

2-1 指數函數與圖形

主題一 指數函數的定義

設 $a > 0, a \neq 1, x$ 是任意實數，則稱函數 $f(x) = a^x$ 是以 a 為底數的指數函數，其中 a 為所有實數，值域為所有正實數。

因：當 $a=1$ 時， $f(x) = 1^x = 1$ 是常數函數，其圖形為一水平線。

(配合課本 P.52~53)

例題 1 指數型的變化

第 1 天獲得 1 元、第 2 天獲得 2 元、第 3 天獲得 4 元、第 4 天獲得 8 元、依此每天所獲得的錢為前一天的兩倍，如此進行到第 30 天，試問這 30 天所獲得的錢，總數最接近下列哪一個選項？

- (A) 10,000 元 (B) 1,000,000 元 (C) 100,000,000 元
(D) 1,000,000,000 元 (E) 1,000,000,000,000 元

(配合課本例題 1)

解 由題設條件，知第 n 天會獲得 2^{n-1} 元

$$\text{因此這 30 天所獲得的錢為 } 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{29} = \frac{1 \times (2^{30} - 1)}{2 - 1} = 2^{30} - 1$$

$$\text{又 } 2^{30} = (2^{10})^3 = 1024^3 \approx 1000^3 = 10^9$$

故選 D

類題 1

漫畫中有一種道具「放大燈」，每照射一次，物體會等比例的放大，高度會變成原來的兩倍。已知大雄的身高為 140 公分，若希望大雄的身高能超過臺北 101 大樓的高度 508 公尺，則至少要照射幾次放大燈？

解 由題意知，照射 n 次後的身高為 140×2^n 公分

$$\text{若 } 140 \times 2^n > 50800, \text{ 即 } 2^n > 362 \dots$$

$$\text{解得 } n \geq 9$$

故照射 9 次後，大雄的身高能超過臺北 101 的高度

類題 2

設 a 為正實數且 n 為正整數，試回答下列問題：

- 已知 $f(x) = a^x$ 滿足 $f(3) = 9$ ，試求 $f(0)$ 、 $f(6)$ 的值。
- 已知 $g(x) = x^n$ 滿足 $g(3) = 9$ ，試求 $g(0)$ 、 $g(6)$ 的值。
- 承(1)與(2)， $f(x)$ 稱為 _____ 函數， $g(x)$ 稱為 _____ 函數。

解 (1) 由題設條件，知 $f(3) = a^3 = 9$ (其中 $a > 0$)

$$\text{所以 } f(0) = a^0 = 1, f(6) = a^6 = (a^3)^2 = 81$$

(2) 由題設條件， $g(3) = 3^n = 9$ ，解得 $n=2$

$$\text{所以 } g(0) = 0^2 = 0, g(6) = 6^2 = 36$$

(3) $f(x)$ 稱為指數函數， $g(x)$ 稱為多項式函數

主題二 指數函數圖形

設指數函數 $f(x) = a^x$ ，

1. 當 $a > 1$ 時，函數圖形如

- 圖形永遠在 x 軸的上方
- 圖形通過點 $(0, 1)$
- 圖形由左而右逐漸上升
- 任一鉛垂線與圖形有且只有一個交點
- 當 x 值愈小，圖形愈靠近 x 軸
- 圖形凹口向上。

2. 當 $0 < a < 1$ 時，函數圖形

- 圖形永遠在 x 軸的上方
- 圖形通過點 $(0, 1)$
- 圖形由左而右逐漸下降
- 任一鉛垂線與圖形有且只有一個交點
- 當 x 值愈大，圖形愈靠近 x 軸
- 圖形凹口向上。

- 若底數大於 1，則
- 若底數介於 0 ~ 1 之間，則