

4

一元二次方程式

4-1 因式分解一元二次方程式

4-2 配方法與公式解

4-3 應用問題

Are You Ready?

+++ 一元一次方程式

解下列各一元一次方程式。

(1) $12 = -3x - 3$ ，解得 $x = \underline{-5}$ 。

(2) $2x - 9 = -5x + 12$ ，解得 $x = \underline{3}$ 。

+++ 平方根

下列敘述正確的打「○」，錯誤的打「×」。

(○) (1) 16 的平方根是 4 和 -4。

(○) (2) $\sqrt{5}$ 和 $-\sqrt{5}$ 是 5 的平方根。

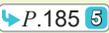
(○) (3) 若 x 是 7 的平方根，則 $x^2 = 7$ 。

+++ 因式分解

因式分解下列各式。

(1) $x^2 - 2x - 3 = \underline{(x-3)(x+1)}$ 。

(2) $2x^2 + x - 6 = \underline{(2x-3)(x+2)}$ 。

新威大橋坐落在高雄
茂林國家風景區的荖濃溪上，
鄰近紫斑蝶的棲地，因此在橋的
中央設置了以紫斑蝶展翅飛舞造型
的鋼拱橋，此紫斑蝶造型全長 145 公
尺。前後翅的長度則採用黃金比例分
配，即「前翅：後翅＝全長：前翅」。
你知道前後翅的長度分別會是多少
嗎？ 



4-1

因式分解解一元二次方程式

- 1 一元二次方程式的意義 2 利用因式分解解一元二次方程式 3 綜合應用

主題 1 一元二次方程式的意義



學習時光機

- 和的平方公式
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- 差的平方公式
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 平方差公式
 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

根據上面的對話，我們可以假設小翊的年齡為 x 歲，依題意列出方程式： $(x+4)^2 - 20x = 29$ 。利用第 1 章學過的乘法公式展開，得到 $x^2 + 8x + 16 - 20x = 29$ ，化簡得 $x^2 - 12x - 13 = 0$ 。

觀察化簡後的方程式，只含有一種未知數 x ，且 x 的最高次數是二次。像這樣經過化簡，可以寫成形如 $ax^2 + bx + c = 0$ (其中 $a \neq 0$) 的等式，我們稱為 x 的一元二次方程式。

例如： $-2x^2 + 3x = 12$ 、 $2x^2 = 3x$ 、 $(x+3)(x-8) = 14$ 、 $6x^2 - 15 = 0$ 、……，都是 x 的一元二次方程式。但是方程式 $x^2 + 3x = x^2 - 13$ 經化簡後得到 $3x + 13 = 0$ ，就不是 x 的一元二次方程式。

Key point

一元二次方程式

一個方程式經化簡後可寫成 $ax^2 + bx + c = 0$ (其中 $a \neq 0$) 的形式，就稱此方程式為 x 的一元二次方程式。



隨堂練習

判斷下列式子是否為一元二次方程式？是的打「○」，不是的打「×」。

(×) (1) $x+3=0$

(○) (2) $x^2+5x=-13$

(○) (3) $(x-4)(x+3)=0$

(×) (4) $2x^2+5x-2=(2x+1)(x-2)$

(×) (5) x^2+x-3

(1) $x+3=0$ 是一元一次方程式

(4) $2x^2+5x-2=(2x+1)(x-2)$ ， $2x^2+5x-2=2x^2-3x-2$ ， $8x=0$ 不是一元二次方程式

(5) x^2+x-3 是多項式

如果將某數代入一元二次方程式的未知數中，會使等號左右兩邊的值相等，就稱這個數為此一元二次方程式的**解**或**根**。而求出一元二次方程式的解或根的過程，稱為**解一元二次方程式**。

