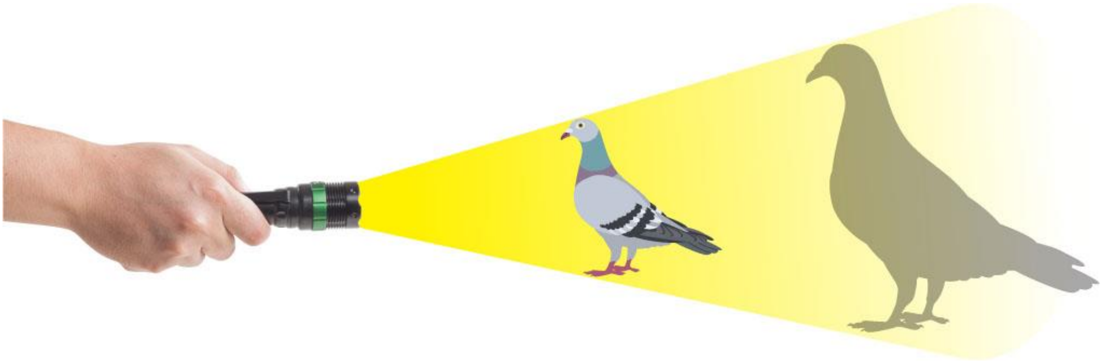
1-3 相似多邊形

1 圖形的縮放 可搭配附件 1 操作

對應能力指標 S-9-1

每個物件經放大或縮小後，雖然大小和實物不同，但其形狀是相同的。用手電筒（光源）照射動物圖案，會在牆上看到它的影子，兩者的形狀相同，但大小不同。

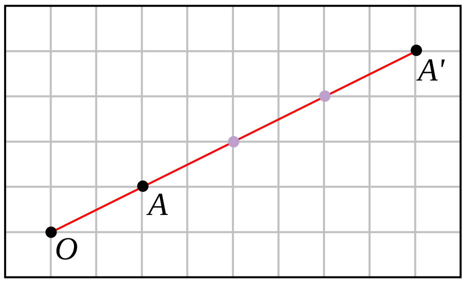
因此，我們可以將手電筒光源視為縮放中心，經過光源直線照射動物圖案的影子，就是此動物圖案的縮放圖形。



為了說明這個原理，我們先來了解以某固定點為縮放中心，任一點到此固定點距離的縮放關係。

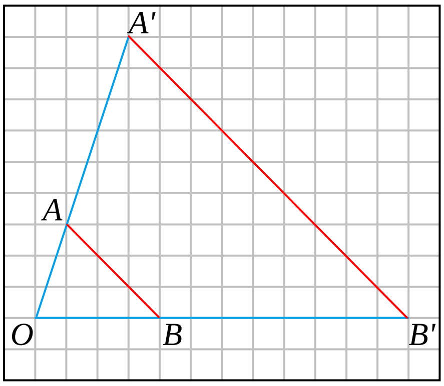
▶線段的縮放

在平面上找一點 O，視為光源固定不動，接著任取一點 A，如右圖，在 $\overrightarrow{OA}$ 上取一點 A'，使得 $\overline{OA'}：\overline{OA}=4：1$，即 $\overline{OA'}$ 是 $\overline{OA}$ 的 4 倍。此時就稱 A' 點是以 O 點為縮放中心，將 A 點與 O 點的距離縮放 4 倍所得到的對應點。



P41

如圖，$\overline{AB}$ 為一已知線段，A'、B' 兩點是以 O 點為縮放中心，將 A、B 兩點與 O 點的距離分別縮放 3 倍所得到的對應點，並連接 $\overline{A'B'}$，那麼 $\overline{A'B'}$ 和 $\overline{AB}$ 有什麼關係？我們先說明 **$\overline{A'B'}$ // $\overline{AB}$ 且 $\overline{A'B'}$ 是 $\overline{AB}$ 的 3 倍**。



說明

$\because$ $\overline{OA}$ ： $\overline{OA'}$ ＝ $\overline{OB}$ ： $\overline{OB'}$ ＝1：3，

$\therefore$ $\overline{AB}$ // $\overline{A'B'}$（截線段與平行的判別）。

故 $\overline{AB}$ ： $\overline{A'B'}$ ＝ $\overline{OA}$ ： $\overline{OA'}$ ＝1：3（平行線截比例線段性質），因此 $\overline{A'B'}$ 是 $\overline{AB}$ 的 3 倍。

線段的縮放，就是以某固定點（O 點）為縮放中心，將線段上的每一個點與縮放中心 O 點的距離縮放 r 倍後的結果。接下來，我們將探討 $\overline{AB}$ 每一點與 O 點的距離，縮放 3 倍的圖形與 $\overline{A'B'}$ 的關係。

