

檢測概念

透過排列長方形理解因數與倍數概念，為整數的質數與合數概念鋪路。

教學提醒 1

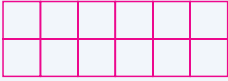
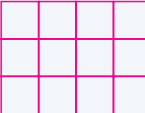
溫故啟思的答案有三種，但不需要學生在此階段就做窮盡或是數學化的找法，只需要排出兩種情形即可，還可以讓同學們做比較。

溫故啟思

大小相同的正方形磁磚若干片，可以緊密地排出不同形狀的長方形。若拿 6 塊，可排出兩種形狀，如右圖。

(1) 若小善拿 12 塊，請畫出 2 種可能排出的形狀。

① 第一種 

第二種  | 第三種 

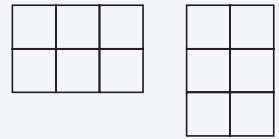
(2) 若小鈞拿 13 塊，試問他可以排出幾種形狀？

小鈞拿 13 塊只能排出一種。 

第一種



第二種



(以上兩種情形視為同一種)

1 因數與倍數

動畫 因數與倍數

小學時，我們學過一個正整數的因數與倍數。當正整數 a 除以正整數 b 的結果為正整數（即 a 可以被 b 整除）時，我們稱 a 是 b 的**倍數**， b 是 a 的**因數**。例如： $56 \div 7 = 8$ ，56 是 7 的倍數，7 是 56 的因數。

隨堂練習

- 判斷 180 顆蘋果是否能平分給 15 位學生。
是。因為 $180 \div 15 = 12$ 。
- 判斷 180 是不是 15 的倍數。
是。因為 $180 \div 15 = 12$ ，所以 180 是 15 的倍數。

學習內容

N-7-1 100 以內的質數：質數和合數的定義；質數的篩法。

N-7-2 質因數分解的標準分解式：質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。

由 $56 \div 7 = 8$ ，可知道 56 分別是 7、8 的倍數，7、8 是 56 的因數；可以發現 $56 = 7 \times 8$ ，那麼 56 是 7 和 8 的倍數，7 和 8 是 56 的因數。

一般而言，對於 a 、 b 、 c 三個正整數，如果 $a \div b = c$ ， $a \div c = b$ ，也就是 $a = b \times c$ ，那麼 a 是 b 、 c 的倍數，而 b 、 c 都是 a 的因數。

由以上因數、倍數的說明我們可以發現：

- 1 當 a 是正整數時，因為 $a \div 1 = a$ ，所以 1 是任意正整數的因數，任意正整數都是 1 的倍數。
- 2 當 a 是正整數時，因為 $0 \div a = 0$ ，所以 0 是任意正整數的倍數。

因數與倍數的概念可不可以延伸到負數呢？我們知道

$$\begin{aligned} 12 &= (-1) \times (-12) \\ &= (-2) \times (-6) \\ &= (-3) \times (-4) \end{aligned}$$

因此 -1、-2、-3、-4、-6、-12 分別是 12 的負因數；
12 也分別是 -1、-2、-3、-4、-6、-12 的倍數。

$$\begin{aligned} -12 &= 1 \times (-12) = 2 \times (-6) \\ &= 3 \times (-4) = 4 \times (-3) \\ &= 6 \times (-2) = 12 \times (-1) \end{aligned}$$

因此 -12 分別是 1、2、3、4、6、12 的負倍數；1、2、3、4、6、12 也分別是 -12 的因數。

2

2 教學提醒

國小只學正因數與正倍數，國中階段則引進負因數與負倍數，以銜接八年級的因式分解。

由此可以知道，當 b 是 a 的因數時， b 的相反數 $-b$ 也是 a 的因數；當 a 是 b 的倍數時， a 的相反數 $-a$ 也是 b 的倍數。

隨堂練習

寫出 18 的所有正因數與負因數。

正因數：1、2、3、6、9、18。

負因數：-1、-2、-3、-6、-9、-18。

若沒有特別說明，一般提到因數與倍數都是指正因數與正倍數。

類題演練 配合課文

1. 156 是不是 13 的倍數？
解 ▶ 是。
2. 17 是不是 168 的因數？
解 ▶ 不是。

類題演練 配合隨堂練習

- 寫出 169 的所有正因數與負因數。
解 ▶ 正因數：1、13、169。
負因數：-1、-13、-169。

例 1 因數的應用



家庭

小亮拿了 M 塊大小相同的正方形磁磚，最多可以排出 4 種不同形狀的長方形，它的邊長由小到大分別為 1 、 2 、 a 、 b 、 6 、 c 、 12 、 M ，則 M 為多少？ c 為多少？

