2-1 點、直線與圓之間的位置關係

過去我們已經認識一些平面幾何圖形及其性質，如三角形、平行四邊形、梯形等。接下來，我們要介紹另一個常見的平面圖形。

主題 1 圓

1 這裡提到圓的定義：圓可以看成是與圓心距離相等的所有點所組成的圖形。對學生而言這樣的概念很抽象，因此教師要適時的引導學生建立概念。

2 學生第一次接觸弦、弧、弓形、圓心角等名詞，請教師確認學生都能了解這些名詞的定義。

圓 [1]

在平面上，與一個固定點距離相等的所有點，組成的圖形稱為圓。這個固定點稱為圓心，圓心到圓上任一點的連線段稱為半徑。如圖 1，O 點是圓 O 的圓心，$\overline{OA}$ 是圓 O 的半徑。

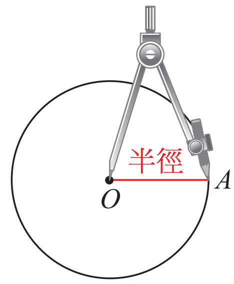


圖 1

弦

將圓上相異兩點所連接的線段稱為弦，通過圓心的弦稱為直徑，而直徑是該圓最長的弦。如圖 2，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 都是弦，其中 $\overline{CD}$ 為直徑。

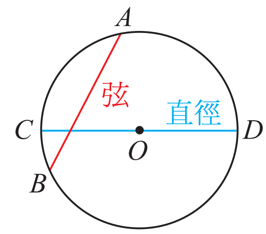


圖 2

弧 [2]

每一條弦都會將圓分成兩部分，每一部分都稱為弧。當弦為直徑時，這兩個弧會一樣大，稱為半圓。如果弦不是直徑，弧就不一樣大，其中較大的弧稱為優弧，較小的弧稱為劣弧。如圖 3，$\overline{AB}$ 將圓分成大小兩弧，兩弧皆可記為 $\overset{\frown}{AB}$，但為了加以區別，通常將劣弧表示為 $\overset{\frown}{AB}$；而優弧可在弧上另取一點 C，表示為 $\overset{\frown}{ACB}$。$\overset{\frown}{AB}$ 除了可用來表示這段弧，也可以表示它的長度。

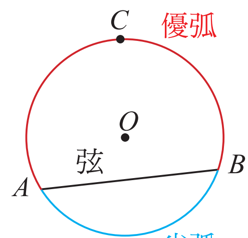


圖 3

學習內容

S-9-5 **圓弧長與扇形面積**：以 π 表示圓周率；弦、圓弧、弓形的意義；圓弧長公式；扇形面積公式。

S-9-6 **圓的幾何性質**：圓心角、圓周角與所對應弧的度數三者之間的關係；圓內接四邊形對角互補；切線段等長。

S-9-7 **點、直線與圓的關係**：點與圓的位置關係（內部、圓上、外部）；直線與圓的位置關係（不相交、相切、交於兩點）；圓心與切點的連線垂直此切線（切線性質）；圓心到弦的垂直線段（弦心距）垂直平分此弦。

新綱異動　+ 新增或搬移；− 刪除或搬移

+ 弧長與扇形面積	將原八年級課程內容，移至九年級做教學。
− 兩圓的位置關係、內公切線、外公切線、圓外切四邊形的性質	根據課程綱要之學習內容 S-9-6，刪除相關教學內容。

弓形

圓的一弦將圓分成兩個弧，此弦與任一弧所圍成的圖形稱為弓形，如圖 4。

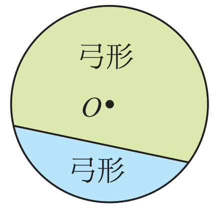


圖 4

圓心角

以圓心為頂點，兩半徑為邊所夾的角，稱為圓心角。
2 如圖 5，∠1、∠2 都是圓心角。

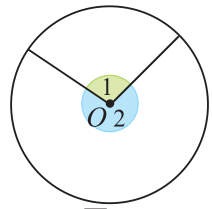


圖 5

扇形

在圓上，兩半徑與一弧所圍成的圖形，稱為扇形。如圖 6，半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 將圓分成兩個扇形，在沒有特別指定下，我們所說的扇形 AOB 通常是指圓心角較小的扇形，如圖 6 中的藍色部分。

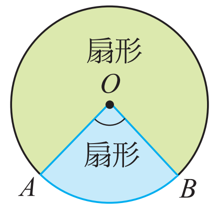
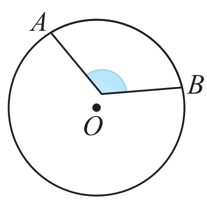
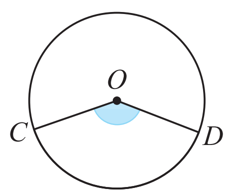


