題目。

隨堂練習 4

如右圖，$\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BE} // \overleftrightarrow{CF}$。若 $\overline{AB}=x+1$、$\overline{BC}=3x-1$、$\overline{DE}=5$、$\overline{EF}=10$，則 x 的值為多少？



$\because \overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BE} // \overleftrightarrow{CF}$

$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$

$(x+1):(3x-1)=5:10=1:2$

$3x-1=2\times(x+1)$

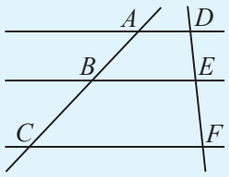
$3x-1=2x+2$

得 $x=3$

重新布題

如右圖，$\overline{AD} // \overline{BE} // \overline{CF}$。若 $\overline{AB}=2x+1$、$\overline{BC}=3x$、$\overline{DE}=6$、$\overline{EF}=8$，則 x 的值為多少？

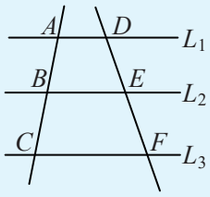
答：4



重新布題

如右圖，$L_1 // L_2 // L_3$，$\overline{BC}=\overline{DE}$，若 $\overline{AB}=2\sqrt{3}-1$，$\overline{EF}=2\sqrt{3}+1$，則 $\overline{BC}=$？

答：$\sqrt{11}$



我們可以應用平行線截比例線段性質，利用尺規作圖將一條線段按比例進行分割。

例 5 利用尺規作圖作比例線段 學習內容 S-9-3

◆搭配習作 P.9 第 7 題

已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖在 $\overline{AB}$ 上找到一點 C，使得 $\overline{AC}:\overline{CB}=1:2$。

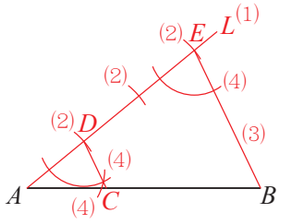
作法

(1) 通過 A 點另作一條直線 L。

(2) 在 L 上依序取 D、E 兩點，使得 $\overline{AD}:\overline{DE}=1:2$。

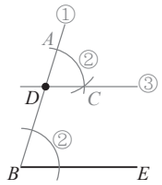
(3) 連接 $\overline{BE}$。

(4) 過 D 點作 $\overline{BE}$ 的平行線，與 $\overline{AB}$ 相交於 C 點，則 C 點即為所求。



學習時光機

過 D 點作 $\overline{BE}$ 的平行線作圖：



① 延長 $\overrightarrow{BD}$
② 作 $\angle ADC=\angle B$
③ 連 $\overleftrightarrow{CD}$ 即為所求

尺規影片
利用尺規作圖作比例線段

作圖概念說明

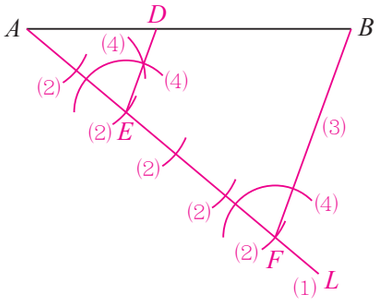
在 $\triangle ABE$ 中，$\because \overline{CD} // \overline{BE}$，

$\therefore \overline{AC}:\overline{CB}=\overline{AD}:\overline{DE}$（平行線截比例線段性質），

又 $\overline{AD}:\overline{DE}=1:2$，故 $\overline{AC}:\overline{CB}=1:2$。

隨堂練習

已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖在 $\overline{AB}$ 上找到一點 D，使得 $\overline{AD}:\overline{DB}=2:3$。



(1) 通過 A 點另作一條直線 L

(2) 在 L 上依序取 E、F 兩點使得 $\overline{AE}:\overline{EF}=2:3$

(3) 連接 $\overline{BF}$

(4) 過 E 點作 $\overline{BF}$ 的平行線與 $\overline{AB}$ 相交於 D 點則 D 點即為所求

重新布題

已知 $\overline{AB}$，依照下列步驟作圖：

(1) 通過 A 點另作一條直線 L。

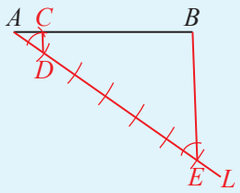
(2) 在 L 上依序取 D、E 兩點，使得 $\overline{AD}:\overline{DE}=1:5$。

(3) 連接 $\overline{BE}$。

(4) 過 D 點作 $\overline{BE}$ 的平行線，與 $\overline{AB}$ 相交於 C 點。

則 $\overline{AC}:\overline{CB}=$？

答：1：5



重點整理

1 平行線截比例線段性質

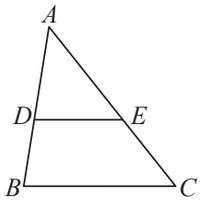
如右圖，$\triangle ABC$ 中，若 D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{DE} // \overline{BC}$，則：