解 因為 $1 \times M = 2 \times 12 = a \times c = b \times 6$ ，
所以 $M = 2 \times 12 = 24$ 。



① 又 24 的所有正因數由小到大排列為
 1 、 2 、 3 、 4 、 6 、 8 、 12 、 24 ，
故 $c = 8$ 。

1 、 2 、 a 、 b 、 6 、 c 、 12 、 M



教學提醒 1

教學上，老師要特別強調，國中階段只討論正整數的正因數與正倍數。

隨堂練習

如果拿了 N 塊大小相同的正方形磁磚，最多可以排出 4 種不同形狀的長方形，它的邊長由小到大分別為 1 、 a 、 b 、 5 、 8 、 c 、 d 、 N ，則 N 為多少？ a 、 b 、 c 、 d 各為多少？

因為 $1 \times N = a \times d = b \times c = 5 \times 8$ ，所以 $N = 5 \times 8 = 40$ 。

又 40 的所有正因數由小到大排列為 1 、 2 、 4 、 5 、 8 、 10 、 20 、 40 ，
故 $a = 2$ ， $b = 4$ ， $c = 10$ ， $d = 20$ 。

教學小幫手

可搭配：
習作 P 24
習題 1~3。

類題演練 配合例題 1

由小到大寫出正整數 m 的所有正因數如下：

$$1, a, 3, b, c, 22, d, m$$

試問：

(1) 正整數 $m = ?$ 解 ▶ 66。

(2) $a = ?$ 解 ▶ 2。

2 倍數的簡易判別法

動畫 倍數的簡易判別法

國小時學過如何判別 2、5 的倍數，我們先復習這些判別法，並探索 4、9、3 和 11 的倍數判別法。

2、5 的倍數判別法



2 的倍數判別法

如果一個正整數的個位數字是 0、2、4、6、8，則這個正整數一定是 2 的倍數，否則就不是 2 的倍數。

例如：520、8、2016、104、72 等都是 2 的倍數，而 2017 不是 2 的倍數。正整數中，我們稱 2 的倍數為**偶數**，不是 2 的倍數為**奇數**。



5 的倍數判別法

如果一個正整數的個位數字是 0 或 5，那麼這個正整數就是 5 的倍數，否則就不是 5 的倍數。

例如：75、610 是 5 的倍數，但 221 不是 5 的倍數。

2 教學提醒

判別較大數時，倍數的簡易判別法會特別有幫助。

概念澄清

一個整數若能被 2 整除稱為偶數；若不能被 2 整除稱為奇數。

概念澄清

若一個數為 2 的倍數，又為 5 的倍數，則此數必為 $2 \times 5 = 10$ 的倍數。

隨堂練習

- 如果四位數 $137\square$ 是 2 的倍數，那麼 \square 內可以填入哪些數字？
 \square 內的數字可以填入 0、2、4、6、8。
- 如果兩個三位數 279 及 $13\square$ 的和是 5 的倍數，那麼 \square 內可以填入哪些數字？
因為 $9+1=10$ ， $9+6=15$ ，所以 \square 內的數字可以填入 1、6。
- 若五位數 $5432\square$ 是 2 的倍數，也是 5 的倍數，則 $\square = ?$
 $5432\square$ 是 2 的倍數，故 \square 內的數字可以填入 0、2、4、6、8；
 $5432\square$ 是 5 的倍數，故 \square 內的數字可以填入 0、5，
因為 $5432\square$ 是 2 的倍數，也是 5 的倍數，所以 $\square = 0$ 。

