1-2 週期性數學模型

1 週期性現象 p.21 ~ p.24

2 正弦函數的圖形 p.24 ~ p.30

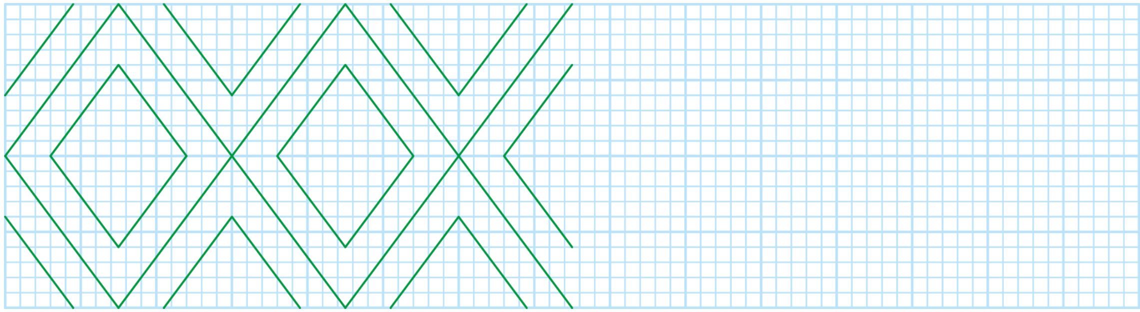
3 正弦函數圖形的平移與伸縮 p.30 ~ p.40

1 週期性現象

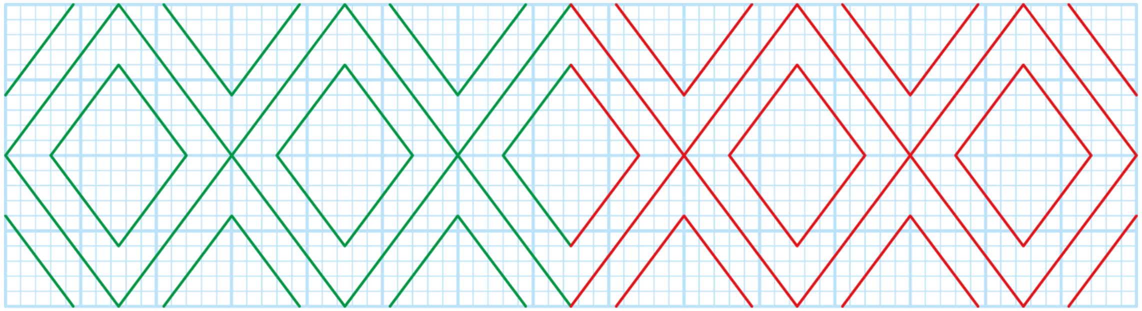
- 在生活中處處可見“周而復始”的規律現象。在美術、工藝或建築上，“重複”更是設計與形成美感的一種常見手法。如下圖是臺灣原住民族泰雅族的傳統弓織藝品，發現成品的左半段圖樣是由相同的菱形樣式重複編織而成，如此一來就有了整齊的美感。

隨堂練習 1

試觀察如圖的花樣規則，並在其右方描繪出更長的花樣。



解



例題 1

某筆直的大橋由入口處開始每隔 12 公尺就裝飾一個十二生肖的雕像，依次為鼠，牛，虎，兔，龍，蛇，馬，羊，猴，雞，狗，豬，…，不斷地重複。已知在橋的入口處(0 公尺處)為生肖鼠的雕像，若小甄現在站在離入口處 200 公尺的地方，請問離她最近的兩個雕像分別為什麼生肖？

解 因為每隔 12 公尺就有一個雕像，所以 $\dfrac{200}{12}\approx 16.7$，因此小甄站在入口處數來第 17 個和第 18 個雕像之間。第 13 個雕像為生肖鼠，故第 17 個雕像為生肖龍，第 18 個雕像為生肖蛇，因此離她最近的兩個雕像分別為生肖龍和蛇

隨堂練習 2

我們已某筆直的大橋由入口處開始每隔 12 公尺就裝飾一個十二生肖的雕像，依次為鼠，牛，虎，兔，龍，蛇，馬，羊，猴，雞，狗，豬，…，不斷地重複。已知在橋的入口處(0 公尺處)為生肖鼠的雕像，若小甄現在站在離入口處 200 公尺的地方拍了一張照片後接著繼續往前走，在她到達從入口處算起第 3 個生肖牛的時候又拍了一張照片。試問在兩次拍照之間她走了多少公尺？

