積分

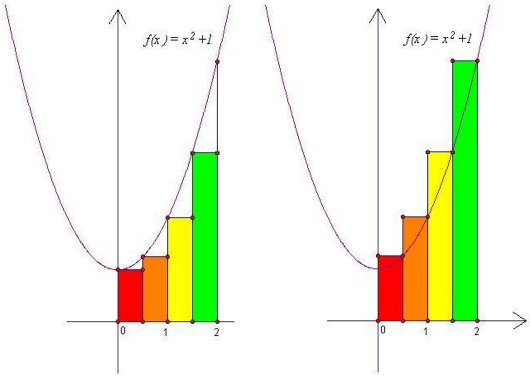
積分基本精神：寬切的夠細就能算成面積、薄片疊成體積；誤差無限小。
一、非負多項函數的黎曼和 1.定義 設$f(x)$為區間$[a,b]$上的多項函數，且$f(x)\geq 0$ 將區間$[a,b]$分成 n 分，分割為$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$， 在$[x_{k-1},x_k]$區間內任取$t_k$，以$[x_{k-1},x_k]$為底，以$f(t_k)$為高，可得矩形， n 個矩形和$\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\cdot(x_k-x_{k-1})$定義為 $f(x)$在區間$[a,b]$上對於分割點$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$的黎曼和 2.使$n\to\infty$且使每組$x_k-x_{k-1}\to 0$，黎曼和會愈趨近函數曲線下的面積 3.在$[a,b]$內，由$y=f(x),y=0,x=a,x=b$圍成的面積 R 等於黎曼和的極限 4.為方便起見，令區間$[a,b]$上的分割點$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$均為等分，即$x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}$ 5.$R=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\cdot\frac{b-a}{n}$
二、非負多項函數的黎曼積分求法的四部曲(利用分割及逼近的方法求面積)： 欲求由$y=f(x),y=0,x=a,x=b$所圍成區域的面積之步驟如下： 1、分割： 將起點$(a,0)$至終點$(b,0)$之間 n 等分，過每個等分點作鉛垂線，割成 n 個區域。 2、取樣： 對每個長條作出它的下矩形與上矩形，底長均=$\frac{b-a}{n}$ 假設 n 個下矩形的高依次為$m_1,m_2,\cdots,m_n$， 假設 n 個上矩形的高依次為$M_1,M_2,\cdots,M_n$， 3、求和： 黎曼下和$=L_n=\frac{b-a}{n}\times(m_1+m_2+\cdots+m_n)$ 黎曼上和$=U_n=\frac{b-a}{n}\times(M_1+M_2+\cdots+M_n)$ 4、極限： 因L_n≦區域面積≦U_n。若$\lim\limits_{n\to\infty}L_n=\lim\limits_{n\to\infty}U_n=S$，則區域面積=$S$。 註：$m_k$是函數 $f(x)$在閉區間$[a+\frac{(k-1)(b-a)}{n},a+\frac{k(b-a)}{n}]$上的最小值， M_k是函數 $f(x)$在閉區間$[a+\frac{(k-1)(b-a)}{n},a+\frac{k(b-a)}{n}]$上的最大值
三、多項函數的黎曼和(可正可負) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\cdot\frac{b-a}{n}$為 由$y=f(x),y=0,x=a,x=b$圍成的區域 在 x 軸上方部分的面積和減去在 x 軸下方部分的面積和

四、黎曼和求面積、體積實例

1、曲線$y = f(x) = x^2 + 1, y = 0, x = 0, x = 2$圍成之區域面積

(1)若把[0,2]區間四等分，

求其上和 U_4 及下和 L_4。



$$U_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{4} + \frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{23}{4}$$

$$L_4 = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{4} = \frac{15}{4}$$

(2)若把[0,2]區間 n 等分，求其上和 U_n。

$$U_n = \frac{2}{n}\left\{\left[(\frac{2}{n})^2 + 1\right] + \left[(\frac{4}{n})^2 + 1\right] + \left[(\frac{6}{n})^2 + 1\right] + \cdots + \left[(\frac{8}{n})^2 + 1\right]\right\}$$

$$= \frac{2}{n}\left\{\left[(\frac{2}{n})^2\right] + \left[(\frac{4}{n})^2\right] + \left[(\frac{6}{n})^2\right] + \cdots + \left[(\frac{8}{n})^2\right] + n\right\}$$

$$= 2 + \frac{2}{n}\frac{4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)}{n^2}$$

$$= 2 + \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= 2 + \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3)若把[0,2]區間 n 等分，求其下和 L_n。

$$\ln = \frac{2}{n}\left\{\left[\left(\frac{0}{n}\right)^2 + 1\right] + \left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 + 1\right] + \left[\left(\frac{4}{n}\right)^2 + 1\right] + \cdots + \left[\left(\frac{2n-2}{n}\right)^2 + 1\right]\right\}$$

$$= \frac{2}{n}\left\{\left[\left(\frac{0}{n}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{2}{n}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{4}{n}\right)^2\right] + \cdots + \left[\left(\frac{2n-2}{n}\right)^2\right] + n\right\}$$

$$= 2 + \frac{2}{n}\frac{4(0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2)}{n^2}$$

$$= 2 + \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= 2 + \frac{8}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

(4)求 $\lim_{n\to\infty} U_n$與 $\lim_{n\to\infty} L_n$。

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left[2 + \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = 2 + \frac{16}{6} = \frac{14}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty}\left[2 + \frac{8}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right] = 2 + \frac{16}{6} = \frac{14}{3}$$

(5)求曲線$y = x^2 + 1$與 y=0、x=0、x=2圍成之區域面積 A。

$\because L_n \le A \le U_n$，根據夾擠原理，$\lim_{n\to\infty} L_n \le A \le \lim_{n\to\infty} U_n \therefore A = \frac{14}{3}$