類題演練 配合隨堂練習

- 如果五位數 $9876\square$ 是 2 的倍數，那麼 \square 內可以填入哪些數字？ 解 ▶ 0、2、4、6、8。
- 如果兩個三位數 198 及 $46\square$ 的和是 5 的倍數，那麼 \square 內可以填入哪些數字？ 解 ▶ 2、7。
- 若五位數 $1234\square$ 是 2 的倍數，也是 5 的倍數，則 $\square = ?$ 解 ▶ 0。

 探索活動

4 的倍數判別法

教學提醒 ①

第1小題發現錯誤的臆測並嘗試反駁；第2小題透過觀察擴張或修改原先的臆測；第3小題則透過實際數字讓孩子說明臆測為何是對的。雖然不是嚴謹的論證，讓學生在七年級就嘗試做非形式的證明，為未來九年級的幾何論證奠下基礎。

①

① 小亮：「因為 114 的個位數字 4 是 4 的倍數，
所以 114 是 4 的倍數。」

請問小亮的說法對嗎？為什麼？

不對。

因為 $114 \div 4 = 28 \dots 2$ ，114 無法被 4 整除，故 114 不是 4 的倍數。

②

② 小善：「因為 100 是 4 的倍數，28 也是 4 的倍數，
所以 $128 = 100 + 28$ 是 4 的倍數。」

請問小善的說法對嗎？為什麼？

對。

因為 $100 = 25 \times 4$ ， $28 = 7 \times 4$ ，所以 $128 = (25 + 7) \times 4$ 是 4 的倍數。

教學提醒 ②

提醒學生 100 的倍數一定是 4 的倍數，並利用隨堂練習的經驗來做再次確認。

③ 從前面的臆測與檢驗，當 24 是 4 的倍數，請你說明
為何 $324 (= 300 + 24)$ 是 4 的倍數？

$100 = 25 \times 4$ ，所以 100 的倍數都是 4 的倍數。

$324 = 3 \times 100 + 24 = 3 \times 25 \times 4 + 24$ ，由於 $3 \times 25 \times 4$ 和 24 均為 4 的倍數，因此 324 是 4 的倍數。

概念澄清

- 4 的倍數不一定是 8 的倍數。
- 8 的倍數一定是 4 的倍數。



4 的倍數判別法

如果一個正整數的末兩位數是 4 的倍數或皆為 0，那麼這個正整數就是 4 的倍數，否則就不是 4 的倍數。

教學補給站

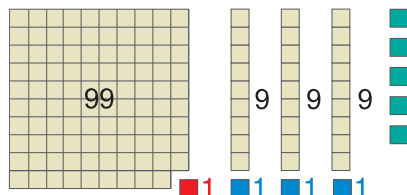
可視情況補充 8 的倍數判別法，只要知道該數的末三位數字是否為 8 的倍數即可。

3 教學提醒

► 9 的倍數判別法

如何判斷一個數是否為 9 的倍數呢？以 135 為例，我們可以將 135 分成 1 堆 100、3 堆 10 和 5 堆 1，寫成：

$$\begin{aligned} 135 &= 1 \times 100 + 3 \times 10 + 5 \\ &= 1 \times (99 + 1) + 3 \times (9 + 1) + 5 \\ &= 1 \times 99 + 1 + 3 \times 9 + 3 + 5 \\ &= 1 \times 99 + 3 \times 9 + (1 + 3 + 5) \end{aligned}$$



1 + 3 + 5 是 9 的倍數嗎？



由於 99、9 都是 9 的倍數，因此只要看 135 的各個數字和 (1 + 3 + 5) 是否為 9 的倍數即可。因為 $1 + 3 + 5 = 9$ ，所以 135 是 9 的倍數。



9 的倍數判別法

如果一個正整數的各個數字和是 9 的倍數，那麼這個正整數就是 9 的倍數，否則就不是 9 的倍數。

例 2 判別 9 的倍數

判別 7893 與 10189 是否為 9 的倍數。

- 解 (1) 7893 的各個數字和為 $7 + 8 + 9 + 3 = 27$ ，
因為 27 是 9 的倍數，所以 7893 是 9 的倍數。
- (2) 10189 的各個數字和為 $1 + 0 + 1 + 8 + 9 = 19$ ，
因為 19 不是 9 的倍數，所以 10189 不是 9 的倍數。