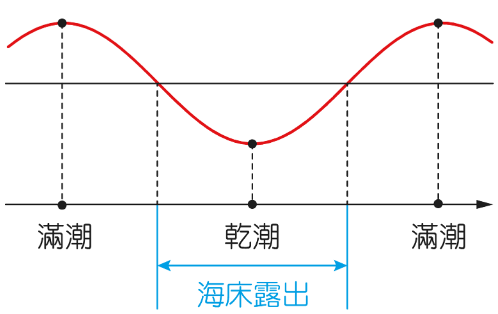
解 第三次看到牛時已經是第 26 個雕像了，

從第 1 個至第 26 個雕像共距離 $(26-1)\times 12=300$ 公尺，

故兩次拍照之間她走了 $300-200=100$ 公尺

例題 2

若小甄計畫在 6 月 4 日或 6 月 7 日其中一天的下午 3 點到 4 點至澎湖縣奎壁山地質公園的海中步道遊玩。已知海床露出期間如圖所示，其中海面上升至最高時稱為滿潮，下降至最低時稱為乾潮。而當地 6 月 1 日到 6 月 7 日的潮汐表(24 小時制)如表。為了安全考量，小甄要在乾潮後的一小時內離開此步道，請問她應該安排在哪一天到此處遊玩比較合適？



日期	滿潮	乾潮
6 月 1 日	09：50	16：20
6 月 2 日	10：29	16：59
6 月 3 日	11：06	17：38
6 月 4 日	11：46	18：15
6 月 5 日	12：21	18：53
6 月 6 日	13：00	19：30
6 月 7 日	13：47	20：19

解 由題表得知滿潮到乾潮約歷時 6 小時 30 分。

預估滿潮後的 3 小時 15 分為海床開始露出的時間，

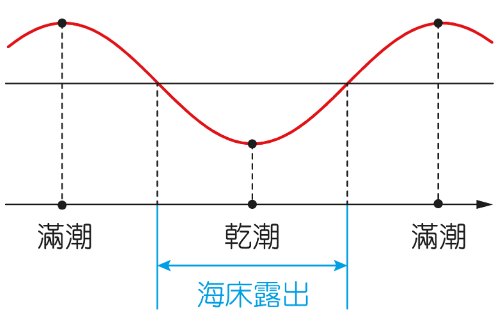
推估可參觀的時間如下表

日期	參觀時間
6 月 4 日	15：01～19：15
6 月 7 日	17：02～21：19

因此，小甄安排在 6 月 4 日到奎壁山地質公園遊玩比較合適

隨堂練習 3

若小甄計畫在 6 月 6 日下午 2 點到 3 點，3 點到 4 點，或下午 4 點到 5 點其中一時段至澎湖縣奎壁山地質公園的海中步道遊玩。已知海床露出期間如圖所示，其中海面上升至最高時稱為滿潮，下降至最低時稱為乾潮。而當地 6 月 1 日到 6 月 7 日的潮汐表(24 小時制)如表。為了安全考量，小甄要在乾潮後的一小時內離開此步道，試問哪一個時段比較有機會踏上海中步道？



日期	滿潮	乾潮
6 月 1 日	09：50	16：20
6 月 2 日	10：29	16：59
6 月 3 日	11：06	17：38
6 月 4 日	11：46	18：15
6 月 5 日	12：21	18：53
6 月 6 日	13：00	19：30
6 月 7 日	13：47	20：19

解 由題表得知滿潮到乾潮約歷時 6 小時 30 分。

預估滿潮後的 3 小時 15 分為海床開始露出的時間，

可推估 6 月 6 日可參觀的時間為 16：15～20：30。

可知小甄在下午 4 點到 5 點至此遊玩比較有機會踏上海中步道

2 正弦函數的圖形

- 正弦函數 $y=\sin x$

對於任意實數 x，我們可以將其視為 x 弳，並求出 $\sin x$ 的值。將 x 與 $\sin x$ 對應起來會得到一個函數的對應關係：

弧度量

$$x \to \sin x$$

我們將這個實數對應到實數的函數稱為正弦函數，並以 $f(x)=\sin x$ 記之。

隨堂練習 4

已知 $f(x)=\sin x$，試求下列各值，並四捨五入至小數點後第二位：

(1) $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$。　(2) $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$。　(3) $f\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$。

