(3)設函數 $f(x)$ 在某一個以 $a$ 為左端點的區間 $(a, b)$ 有定義。當 $x$ 從右邊趨近 $a$ 時，若 $f(x)$ 趨近定值 $L$，則稱 $L$ 為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的**右極限**，記作 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$。

(4)設函數 $f(x)$ 在某一個以 $a$ 為右端點的區間 $(c, a)$ 有定義。當 $x$ 從左邊趨近 $a$ 時，若 $f(x)$ 趨近定值 $M$，則稱 $M$ 為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的**左極限**，記作 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=M$。

要注意的是：右極限若存在，則只會有一個（左極限亦同）。

根據極限的定義，有以下的結論。

**極限與左右極限的關係**

設函數 $f(x)$ 在某個包含 $a$ 的開區間（可能不包括 $a$）有定義。

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$，則 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$；反之亦成立。

值得注意的是：當左右極限不相等時，極限不存在。例如：在例題 6 中，將 $f(x)$ 改寫成分段定義函數的形式，即

$$f(x)=\begin{cases} 1\text{，當 } x>0 \\ -1\text{，當 } x<0 \end{cases}。$$

因為右極限 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，而左極限 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$，所以

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim_{x\to 0^-} f(x)。$$

故極限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

**隨堂練習**

設函數 $f(x)=\begin{cases} x+1\text{，當 } x>1 \\ -2x+3\text{，當 } x<1 \end{cases}$。

(1)求右極限 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$。

(2)求左極限 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$。

(3)極限 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在？





## 丁 極限的性質

給定兩函數 $f(x)$ 與 $g(x)$。若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=a$ 的極限都存在，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 經過四則運算後，在 $x=a$ 的極限也都會存在。這些性質對於求函數的極限有很大的幫助，敘述如下。

**函數極限的運算性質**

設 $c$ 為常數，且函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=a$ 的極限分別為 $L$ 與 $M$，即

$$\lim_{x\to a} f(x)=L,\ \lim_{x\to a} g(x)=M。$$

我們有以下的性質：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L+M$。

(2) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=L-M$。

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(cf(x)\right)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)=cL$。

(4) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=LM$。

(5)若 $M\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M}$。

利用這些性質，可以求多項式函數的極限。舉例而言，利用性質 (4)，得

$$\lim_{x\to 2} x^2=\lim_{x\to 2}(xx)=\lim_{x\to 2} x\cdot\lim_{x\to 2} x=2\times 2=2^2，$$

且

$$\lim_{x\to 2} x^3=\lim_{x\to 2}(x^2x)=\lim_{x\to 2} x^2\cdot\lim_{x\to 2} x=2^2\times 2=2^3。$$

再由性質 (1), (2) 及 (3)，得

$$\lim_{x\to 2}(x^3-3x^2+8)=\lim_{x\to 2} x^3-3\lim_{x\to 2} x^2+\lim_{x\to 2} 8=2^3-3\times 2^2+8=4。$$

仿照上述的方法，可以推得多項式函數與有理函數（形如 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$，其中 $f(x), g(x)$ 是多項式且 $g(x)\neq 0$）的極限，敘述如下。