【探索活動】線段的縮放

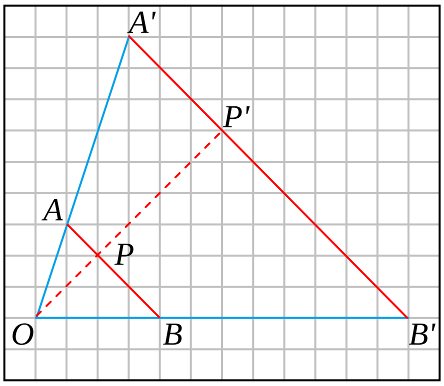
1. 如圖，若 P 為 $\overline{AB}$ 上的任一點，且 P' 點是以 O 點為縮放中心，將 P 點與 O 點的距離縮放 3 倍所得的對應點，則：

   (1) $\overline{OP'}$ 的長度是否為 $\overline{OP}$ 的 3 倍？

   是。

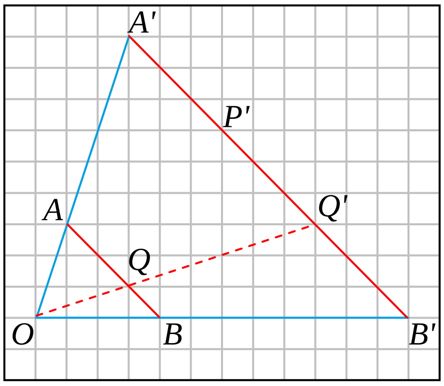
   (2) 以 O 為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 上的每一點與 O 點的距離縮放 3 倍後得到的點會在 $\overline{A'B'}$ 上嗎？

   會。



2. 如圖，若 Q' 為 $\overline{A'B'}$ 上的任一點，連接 $\overline{OQ'}$ 與 $\overline{AB}$ 交於一點 Q，若以 O 點為縮放中心，將 Q 點與 O 點的距離縮放 3 倍所得的對應點是 Q' 嗎？

   是。

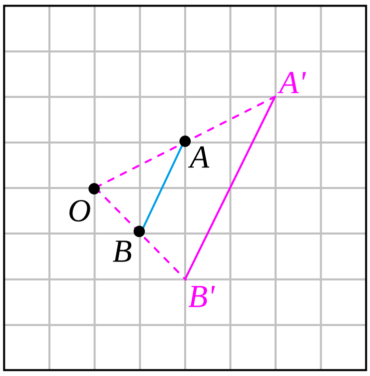


P42

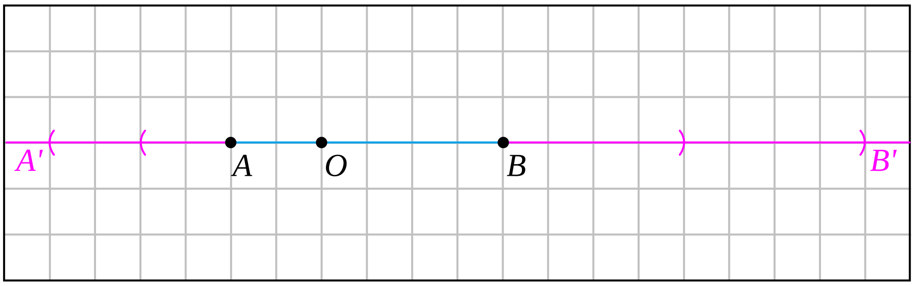
由前頁的探索活動可知，**以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 上的點與 O 點的距離縮放 3 倍後的點都會在 $\overline{A'B'}$ 上，且在 $\overline{A'B'}$ 上的任一點 Q'，都可以在 $\overline{AB}$ 上找到一點 Q，使得 Q 點與 O 點的距離縮放 3 倍後的點是 Q'。此時 $\overline{AB}$ 縮放 3 倍後的圖形就是 $\overline{A'B'}$，其中 $\overline{A'B'}=3\overline{AB}$ 且 $\overline{A'B'}\,/\!/\,\overline{AB}$，我們稱 $\overline{A'B'}$ 為 $\overline{AB}$ 的 3 倍縮放圖形**。

隨堂練習

1. 如圖，O 點不在 $\overline{AB}$ 上，畫出以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 2 倍後的圖形。
   $\overline{A'B'}$ 即為所求。



2. 如圖，O 點在 $\overline{AB}$ 上，畫出以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 3 倍後的圖形。