隨堂練習

- 1 45678 與 234567 是否為 9 的倍數？
 $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$ ，因為 30 不是 9 的倍數，所以 45678 不是 9 的倍數。
 $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$ ，因為 27 是 9 的倍數，所以 234567 是 9 的倍數。
- 2 如果三位數 $5\square 5$ 是 9 的倍數，那麼 \square 內可以填入哪些數字？
因為 $5 + \square + 5 = 10 + \square$ 是 9 的倍數，所以 $\square = 8$ 。

類題演練 配合例題 2

1. 342、8762、9540 中，哪些是 9 的倍數？
解► 342、9540。
2. 若五位數 $765\square 3$ 是 9 的倍數，那麼 \square 內可以填入哪些數字？
解► 6。

教學補給站

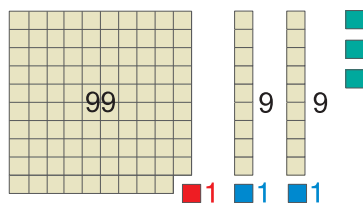
將西元出生年份的四位數字，減去四個數字之和，所得的差會是多少的倍數？為什麼呢？
解► 若出生年份的四個數字為 $a、b、c、d$ ，則出生年可寫成 $1000a + 100b + 10c + d$ ，再減去 $(a + b + c + d)$ ，可得 $1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d) = 9(111a + 11b + c)$ 為 9 的倍數。

教學提醒 ① ② 3 的倍數判別法

9 與 3 的倍數判別法類似，可引導學生思考，進行連結。

我們也可以利用 9 的倍數判別法來了解一個數是否為 3 的倍數。例如：

$$\begin{aligned} 123 &= 1 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \\ &= 1 \times (99 + 1) + 2 \times (9 + 1) + 3 \\ &= 1 \times 99 + 1 + 2 \times 9 + 2 + 3 \\ &= 1 \times 99 + 2 \times 9 + (1 + 2 + 3) \end{aligned}$$



1 + 2 + 3 是 3 的倍數嗎？



由於 99、9 都是 3 的倍數，因此只要看 123 的各個數字和 (1 + 2 + 3) 是否為 3 的倍數即可。因為 1 + 2 + 3 = 6，所以 123 是 3 的倍數。

概念澄清

- 3 的倍數不一定是 9 的倍數。
- 9 的倍數一定是 3 的倍數。



3 的倍數判別法

如果一個正整數的各個數字和是 3 的倍數，那麼這個正整數就是 3 的倍數，否則就不是 3 的倍數。

例 3 判別 3 的倍數

判別 2018 與 2019 是否為 3 的倍數。

- 解
- 2018 的各個數字和為 $2 + 0 + 1 + 8 = 11$ ，
因為 11 不是 3 的倍數，所以 2018 不是 3 的倍數。
 - 2019 的各個數字和為 $2 + 0 + 1 + 9 = 12$ ，
因為 12 是 3 的倍數，所以 2019 是 3 的倍數。

隨堂練習

- 2020 是否為 3 的倍數？
因為 $2 + 0 + 2 + 0 = 4$ 不是 3 的倍數，所以 2020 不是 3 的倍數。
- 如果五位數 $6521\square$ 是 3 的倍數，那麼 \square 內可以填入哪些數字？
因為 $6 + 5 + 2 + 1 + \square = 14 + \square$ 是 3 的倍數，所以 $\square = 1、4、7$ 。

延伸演練

若四位數 $436\square$ 同時為 2 和 3 的倍數，則 \square 可以填入哪些數字？

解 ▶ 2、8。



歷屆試題

基礎題



有 30 張分別標示 1~30 號的紙牌。先將號碼數為 3 的倍數的紙牌拿掉，然後從剩下的紙牌中，拿掉號碼數為 2 的倍數的紙牌。若將最後剩下的紙牌，依號碼數由小到大排列，則第 5 張紙牌的號碼為何？