(1) $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$。

(2) $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$。

(3) $\overline{DB}:\overline{AB}=\overline{EC}:\overline{AC}$。

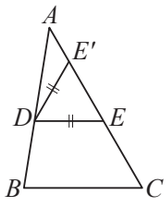
(4) $\overline{DE}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$。



2 利用截比例線段判斷平行

如右圖，$\triangle ABC$ 中，若 D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$，或 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$，或 $\overline{DB}:\overline{AB}=\overline{EC}:\overline{AC}$，則 $\overline{DE} // \overline{BC}$。

註 已知 E' 為 $\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE'}:\overline{BC}$，但 $\overline{DE'}$ 與 $\overline{BC}$ 不一定平行。



3 三角形兩邊中點連線段性質

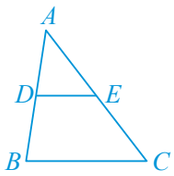
(1) 三角形兩邊中點的連線段平行於第三邊，且長度為第三邊長度的一半。

(2) 過三角形一邊中點且平行另一邊的直線，會通過第三邊的中點。

例 如右圖，$\triangle ABC$ 中，若 D、E 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的中點，則：

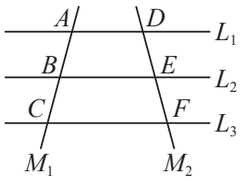
(1) $\overline{DE} // \overline{BC}$。

(2) $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$。



4 平行線截比例線段性質的應用

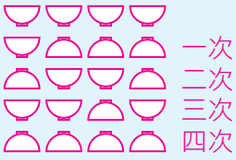
如右圖，若 $L_1 // L_2 // L_3$，且分別與 M_1 交於 A、B、C 三點，與 M_2 交於 D、E、F 三點，則 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$。



趣味數學

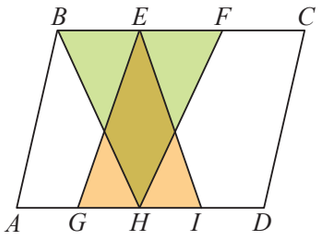
有四個碗，碗口朝上，每次顛倒三個，至少要翻幾次，才能使它們的碗口全部朝下？

答：



自我評量

1 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，E、F 將 $\overline{BC}$ 三等分，G、H、I 將 $\overline{AD}$ 四等分，則△HBF 面積：△EGI 面積為何？



P.21 例 1

設 $\overline{BC}=\overline{AD}=a$

$\because \overline{BC} // \overline{AD}$

$\therefore$ △HBF 面積：△EGI 面積 $=\overline{BF}:\overline{GI}$

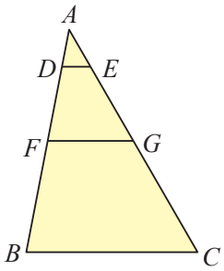
$=\frac{2}{3}\overline{BC}:\frac{2}{4}\overline{AD}$

$=\frac{2}{3}a:\frac{1}{2}a$

$=4:3$

2 如右圖，D、F 兩點在 $\overline{AB}$ 上，E、G 兩點在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{DE} // \overline{FG} // \overline{BC}$。若 $\overline{AD}:\overline{DF}:\overline{FB}=1:2:3$，$\overline{BC}=10\ cm$、$\overline{AC}=15\ cm$，則：

(1) $\overline{EG}=$？ (2) $\overline{DE}=$？ (3) $\overline{FG}=$？



P.24 例 2、P.26 例 3

(1) $\because \overline{DE} // \overline{FG} // \overline{BC}$

$\therefore \overline{AE}:\overline{EG}:\overline{GC}=\overline{AD}:\overline{DF}:\overline{FB}$

$=1:2:3$

得 $\overline{EG}:\overline{AC}=2:(1+2+3)$

$=2:6$

$=1:3$

故 $\overline{EG}=\overline{AC}\times\frac{1}{3}=15\times\frac{1}{3}$

$=5\ (cm)$

(2) $\because \overline{DE} // \overline{FG} // \overline{BC}$

$\therefore \overline{DE}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{AB}$

得 $\overline{DE}:10=1:(1+2+3)$

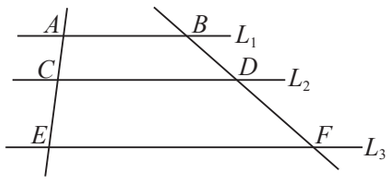
$\overline{DE}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}\ (cm)$