   $\overline{A'B'}$ 即為所求。

【縮放的性質】

1. 一線段經過縮放後仍是線段，且該線段與原線段平行，或在同一直線上。
2. 線段縮放 k 倍後，縮放後的線段長為原線段長的 k 倍。

同理，一射線經過縮放後的圖形仍是射線，且該射線與原射線平行或在同一直線上；一直線經過縮放後的圖形仍是直線，且該直線與原直線平行或兩直線重合。

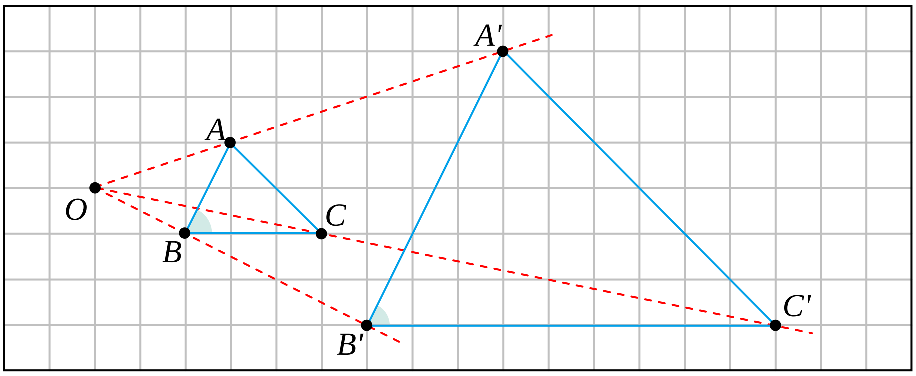
P43

▶多邊形的縮放

一個多邊形經過縮放後，其內角的度數與邊長會有什麼變化呢？我們先以三角形為例進行探索。

【探索活動】三角形的縮放

如圖，已知△ABC 及外部一點 O，以 O 點為縮放中心，分別將 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 縮放 3 倍後，得到△$A'B'C'$，則稱△$A'B'C'$ 是△ABC 的 3 倍縮放圖形。



(1) ∠OBA 與∠$OB'A'$ 是否相等？為什麼？

∵縮放後的線段與原線段平行，即 $\overline{AB}$ // $\overline{A'B'}$ ，

∴∠OBA＝∠$OB'A'$（同位角相等）。

(2) ∠OBC 與∠$OB'C'$ 是否相等？為什麼？

∵縮放後的線段與原線段平行，即 $\overline{BC}$ // $\overline{B'C'}$ ，

∴∠OBC＝∠$OB'C'$（同位角相等）。

(3) ∠ABC 與∠$A'B'C'$ 是否相等？為什麼？

∠ABC＝∠OBC－∠OBA

＝∠$OB'C'$－∠$OB'A'$

＝∠$A'B'C'$。

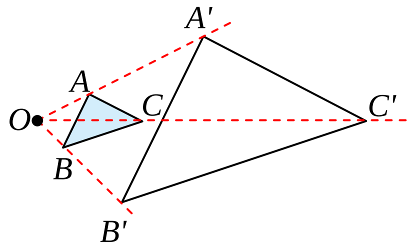
由探索活動可知，將一個△ABC 的圖形縮放 3 倍後得到△$A'B'C'$，則∠BAC＝∠$B'A'C'$、∠ABC＝∠$A'B'C'$、∠ACB＝∠$A'C'B'$。即三內角經過縮放後，其角度皆不變，且其三邊長都放大 3 倍，所以對應邊成比例。

P44

當三角形的縮放中心在不同位置，縮放相同倍率後，所得到的三角形是否會全等？我們以下面的例子來說明：

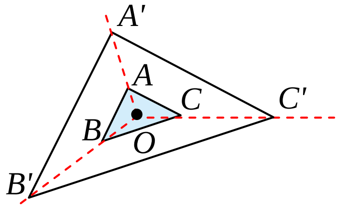
自評 P59 第 1 題

如圖一，縮放中心 O 點在三角形的外部，將△ABC 縮放 3 倍後，所得的新三角形為△$A'B'C'$。取出附件 3，而附件 3 中的△$A'B'C'$為圖一的△$A'B'C'$。接下來，我們利用附件進行下列活動：

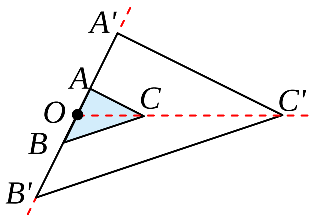


圖一 O 點在三角形外部

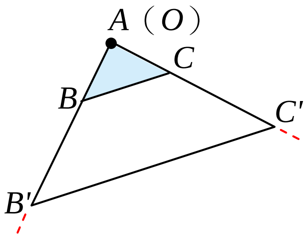
若將縮放中心 O 點改在其它的位置，把同一個△ABC 縮放 3 倍後，所得的新三角形如圖二、圖三、圖四。接著將附件 3，依序與這三個新三角形疊合，可發現它們都與附件 3 的△$A'B'C'$全等。



圖二 O 點在三角形內部



圖三 O 點在三角形邊上



圖四 O點在三角形的頂點

由前面的說明可知，**縮放中心 O 點在不同的位置，將同一個△ABC 縮放 3 倍後，所得的新三角形都會全等，它們與△ABC 的對應角皆不變、對應邊成比例**。