

B1-1-2 式的運算

重點整理

一、常用的乘法公式

1. $(a+b)^2 =$ _____
2. $(a-b)^2 =$ _____
3. $a^2 - b^2 =$ _____ (平方差)
4. $(a+b+c)^2 =$ _____
5. $(a+b)^3 =$ _____
6. $(a-b)^3 =$ _____
7. $a^3 + b^3 =$ _____ (立方和)
8. $a^3 - b^3 =$ _____ (立方差)

二、根式的基本性質

1. 當 $a, b \geq 0$ 時，
 - (1) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} =$ _____
 - (2) $\sqrt{\frac{a}{b}} =$ _____ (此時 $b \neq 0$)
2. 設 a 為任意實數，則 $\sqrt{a^2} =$ _____

三、雙重根式

設 $a, b \geq 0$ 且 $a \geq b$ ，則：

- (1) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} =$ _____
- (2) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} =$ _____

四、算幾不等式

- (1) 設 $a, b \geq 0$ ，則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，等號只在 _____ 時成立
- (2) $\frac{a+b}{2}$ 稱為 _____， \sqrt{ab} 稱為 _____

(證明一)

(證明二)

基礎題

1. (1) 展開並化簡 $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$ 。

(2) 展開並化簡 $(3a+b)^3$ 。

(3) 因式分解 $8x^3+27$ 。

(4) 計算 1001^2-999^2 。

2. 試化簡下列各式：

(1) $\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$ 。

(2) $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}-\frac{x^2}{x^2-3x}$ 。

(3) $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}-2$ 。

3. 試化簡下列各式：

(1) $\sqrt{75}-\sqrt{27}$ 。

(2) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ 。

(3) $\sqrt{19+8\sqrt{3}}$ 。

(4) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ 。

4. 設 x, y 是實數，已知 $x+y=5$ ， $x^2-y^2=15$ ，試求下列各式的值：

(1) $x-y$ 。

(2) x^2+y^2 。

5. 設 $a>0, b>0$ 且 $3a+4b=12$ ，試求：

(1) ab 的最大值。

(2) 承(1)，此時 a, b 之值為何？

進階題

6. 設 $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ，試求下列各式的值：

(1) $x + \frac{1}{x}$ 。

(2) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 。

(3) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 。

7. 設 $\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$ ，試求 x 的值。

8. 設實數 x, y 滿足 $x+y=3$ ， $x^2+y^2=5$ ，試求 x^3+y^3 的值。

9. 實數 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，試求 $\frac{1}{b} + \frac{7}{a+b}$ 的值。

10. 如右圖，在以 \overline{AB} 為直徑的半圓中， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ，已知 $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{BC} = 2$ ，試求 $\triangle ABD$ 的面積。