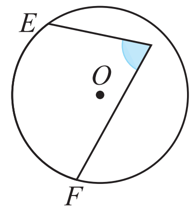
圖 6

隨堂練習

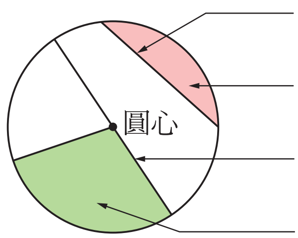
1. 下列各角何者是圓 O 的圓心角？答：__(B)__。

(A)


(B)


(C)


2. 在下列空格中填入適當名稱。



連接圓上任兩點的線段：__弦__。

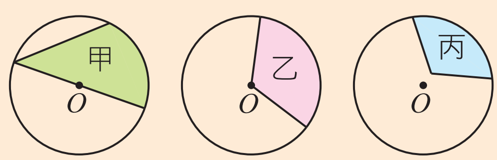
圓的一弦和一弧所圍成的圖形：__弓形__。

通過圓心的弦：__直徑__。

兩半徑和一弧所圍成的圖形：__扇形__。

重新布題

如右圖，甲是由一條直徑、一條弦及一圓弧所圍成的綠色圖形；乙是由兩條半徑與一圓弧所圍成的粉紅色圖形；丙是由不過圓心 O 的兩線段與一圓弧所圍成的藍色圖形。下列關於此三圖形的敘述何者正確？　　【93 年第一次基本學測】



(A) 只有甲是扇形　　(B) 只有乙是扇形

(C) 只有丙是扇形　　(D) 只有乙、丙是扇形

數位備課

答：(B)

歐拉
(*Leonhard Euler*，西元 1707～1783 年)，瑞士數學家與物理學家，史上獨自產出最多作品的一位數學家。雖不是使用 π 作為圓周率符號的第一人，但將此符號傳遍歐洲。

弧長與扇形面積

我們在國小時學過圓周長和圓面積的公式：

圓周長＝直徑×圓周率；圓面積＝半徑×半徑×圓周率。

其中圓周率[1]是「圓周長與直徑的比值」，約為 3.14。

事實上，圓周率無法以有限小數或分數來表示，在數學上以符號「π」(讀作「ㄆㄞ」) 來表示它。當一圓的半徑為 r，可得：

圓周長＝$2r\times\pi=2\pi r$；圓面積＝$r\times r\times\pi=\pi r^2$。

此時，弧長與扇形面積又該如何計算呢？

課外探索 P.195
◆弳 (弧度)
◆扇形周長及面積

1 教師可視教學時間介紹有關圓周率「π」的由來。

如圖 7，圓心角 $\angle AOB=x^\circ$，由於周角是 360°，

因此 $\angle AOB$ 是周角的 $\dfrac{x}{360}$ 倍，

所以 $\angle AOB$ 所對的 $\overset{\frown}{AB}$ 長度就是圓周長的 $\dfrac{x}{360}$ 倍。

所夾的扇形 AOB 面積就是圓面積的 $\dfrac{x}{360}$ 倍。也就是說：

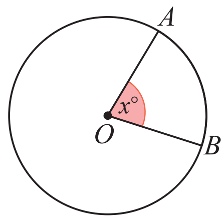


圖 7

Key point

弧長與扇形面積

當一圓的半徑為 r，其中一弧所對應的圓心角為 x°，則：

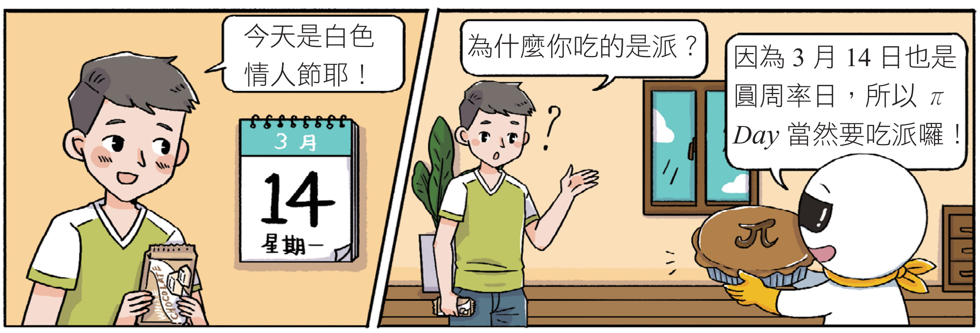
(1) 弧長＝圓周長×$\dfrac{x}{360}=2\pi r\times\dfrac{x}{360}$。