(4) $f(2)$。　(5) $f(5)$。

解 (1) $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\approx 0.866025403\approx 0.87$

(2) $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=0.50$

(3) $f\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)\approx -0.707106781\approx -0.71$

(4) $f(2) \approx 0.909297426 \approx 0.91$

(5) $f(5) \approx -0.958924274 \approx -0.96$

2 正弦函數的圖形

- 因為 $\sin(x+2\pi)=\sin x$，這表示圖形每經過 2π 單位後會重複出現。因此要描繪正弦函數圖形時，只要先畫出 $0\le x\le 2\pi$ 的圖形，而其他範圍的圖形，可利用 $0\le x\le 2\pi$ 的圖形複製得到，如此一來，我們就可以知道整個圖形的樣貌了。一般而言，對於函數 $f(x)$，如果存在一個常數 T，使得每個 x 都滿足 $f(x+T)=f(x)$，則我們稱 $f(x)$ 為週期函數。如果存在 T 是滿足 $f(x+T)=f(x)$ 的最小正數，則稱 T 為函數 $f(x)$ 的週期。

例題 3

已知函數 $f(x)=\sin x$，試利用計算機完成下表，並利用描點法描繪，在 $0\leq x\leq 2\pi$ 時，函數 $f(x)=\sin x$ 的圖形。（四捨五入至小數點後第二位）

例題 3

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π	
$\frac{\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{19\pi}{12}$			
$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$			
$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		$\frac{17\pi}{12}$		$\frac{23\pi}{12}$			

解 分別代入 x 值求出對應的函數值，如下表

x	$f(x)$
0	0.00
$\frac{\pi}{12}$	0.26
$\frac{\pi}{6}$	0.50
$\frac{\pi}{4}$	0.71
$\frac{\pi}{3}$	0.87
$\frac{5\pi}{12}$	0.97

x	$f(x)$
$\frac{\pi}{2}$	1.00
$\frac{7\pi}{12}$	0.97
$\frac{2\pi}{3}$	0.87
$\frac{3\pi}{4}$	0.71
$\frac{5\pi}{6}$	0.50
$\frac{11\pi}{12}$	0.26

x	$f(x)$
π	0.00
$\frac{13\pi}{12}$	-0.26
$\frac{7\pi}{6}$	-0.50
$\frac{5\pi}{4}$	-0.71
$\frac{4\pi}{3}$	-0.87
$\frac{17\pi}{12}$	-0.97

x	$f(x)$
$\frac{3\pi}{2}$	−1.00
$\frac{19\pi}{12}$	−0.97
$\frac{5\pi}{3}$	−0.87
$\frac{7\pi}{4}$	−0.71
$\frac{11\pi}{6}$	−0.50
$\frac{23\pi}{12}$	−0.26