- (A) 7 (B) 11 (C) 13 (D) 17

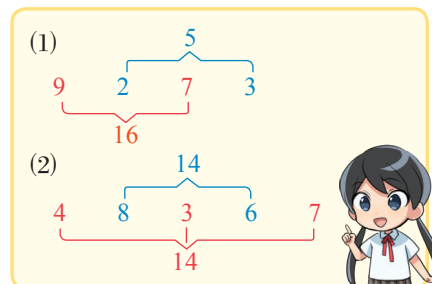
解 ▶ (C)。

《96.基測(-)》題序第 3 題

例 4 判別 11 的倍數

判別 9273 與 48367 是否為 11 的倍數。

- 解**
- (1) 9273 的奇數位數字和為 $2 + 3 = 5$ ，
偶數位數字和為 $9 + 7 = 16$ 。
因為 $16 - 5 = 11$ 是 11 的倍數，
所以 9273 是 11 的倍數。
- (2) 48367 的奇數位數字和為 $4 + 3 + 7 = 14$ ，
偶數位數字和為 $8 + 6 = 14$ 。
因為 $14 - 14 = 0$ ，
所以 48367 是 11 的倍數。



隨堂練習

- 下列各數中，哪些是 11 的倍數？
333、7777、61482、91938
 $(3+3)-3=3$ ， $(7+7)-(7+7)=0$ ， $(6+4+2)-(1+8)=3$ ，
 $(9+9+8)-(1+3)=22$ ，故 7777、91938 是 11 的倍數。
- 如果四位數 $79\square 6$ 是 11 的倍數，那麼 \square 內可以填入哪些數字？
 $(9+6)-(7+\square)=15-7-\square=8-\square$ 是 11 的倍數，故 $\square=8$ 。

教學小幫手

可搭配：
習作 P 25
習題 4~6。

3 質數與合數

動畫 質數與合數



質數與合數

一個大於 1 的整數，如果除了 1 和本身以外，沒有其他因數，這樣的整數稱為**質數**；如果除了 1 和本身以外，還有其他因數，這樣的整數稱為**合數**。

延伸演練

若 267、9185、24046、437292 四個數中，4 的倍數有 a 個，
9 的倍數有 b 個，11 的倍數有 c 個，則 $a+b-c=?$

解 ▶ 0

例如：

- ① 因為 2 只有 1、2 兩個因數，所以 2 是質數。
- ② 因為 3 只有 1、3 兩個因數，所以 3 是質數。
- ③ 4 除了因數 1、4 以外，還有因數 2，故 4 是合數。

而 1 不是質數，也不是合數。2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數。

概念澄清

為了描述公式或定理的方便性，在數學中都不把 1 當成質數。

探索活動

質數、合數中的奇偶數

- (1) 所有的質數都是奇數嗎？為什麼？**不一定。例如：2 為質數，且為偶數。**
- (2) 所有的合數都是偶數嗎？為什麼？**不一定。例如： $9=3\times 3$ ，故 9 為合數，且為奇數。**

例 5 判別質數與合數

判別 17 和 27 是質數還是合數。

1

- 解** 17 除了 1 和本身以外，沒有其他的因數，故 17 是質數。
27 除了 1 和本身以外，還有因數 3 和 9，故 27 是合數。

1 教學提醒

學生一開始對質數與合數的概念不易理解，教師可透過正方形小紙片，如此節溫故啟思的拼法來說明。只有一種拼法就是質數，有兩種以上拼法就是合數。

隨堂練習

- ① 判別 50 和 51 是質數還是合數。
 $50=2\times 25$ ， $51=3\times 17$ ，故 50、51 均是合數。

- ② 請將下表的質數圈出來。

1	②	③	4	⑤	6	⑦	8	9	10
⑪	12	⑬	14	15	16	⑰	18	⑲	20



歷屆試題

基礎題



設「 $a \ominus b$ 」代表大於 a 且小於 b 所有質數的個數。例如：大於 10 且小於 15 的質數有 11、13 兩個質數，所以 $10 \ominus 15=2$ 。若 $30 \ominus c=2$ ，則 c 可能為下列哪一個數？

- (A) 38 (B) 42 (C) 46 (D) 50

解 ▶ (A)。

《94.基測(-)》題序第 10 題