主題一　單利複利

若本金 P，期利率$r\%$，經過 n 期的本利和為 $f(n)$

(1) 單利計算：________________

(2) 複利計算：________________

範例 1

精誠銀行推出外幣高利定存，約定年利率4%，阿寶存入一萬元外幣。(四捨五入到整數)

(1)每年複利計息一次，試問四年後本利和為多少元外幣？

(2)每三個月複利計息一次，試問四年後本利和為多少元外幣？

＊結論：在同樣四年內計息次數由____次增加為____次，雖然每期利率從____減少為____，但本利和從________增加為________元。

＊思考：在固定的時間內，將計息時間縮短，此時計息次數增加，本利和會不斷增加？

主題二　連續複利，認識e

假設有一間慷慨的銀行年利率為 100 %，現有本金 1 元。

每年複利計息一次，則一年後的本利和是 2 元。

但若改為每月複利計息一次，則一年後的本利和是

$$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}\approx 2.61303529 \text{ 元。}$$

同理，若改為每日複利計息一次，則一年後的本利和是

$$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}\approx 2.714567475 \text{ 元。}$$

從上述數據觀察，若計息的頻率愈來愈高，所得本利和也會愈來愈高。

同樣一年的時間，同樣的年利率，採用複利計息，若每次計息的時間愈短，則所得的本利和雖然會愈高，但會有一個上限。

＊e 的性質

(1)當 n 值無限增加時，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 會愈來愈趨近一個數，如下表，以__________表示此數。

n	1	12	52	365	10000	100000	40000000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.6130353	2.6925970	2.7145675	2.7181459	2.7182682	2.7182818

(2)一般稱 e 為_______(Euler’s number)，其值約為 2.718281828459045，是一個無理數。

(3)使用以 e 為底的對數__________＝___________，稱為____________。

(4)自然對數 ln$x$ 可用 $\boxed{\text{ln}}$ 鍵按出，而以 e 為底的指數函數 $f(x)=e^x$，可用 $\boxed{\text{SHIFT}}$，$\boxed{\text{ln}}$ 鍵按出。

主題三 72 法則

範例：

1. 現有本金 100 萬，若以年利率8%，每年複利計息一次，大約多少年會翻倍呢？

2. 年營收為1000萬元，倘若公司希望在12年後年營收達2000萬元，則所需平均年成長率約為多少呢？

3. 年營收為 100 億元，若以平均年成長率3%計算，試問多少年後年營收達 200 億元？

＊結論：8%複利，經___年後翻倍；3%複利，經____年後翻倍；____複利，則經 12 年後會翻倍。
我們可以發現，_________________________________。
這就是經濟學上常用且相當實用的七二法則，可以幫助我們對複利效果作簡單的估算。

＊實際年期：若每期利率（或成長率）為$r\%$，且以複利計算，設本金為 P，則 n 期後的本利和為

2p，則ｎ＝____________。

＊72 法則：若每期利率（或成長率）為$r\%$，且以複利計算，則本利和達到____________所需時

間大約要________期。當$r \geq 2$時，估計效果較佳。

比較相關數值如下表：

年息	$r\%$	0.25%	0.50%	1%	2%	3%	4%
實際年期		277.605	138.976	69.661	35.003	23.450	17.673
72法則（估算年期）		288	144	72	36	24	18

年息	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	15%
實際年期	14.207	11.896	10.245	9.006	8.043	7.273	6.642	6.116	4.959
72法則（估算年期）	14.4	12	10.286	9	8	7.2	6.545	6	4.8

用________取代____________，做為 n 的估計值，此稱為 72 法則，72 法則是一種方便計算的估算方法，在金融上也有所謂的 70 法則，69.3 法則，E-M 法則等都是類似的方法。

練習題

$\boxed{\text{範例 1}}$

英國經濟學家馬爾薩斯（1766－1834）於 1798 年提出物種增長的模型，外在客觀條件不變的前提下，物種在時間 x 時的總數 $p(x)$的增長方式可以用下列公式來描述：

$$p(x)=p_0\cdot e^{rx}$$

其中 p_0 是一開始的物種總數，r 為此物種的「馬爾薩斯常數」。

根據聯合國統計，西元 2016 年的全球人口數 7464022 千人，而西元 2017 年的全球人口為 7547859 千人。設 $p(x)$為由西元 2016 年($x=0$)算起，第 x 年的全球人口數，若每年的人口增長率皆固定，試回答下列問題：

(1) r 值。(四捨五入至小數點後第四位)

(2)以此模型預估西元 2020 年的全球人口數。(以千人為單位，四捨五入至整數位。)

$\boxed{\text{範例 2}}$

希臘學者蘇格拉底有天帶領學生到麥田邊，蘇格拉底對學生說：「你們去麥田裏摘一個最大的麥穗，只許進不許退，而且只能摘一次。我在麥田的盡頭等你們。」後來研究發現，若學生先觀察前面 $\frac{100}{e}$% 的麥穗後，接下來有比前面 $\frac{100}{e}$% 更大的麥穗就直接摘下，這樣摘到最大麥穗的機率最高。試問小明走過麥田會遇到 1000 個麥穗時，應該先觀察多少個麥穗做為比較的基準，才能使得摘到最大麥穗的機率最高？（$e\approx 2.718$）(取整數值)

$\boxed{\text{範例 3}}$

已知芮氏規模，規模每差 1，能量釋放增為 $10^{1.5}$ 倍。若現在有一種新的地震規模定義。假設 K 氏地震規模 k 和地震釋放出的能量 r 爾格的關係是

$\ln r=3k+0.7$，其中 ln 為自然對數，

則 K 氏地震規模每差 1，能量釋放約差多少倍？(四捨五入至整數位)

範例 4

(1)設年利率為 10 %，若依複利計算每年計息一次，則至少要________年本利和才會超過本金的 2 倍。(無條件進入至整數位)

(2)承(1)，若按照七二法則，則至少要________年本利和才會超過本金的 2 倍。(無條件進入至整數位)

範例 5

(1)小君將 100 萬存入每年複利計息一次的銀行，預計 16 年後本利和會達到 400 萬，若按照七二法則，該銀行的利率約為多少？(單選)

(A) 9 %　(B) 14 %　(C) 18 %　(D) 21 %　(E) 24 %

(2)承(1)，若按七二法則所得的利率來計算，每年複利計息一次，16 年後小君所領到的本利和約為多少萬元？(四捨五入至整數位)

範例 6

在金融應用上，有所謂的 70 法則，若每期利率為 x %，且以複利計算，則本利和達到原來本金的兩倍所需時間大約要 $\frac{70}{x}$ 期。假設年利率為 2.5 %，以半年為一期，每期複利一次，若按照 70 法則，則至少需________期 (取整數) 其本利和才會達到本金的 2 倍。