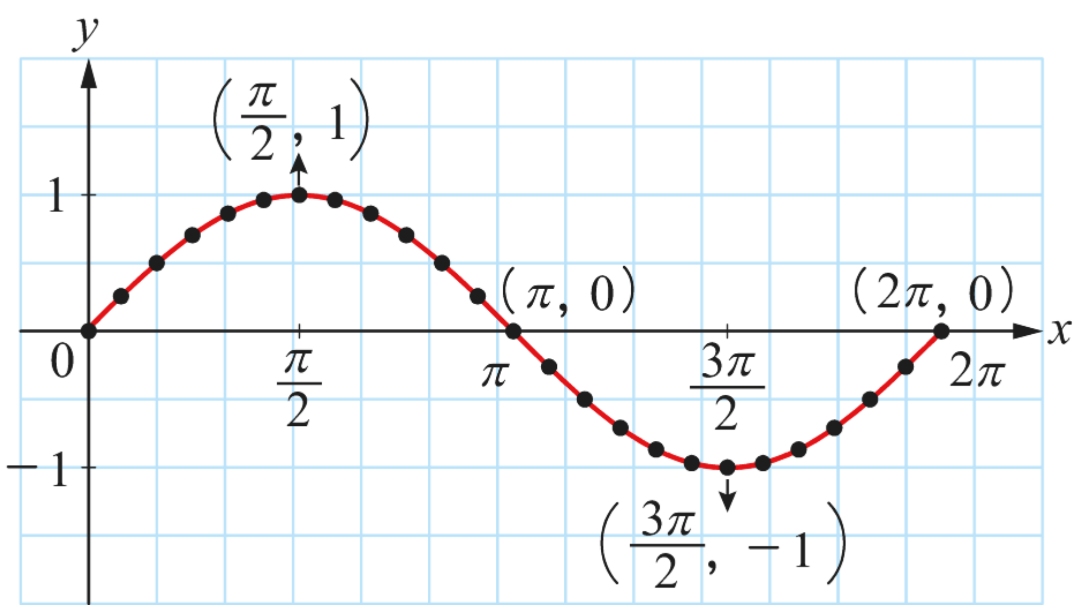
x	$f(x)$
2π	0.00

將 x 值當作橫坐標，所得的函數值 $y=f(x)$ 當作縱坐標。

分別將對應的點(x, y)標在坐標平面上，

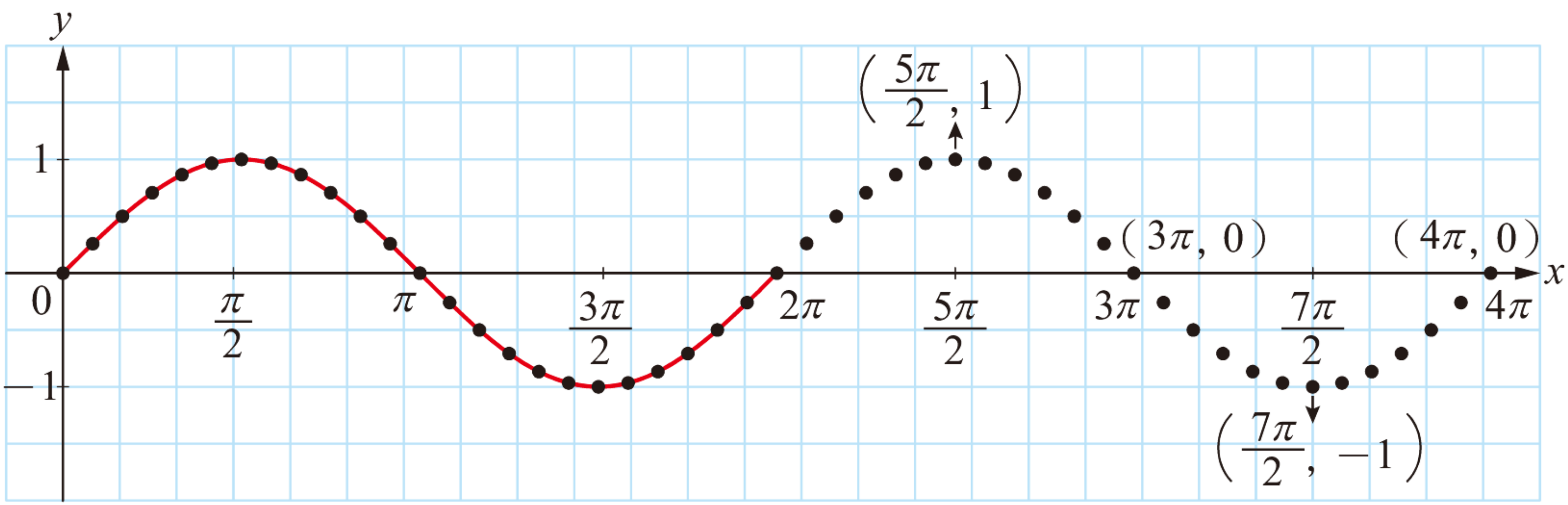
再以平滑曲線將這些點連接起來，

就可以得到函數 $f(x)=\sin x$ 的圖形，如下圖



隨堂練習 5

已知函數 $f(x)=\sin x$ 在 $2\pi \le x \le 4\pi$ 時的函數值如下表。試用平滑曲線接續連接函數 $f(x)=\sin x$ 的圖形。



隨堂練習 5

x	$f(x)$
2π	0.00
$\frac{25\pi}{12}$	0.26
$\frac{13\pi}{6}$	0.50
$\frac{9\pi}{4}$	0.71
$\frac{7\pi}{3}$	0.87
$\frac{29\pi}{12}$	0.97

