

## 2-2 公因數與公倍數

七年\_\_\_\_班\_\_\_\_號 姓名：\_\_\_\_\_

### 一、公因數：

1. **公因數與最大公因數**：幾個正整數的共同因數稱為\_\_\_\_\_，其中最大者稱為\_\_\_\_\_。

例如：兩個正整數  $a$  和  $b$ ，其最大公因數以\_\_\_\_\_表示。此外，兩個正整數的公因數必為最大公因數的\_\_\_\_\_。

2. **互質**：兩個正整數的最大公因數為\_\_\_\_\_時，稱兩數為互質。互質的常考觀念如下：

(1) 互質的兩數不一定是質數(或奇數)，例如：4 和 9。

(2) 兩個不同的\_\_\_\_\_必互質。 (3) 兩個連續的\_\_\_\_\_必互質。

(4) \_\_\_\_\_和任何正整數都互質。

(5) 互質的兩數， $n$  次方後仍然\_\_\_\_\_，例如： $4^2$  和  $9^2$  互質。

### 3. 最大公因數的求法：

(1) **列舉法**：將每個數的因數列出，找出共同的因數(公因數)，其中最大者就是最大公因數。

#### 【練習】

想要求出 45、60、75 三數的最大公因數，可依下列步驟進行：

① 寫出 45 的因數\_\_\_\_\_

② 寫出 60 的因數\_\_\_\_\_

③ 寫出 75 的因數\_\_\_\_\_

④ 將三個數共同的因數圈起來，可得到三個數的公因數有\_\_\_\_\_，其中最大的公因數是\_\_\_\_\_，因此  $(45, 60, 75) =$ \_\_\_\_\_。

#### (2) 標準分解式法：

① 先將各數寫成標準分解式，觀察後把相同的質因數取次方「\_\_\_\_\_」的相乘，就是最大公因數。

#### 【練習】

要求出 45、60、75 三數的最大公因數，可依下列步驟進行：

① 寫出 45 的標準分解式， $45 =$ \_\_\_\_\_

② 寫出 60 的標準分解式， $60 =$ \_\_\_\_\_

③ 寫出 75 的標準分解式， $75 =$ \_\_\_\_\_

④ 將三個數共同的質因數圈起來，取「次方較低」的質因數相乘寫成\_\_\_\_\_，因此  $(45, 60, 75) =$ \_\_\_\_\_。

(3) **短除法**：用每個數的公因數(不一定是質數)去除，直到下方的數除了\_\_\_\_\_以外沒有其它公因數之後，再將所有的公因數相乘。

#### 【練習】

請利用「短除法」，求出 45、60、75 三數的最大公因數。

45、60、75

答：過程如右， $(45, 60, 75) =$ \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_。

(4)輾轉相除法(補充)：

- ①使用時機：數字比較大，不容易用短除法時使用，但是只限於兩個數。
- ②方法過程：將兩數寫於三直線內(如下方範例)，較大的數當被除數，除以較小的數，得到的商記於線外，餘數再反過來作為除數，依此方式輾轉相除，直到最後餘數 0 為止，此時前一個餘數就是這兩數的最大公因數。

【範例】

利用「輾轉相除法」求(667,1189)=? 過程如下：【最後請同學完成……】

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 667 & 1189 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 667 & 1189 & 1 \\ \hline 667 & 522 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 667 & 1189 & 1 & 1 \\ \hline 522 & 667 & & \\ \hline 145 & 522 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 667 & 1189 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 522 & 667 & & & \\ \hline 145 & 522 & 3 & & \\ \hline & 435 & & & \\ \hline & 87 & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 667 & 1189 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 522 & 667 & & & \\ \hline 145 & 522 & 3 & & \\ \hline & 87 & & & \\ \hline 58 & 87 & & & \\ \hline \end{array}$$

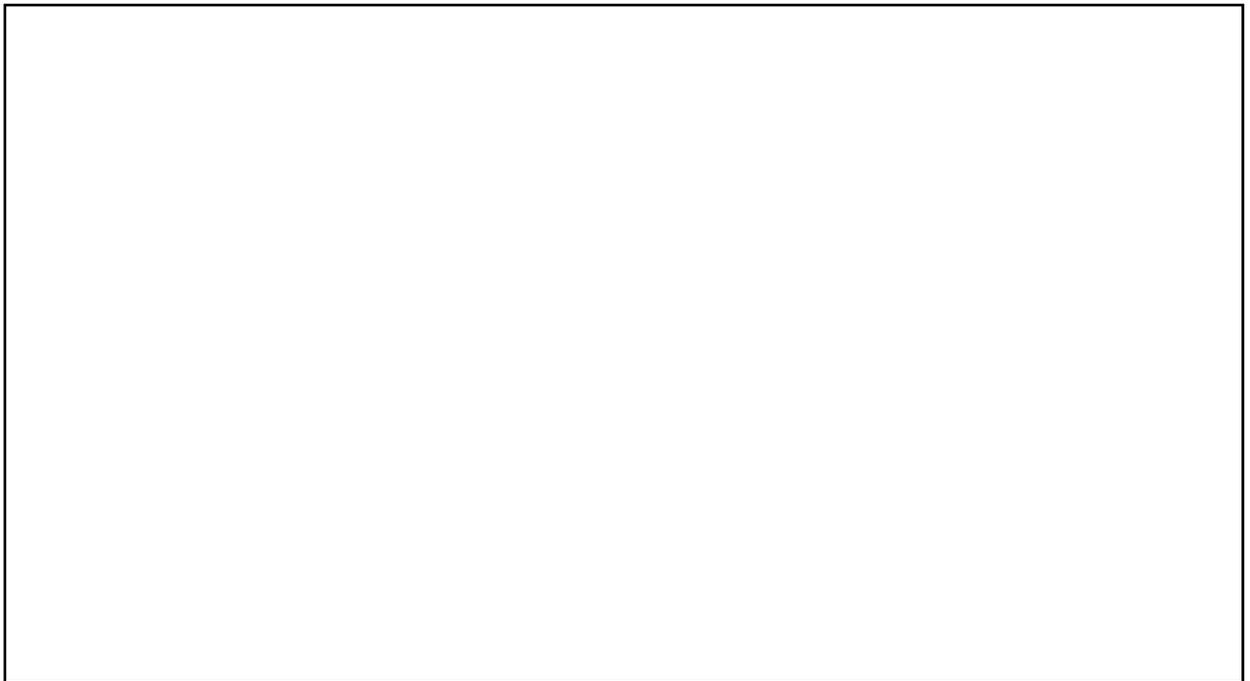
此過程的觀念和

「將長方形紙片剪去最大正方形，剩下的長方形再剪去最大的正方形，反覆如此，最後得到大大小小的正方形為止，其中最後也是最小正方形的邊長即為原來紙片長和寬的最大公因數」一樣。

【練習】下圖長方形的長 1189，寬 667，請用上述方法，改用直尺畫出最大的正方形，最後共有        個大小不同的正方形，最小的正方形邊長為        。  
如果和上面的「輾轉相除法」比較，最後最小的正方形邊長就是        。

1189

667



【結論】：求兩個正整數的最大公因數時，最常用的簡便方法是        法，國中課程學到了        法(務必要會!)，數字較大不易分解時，可以考慮        法。尤其剪紙的題目，要分辨剪出的正方形是①相同大小(邊長最大，個數最少)；或是②可以大小不同(正方形個數比①更少)，但是兩種都是求長和寬的        。