(2) 扇形面積＝圓面積×$\dfrac{x}{360}=\pi r^2\times\dfrac{x}{360}$。

數學好好玩　圓周率 π

你知道嗎？

π 為希臘文「圓周」的第一個字母，音近似「派」。因近似值為 3.14，人們將每年的 3 月 14 日訂為 π 日。



重新布題

已知圓 O 的半徑為 4 公分，圓心角 $\angle AOB=180^\circ$，則：

(1) 扇形 AOB 的周長為多少公分？

(2) 扇形 AOB 的面積為多少平方公分？

答：(1) ($8+4\pi$) 公分　(2) 8π 平方公分

例 1 求弧長、扇形周長和面積 學習內容 *S*-9-5

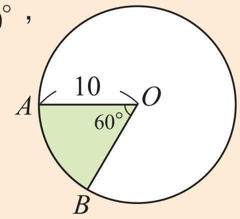
◆搭配習作 *P*.25 第 1 題

如右圖，圓 O 的半徑為 10 公分，圓心角 $\angle AOB=60^\circ$，

則：(1) $\overset{\frown}{AB}$ 的長度為多少公分？

(2) 扇形 AOB 的周長為多少公分？

(3) 扇形 AOB 的面積為多少平方公分？



計算機操作

可以利用計算機上的 π 鍵，求出含有圓周率的近似值喔！

解 (1) $\overset{\frown}{AB}$ 的長度 $=2\pi\times10\times\dfrac{60}{360}$

$=\dfrac{10}{3}\pi$ (公分)

(2) 扇形 AOB 的周長 $=\overset{\frown}{AB}+\overline{OA}+\overline{OB}$

$=\dfrac{10}{3}\pi+10+10$

$=\dfrac{10}{3}\pi+20$ (公分)

(3) 扇形 AOB 的面積 $=\pi\times10^2\times\dfrac{60}{360}$

$=\dfrac{50}{3}\pi$ (平方公分)

Hint

扇形周長＝弧長＋半徑×2。

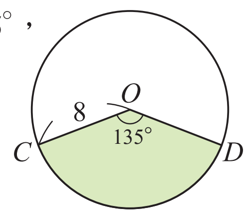
隨堂練習

如右圖，圓 O 的半徑為 8 公分，圓心角 $\angle COD=135^\circ$，

則：(1) $\overset{\frown}{CD}$ 的長度為多少公分？

(2) 扇形 COD 的周長為多少公分？

(3) 扇形 COD 的面積為多少平方公分？



(1) $\overset{\frown}{CD}$ 的長度 $=2\pi\times8\times\dfrac{135}{360}=6\pi$ (公分)

(2) 扇形 COD 的周長 $=\overset{\frown}{CD}+\overline{OC}+\overline{OD}=6\pi+8+8=6\pi+16$ (公分)

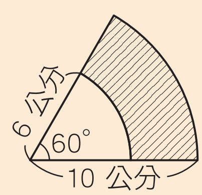
(3) 扇形 COD 的面積 $=\pi\times8^2\times\dfrac{135}{360}=24\pi$ (平方公分)

有些計算機上會有 π 的按鍵，這就代表圓周率的意思。

(操作方式可參閱書末 *P*.V～VI「計算機使用說明」)

重新布題

如右圖，兩扇形之間所圍成斜線部分的周長為多少公分？面積為多少平方公分？



答：周長為 ($8+\dfrac{16}{3}\pi$) 公分

面積為 $\dfrac{32}{3}\pi$ 平方公分

例 2

已知扇形面積或弧長求圓心角 學習內容 S-9-5

1 例 2 第(1)題是由已知的扇形面積反求扇形的圓心角，學生一開始可能不知如何下手，教師宜仔細引導。

2 例 2 第(2)題則是由已知的扇形弧長反求扇形的圓心角，學生必須求出弧長占圓周長的幾分之幾，進而求出扇形圓心角，請教師一步一步引導學生解題。

(1) 已知一扇形的面積為 48π 平方公分，半徑為 12 公分，求此扇形的圓心角。

(2) 已知半徑為 15 公分的圓中，有一弧長為 5π 公分，求此弧所對應的圓心角。

解 (1) 假設圓心角為 x°，

$$\pi\times 12^2\times\frac{x}{360}=48\pi，$$

得 $x=120$，

所以圓心角為 120°。

(2) 假設圓心角為 y°，

$$2\pi\times 15\times\frac{y}{360}=5\pi，$$

得 $y=60$，

所以圓心角為 60°。

Hint

也可以這樣算：

圓面積＝$\pi\times 12^2=144\pi$，

扇形面積占圓面積的 $\frac{48\pi}{144\pi}=\frac{1}{3}$，

所以此扇形的圓心角＝$360^\circ\times\frac{1}{3}=120^\circ$。

隨堂練習

(1) 已知一扇形的面積為 2π 平方公分，半徑為 4 公分，求此扇形的圓心角。

(2) 已知半徑為 9 公分的圓中，有一弧長為 2π 公分，求此弧所對應的圓心角。

(1) 假設圓心角為 x°

$\pi\times 4^2\times\frac{x}{360}=2\pi$

得 $x=45$

所以圓心角為 45°

(2) 假設圓心角為 y°

$2\pi\times 9\times\frac{y}{360}=2\pi$

得 $y=40$

所以圓心角為 40°

重新布題

已知一扇形面積為 27π 平方公分，半徑為 9 公分，求此扇形的圓心角？

答：120°

重新布題

如右圖，圓 O 半徑為 6 公分，已知扇形 AOB 的弧長為 $\frac{23}{3}\pi$ 公分，求此扇形的圓心角 $\angle AOB$＝？

答：230°