(3) 又 $\overline{FG}:\overline{BC}=\overline{AF}:\overline{AB}$

得 $\overline{FG}:10=(1+2):(1+2+3)$

$\overline{FG}=\frac{30}{6}=5\ (cm)$

3 如右圖，$L_1 // L_2 // L_3$，若 $\overline{AC}=4$、$\overline{CE}=4x+2$、$\overline{BD}=3x+3$、$\overline{DF}=9$，則 x 的值為多少？



P.31 隨堂

$\because L_1 // L_2 // L_3$，$\therefore \overline{AC}:\overline{CE}=\overline{BD}:\overline{DF}$

$4:(4x+2)=(3x+3):9$

$36=12x^2+18x+6$

$2x^2+3x-5=0$

$(x-1)(2x+5)=0$

得 $x=1$ 或 $-\frac{5}{2}$（負不合）

歷屆試題觀摩

(C) 1. 如圖，△ABC 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 上。若 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{CE}:\overline{EB}=2:3$，則△$DBE$ 與△ADC 的面積比為何？ 【106 年教育會考】

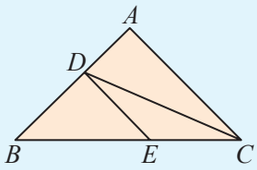
數位備課

(A) 3：5

(B) 4：5

(C) 9：10

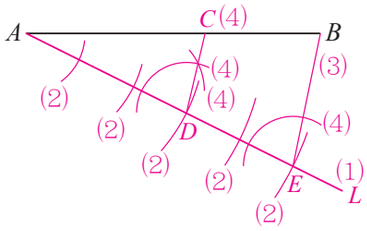
(D) 15：16



4 如右圖，已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖在 $\overline{AB}$ 上找到一點 C，使得 $\overline{AC}:\overline{AB}=3:5$。

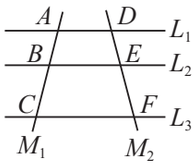
P.32 例 5

(1) 通過 A 點另作一條直線 L
(2) 在 L 上依序取 D、E 兩點，使得 $\overline{AD}:\overline{AE}=3:5$
(3) 連接 $\overline{BE}$
(4) 過 D 點作 $\overline{BE}$ 的平行線與 $\overline{AB}$ 相交於 C 點
則 C 點即為所求



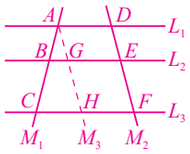
挑錯題

小妍計算「如右圖，已知 $L_1 // L_2 // L_3$，且 M_1 與 M_2 為截線，若 $\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=\overline{AD}=3$，$\overline{BE}=4$，則 $\overline{CF}$ 的值為何？」的過程如下。判斷他的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。



$\because L_1 // L_2 // L_3$，
$\therefore \boxed{\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BE}:\overline{CF}}$，
又 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AB}:(\overline{AB}+\overline{BC})=2:(2+3)=2:5$，
$\therefore \overline{BE}:\overline{CF}=2:5=4:10$，
故 $\overline{CF}=10$。

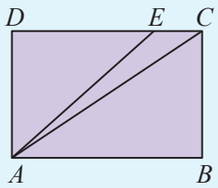
正確作法如下：
過 A 點作直線 M_3 平行 M_2，並與 L_2、L_3 相交於 G、H 兩點
四邊形 $AGED$、四邊形 $GHFE$ 皆為平行四邊形
因此 $\overline{AD}=\overline{GE}=\overline{HF}=3$，得 $\overline{BG}=4-3=1$
在△ACH 中，$\because \overline{BG} // \overline{CH}$
$\therefore \overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BG}:\overline{CH}=2:5$
由 $\overline{BG}=1$，得 $\overline{CH}=2.5$
故 $\overline{CF}=\overline{CH}+\overline{HF}=2.5+3=5.5$



教學提醒
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AG}:\overline{AH}$
$=\overline{BG}:\overline{CH}$
$\neq(\overline{BG}+a):(\overline{CH}+a)$（$a$ 為任意數）

(D) 2. 右圖的矩形 $ABCD$ 中，E 點在 $\overline{CD}$ 上，且 $\overline{AE}<\overline{AC}$。若 P、Q 兩點分別在 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$ 上，$\overline{AP}:\overline{PD}=4:1$，$\overline{AQ}:\overline{QE}=4:1$，直線 PQ 交 $\overline{AC}$ 於 R 點，且 Q、R 兩點到 $\overline{CD}$ 的距離分別為 q、r，則下列關係何者正確？【105 年教育會考】

數位備課



(A) $q<r$，$\overline{QE}=\overline{RC}$　(B) $q<r$，$\overline{QE}<\overline{RC}$
(C) $q=r$，$\overline{QE}=\overline{RC}$　(D) $q=r$，$\overline{QE}<\overline{RC}$