

2 因式分解法解一元二次方程式

對應能力指標 A

將一元二次方程式整理成等號右邊為 0 的方程式後，若等號左邊的二次式利用因式分解的方法分成兩個一次式的乘積時，就可如前面的 **隨堂練習** 一樣，求此方程式的解。

搭配習作 P50 基礎題 4(1) 自評 P155 第 2 題

例 2 提單項公因式

解下列各一元二次方程式：

(1) $2x^2 - 5x = 0$

解 (1) $2x^2 - 5x = 0$ 提出公因式 x

$$x(2x - 5) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } 2x - 5 = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } x = \frac{5}{2}$$

此方程式的解為 0 與 $\frac{5}{2}$ 。

(2) $x^2 = 3x$

(2) $x^2 = 3x$

$$x^2 - 3x = 0$$

移項

提出公因式 x

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } x - 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } x = 3$$

此方程式的解為 0 與 3。

隨堂練習

解下列各一元二次方程式：

(1) $6x^2 + 2x = 0$

$$x(6x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } 6x + 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } x = -\frac{1}{3}$$

此方程式的解為 0 與 $-\frac{1}{3}$ 。

(2) $x^2 = -2x$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } x + 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } x = -2$$

此方程式的解為 0 與 -2。

由 **例 2** 及 **隨堂練習** 可知，如果一元二次方程式缺常數項（即常數項為 0），可提出公因式 x ，所以此類方程式必有一個解為 0。

例3 提公因式 $ax+b$

解一元二次方程式 $5x(3x+1)=2(3x+1)$ 。

$$5x(3x+1)=2(3x+1)$$

$$5x(3x+1)-2(3x+1)=0$$

移項

$$(3x+1)(5x-2)=0$$

提出公因式 $3x+1$

$$3x+1=0 \text{ 或 } 5x-2=0$$

$$x=-\frac{1}{3} \text{ 或 } x=\frac{2}{5}$$

此方程式的解為 $-\frac{1}{3}$ 與 $\frac{2}{5}$ 。

Thinking

小敏解 $5x(3x+1)=2(3x+1)$ 時，將等號兩邊同除以 $3x+1$ 得 $5x=2$ ，

只解出 $x=\frac{2}{5}$ ，這個作法對嗎？為什麼？

不對。

當 $3x+1=0$ 時，不可以兩邊同除以 $(3x+1)$ ；

因為當 $3x+1=0$ 時， $x=-\frac{1}{3}$ 也滿足 $5x(3x+1)=2(3x+1)$ ，

所以當兩邊同除以 $(3x+1)$ 時，會少了 $x=-\frac{1}{3}$ 這個解。

隨堂練習

解一元二次方程式 $(x-4)(5x-2)=-2(5x-2)$ 。

$$(x-4)(5x-2)=-2(5x-2)$$

$$(x-4)(5x-2)+2(5x-2)=0$$

$$(5x-2)[(x-4)+2]=0$$

$$(5x-2)(x-2)=0$$

$$5x-2=0 \text{ 或 } x-2=0$$

$$x=\frac{2}{5} \text{ 或 } x=2$$

此方程式的解為 $\frac{2}{5}$ 與 2 。



缺常
二次
一相
視學
說明
 ax^2-
 $x(a$
 $x=$
 $x=$



如
程
則
—
0



測
• 9
• 9

批

：配合
，以平
式來解
利用平
念來解
，則留
介紹。

例4 乘法公式

解下列各一元二次方程式：

(1) $(x+2)^2 - 1^2 = 0$

解 (1) $(x+2)^2 - 1^2 = 0$ 平方差公式

$$[(x+2)+1][(x+2)-1] = 0$$

$$(x+3)(x+1) = 0$$

$$x+3=0 \text{ 或 } x+1=0$$

$$x=-3 \text{ 或 } x=-1$$

此方程式的解為 -3 與 -1 。

(2) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = 0$$
 差的平方公式

$$(x-3)^2 = 0$$

$$(x-3)(x-3) = 0$$

$$x-3=0 \text{ 或 } x-3=0$$

$$x=3 \text{ 或 } x=3$$

此方程式的解為 3 (重根)。

也可以利用十字交乘法

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\begin{array}{r} x & \times & -3 \\ & & -3 \\ \hline -3x & - & 3x = -6x \end{array}$$

例4 第(2)題的方程式 $x^2 - 6x + 9 = 0$ ，左式是同一個一次式 $x-3$ 自乘兩次，該把解寫成 $x=3, 3$ 。像這種情況，此方程式的解 $x=3$ 是一個**重根**，表示同一重複出現。

隨堂練習

解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2 - 1 = 0$

$$(x+1)(x-1) = 0$$

$$x+1=0 \text{ 或 } x-1=0$$

$$x=-1 \text{ 或 } x=1$$

此方程式的解為 -1 與 1 。

(2) $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$x=-2 \text{ 或 } x=-2$$

此方程式的解為 -2 (重根)。

例5

解下

(1) $3x$

解

(1) $3x$

(2)

$3x$

x

此

(2) $($

x

x

(

x

x

此

隨

解下

(1) 5

5

(

x

x

此

例5 十字交乘法

搭配習作 P51 基礎題 4(4)、5 自評 P156 第 2 題(6)~(8)

解下列各一元二次方程式：

(1) $3x^2 + 11x + 6 = 0$

(2) $(x+2)(x-4) = 7$

解

(1) $3x^2 + 11x + 6 = 0$

$(3x+2)(x+3) = 0$

$3x+2=0$ 或 $x+3=0$

$x = -\frac{2}{3}$ 或 $x = -3$

此方程式的解為 $-\frac{2}{3}$ 與 -3 。

$$\begin{array}{r} 3x \quad +2 \\ x \quad +3 \\ \hline 2x \quad + \quad 9x = 11x \end{array}$$

(2) $(x+2)(x-4) = 7$

$x^2 - 4x + 2x - 8 = 7$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$(x-5)(x+3) = 0$

$x-5=0$ 或 $x+3=0$

$x=5$ 或 $x=-3$

此方程式的解為 5 與 -3 。

展開

移項合併

$$\begin{array}{r} x \quad -5 \\ x \quad +3 \\ \hline -5x \quad + \quad 3x = -2x \end{array}$$

隨堂練習

解下列各一元二次方程式：

(1) $5x^2 + 3x = 14$

$5x^2 + 3x - 14 = 0$

$(x+2)(5x-7) = 0$

$x+2=0$ 或 $5x-7=0$

$x = -2$ 或 $x = \frac{7}{5}$

此方程式的解為 -2 與 $\frac{7}{5}$ 。

$$\begin{array}{r} x \quad +2 \\ 5x \quad -7 \\ \hline 10x \quad - \quad 7x = 3x \end{array}$$

(2) $(x+2)(x-1) = 10$

$x^2 + x - 2 = 10$

$x^2 + x - 12 = 0$

$(x+4)(x-3) = 0$

$x+4=0$ 或 $x-3=0$

$x = -4$ 或 $x = 3$

此方程式的解為 -4 與 3 。

$$\begin{array}{r} x \quad +4 \\ x \quad -3 \\ \hline 4x \quad - \quad 3x = x \end{array}$$