例 1

判別一元二次方程式的解 學習內容 A-8-6

- 判別 5 是否為一元二次方程式 $x^2+25x=50$ 的解？
- 判別 -1 是否為一元二次方程式 $x^2-5x=-2x+4$ 的解？

解

- 將 $x=5$ 代入等號左邊，

$$\text{得到 } 5^2+25 \times 5=25+125 \neq 50,$$

所以 5 不是一元二次方程式 $x^2+25x=50$ 的解。

- 將 $x=-1$ 代入等號左邊，得到 $(-1)^2-5 \times (-1)=6$ ，

$$\text{將 } x=-1 \text{ 代入等號右邊，得到 } -2 \times (-1)+4=6,$$

等號左、右兩邊的值相等，

所以 -1 是一元二次方程式 $x^2-5x=-2x+4$ 的解。



隨堂練習

1. 判別 0 是否為一元二次方程式 $x^2 - 5 = 4x$ 的解？
2. 判別 4 和 -3 是否為一元二次方程式 $(x-4)(x+3)=0$ 的解？
 1. 將 0 代入等號左邊，得到 $0^2 - 5 = -5$
將 0 代入等號右邊，得到 $4 \times 0 = 0$
等號左、右兩邊的值不相等
所以 0 不是一元二次方程式 $x^2 - 5 = 4x$ 的解
 2. 將 4 和 -3 分別代入等號左邊
得到 $(4-4)(4+3)=0$ 、 $(-3-4)(-3+3)=0$
等號左、右兩邊的值相等
所以 4 和 -3 皆為一元二次方程式 $(x-4)(x+3)=0$ 的解

由例 1 和隨堂練習可知，要判別一個數是不是方程式的解，只要將該數代入方程式的未知數中，看看是否能讓方程式的等號成立就知道了。但如果用代入法找一元二次方程式 $2x^2 - 87x - 135 = 0$ 的解，假設我們從整數 1 開始一個一個代進去試，則要試到 45 才能找到這個方程式的一個解。而它的另一個解 $-\frac{3}{2}$ 為負分數，若只拿整數試，則永遠也找不到 $-\frac{3}{2}$ 這個解。

因此，接下來將學習其他更有效率的方法來解一元二次方程式。

數

學

好

好

玩

「代數」的由來



花拉子米

(約西元 780~850 年) 阿拉伯數學家，其著作《代數學》是第一本關於代數的著作，與丟番圖共享為「代數之父」。

《代數學》由阿拉伯數學家、天文學家花拉子米 (*al-Khwārizmī*，約西元 780~850 年) 所著，是第一本解決一元二次方程式的著作。

書中首創還原 (*al-jabr*) 及平衡 (*al-muqābala*) (相當於現今的「移項」和「合併同類項」) 的方法，並明確提出代數、已知數、未知數、根及移項等一系列概念，有系統的闡述一元二次方程式的解法，把代數學發展成一門與幾何學相提並論的獨立學科。代數 (*Algebra*) 一詞即是源自書中解法之一的 *al-jabr*。



▲前蘇聯發行的花拉子米 1200 歲誕辰紀念郵票

主題 2

利用因式分解解一元二次方程式

我們知道，當兩數都不為 0 時，這兩數的乘積一定不為 0。那麼當兩數的乘積為 0 時，這兩數可能會是哪些數呢？

問題探索 若 $A \times B = 0$ ，則 $A = 0$ 或 $B = 0$

設 A 、 B 為兩數，且 $A \times B = 0$ ，則：

- (1) 當 $A \neq 0$ 時， B 是不是一定要等於 0？ 是
- (2) 當 $B \neq 0$ 時， A 是不是一定要等於 0？ 是
- (3) A 、 B 可不可能都是 0？ 可能
- (4) A 、 B 可不可能都不是 0？ 不可能

由問題探索可以知道，若 A 、 B 為兩數，當 $A \times B = 0$ 時，則 A 和 B 至少有一個是 0，即 $A = 0$ 或 $B = 0$ 。