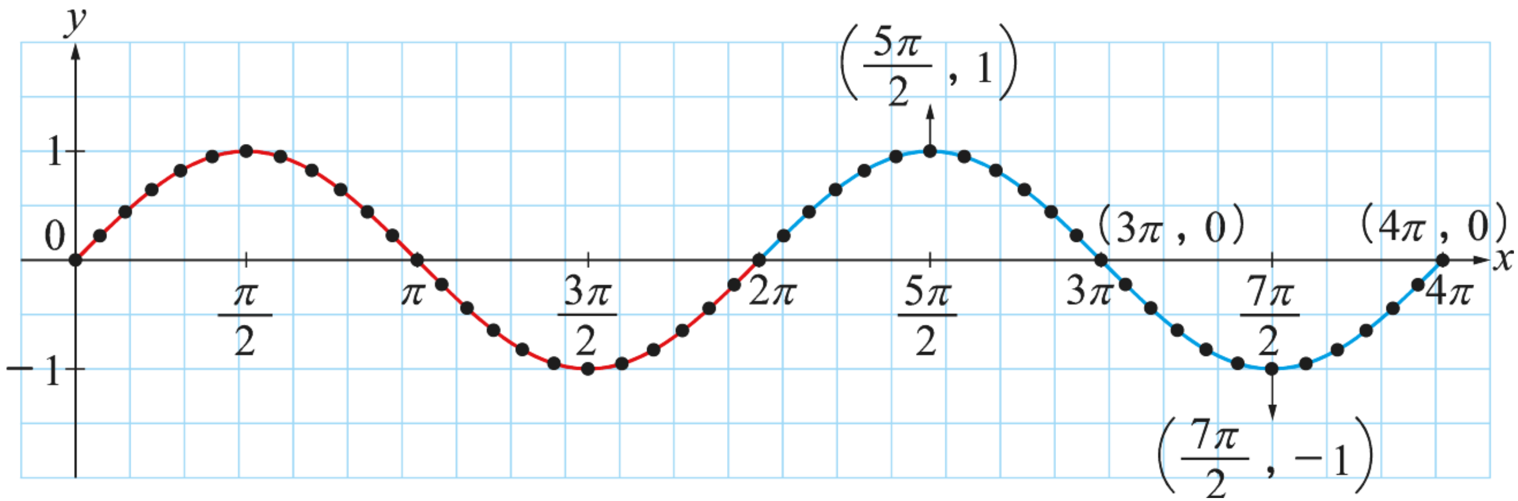
x	$f(x)$
$\frac{5\pi}{2}$	1.00
$\frac{31\pi}{12}$	0.97
$\frac{8\pi}{3}$	0.87
$\frac{11\pi}{4}$	0.71
$\frac{17\pi}{6}$	0.50
$\frac{35\pi}{12}$	0.26

x	$f(x)$
3π	0.00
$\frac{37\pi}{12}$	-0.26
$\frac{19\pi}{6}$	-0.50
$\frac{13\pi}{4}$	-0.71
$\frac{10\pi}{3}$	-0.87
$\frac{41\pi}{12}$	-0.97

x	$f(x)$
$\frac{7\pi}{2}$	−1.00
$\frac{43\pi}{12}$	−0.97
$\frac{11\pi}{3}$	−0.87
$\frac{15\pi}{4}$	−0.71
$\frac{23\pi}{6}$	−0.50
$\frac{47\pi}{12}$	−0.26

x	$f(x)$
4π	0.00

解



y
x
1
0
−1
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
3π
$\frac{7\pi}{2}$
4π
$\left(\frac{5\pi}{2}, 1\right)$
$(3\pi, 0)$
$(4\pi, 0)$
$\left(\frac{7\pi}{2}, -1\right)$

2 正弦函數的圖形

- 利用繪圖軟體可以得到正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形，如下圖 。觀察到正弦函數 $y = \sin x$ 的圖形在直線 $y = \pm 1$ 之間擺動，故將此兩條直線距離的一半(也就是 1)稱為正弦函數的振幅。且由於 $\sin(-x) = -\sin x$，即 $f(-x) = -f(x)$，其圖形對稱於原點。