利用這個結論可以解一元二次方程式。

例如：方程式 $(x-3)(3x-2)=0$ 表示 $(x-3)$ 和 $(3x-2)$ 的乘積是 0，因為 $(x-3)$ 和 $(3x-2)$ 都是數，利用問題探索的結論，可得 $x-3=0$ 或 $3x-2=0$ ，再解這兩個一元一次方程式，即得到方程式 $(x-3)(3x-2)=0$ 的解為 3 和 $\frac{2}{3}$ 。



隨堂練習

找出下列各方程式的解。

(1) $x(x+3)=0$

$x=0$ 或 $x+3=0$

$x=0$ 或 $x=-3$

所以方程式的解為 0 和 -3

(2) $(4x-2)(2x+5)=0$

$4x-2=0$ 或 $2x+5=0$

$x=\frac{1}{2}$ 或 $x=-\frac{5}{2}$

所以方程式的解為 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{5}{2}$

若一個一元二次方程式可化簡為「等號的一邊是兩個一次式的乘積，另一邊是0。」則可利用「有兩數 A 、 B ，若 $A \times B = 0$ ，則 $A = 0$ 或 $B = 0$ 。」的性質求解。我們來看下面的例題。

例 2

利用提公因式解方程式 學習內容 A-8-7

解下列各一元二次方程式。

(1) $2x^2 + 3x = 0$

(2) $\frac{2}{3}x^2 + 4x = 0$

解

(1) $2x^2 + 3x = 0$

$x(2x + 3) = 0$ 提公因式 x

$x = 0$ 或 $2x + 3 = 0$

$x = 0$ 或 $x = -\frac{3}{2}$

所以方程式的解為 0 和 $-\frac{3}{2}$ 。

(2) $\frac{2}{3}x^2 + 4x = 0$

$x\left(\frac{2}{3}x + 4\right) = 0$ 提公因式 x

$x = 0$ 或 $\frac{2}{3}x + 4 = 0$

$x = 0$ 或 $x = -6$

所以方程式的解為 0 和 -6 。



隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

(1) $3x^2 - 7x = 0$

$3x^2 - 7x = 0$

$x(3x - 7) = 0$

$x = 0$ 或 $3x - 7 = 0$

$x = 0$ 或 $x = \frac{7}{3}$

所以方程式的解為 0 和 $\frac{7}{3}$

(2) $-\frac{1}{2}x^2 + 8x = 0$

$-\frac{1}{2}x^2 + 8x = 0$

$x\left(-\frac{1}{2}x + 8\right) = 0$

$x = 0$ 或 $-\frac{1}{2}x + 8 = 0$

$x = 0$ 或 $x = 16$

所以方程式的解為 0 和 16

例 3

先移項再提公因式解方程式 學習內容 A-8-7

解一元二次方程式 $(x-1)(2x+3)=(x-1)(x+2)$ 。

解 $(x-1)(2x+3)=(x-1)(x+2)$

$(x-1)(2x+3)-(x-1)(x+2)=0$ 移項使等號右邊為 0

$(x-1)[(2x+3)-(x+2)]=0$ 提公因式 $(x-1)$

$(x-1)(x+1)=0$

$x-1=0$ 或 $x+1=0$

$x=1$ 或 $x=-1$

所以方程式的解為 1 和 -1。



隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

(1) $(x+3)(x+4)=(x+3)(2x-1)$ (2) $(x-1)^2=(x-1)(2x+3)$

$(x+3)(x+4)-(x+3)(2x-1)=0$

$(x+3)[(x+4)-(2x-1)]=0$

$(x+3)(-x+5)=0$

$x+3=0$ 或 $-x+5=0$

$x=-3$ 或 $x=5$

所以方程式的解為 -3 和 5

$(x-1)^2-(x-1)(2x+3)=0$

$(x-1)[(x-1)-(2x+3)]=0$

$(x-1)(-x-4)=0$

$x-1=0$ 或 $-x-4=0$

$x=1$ 或 $x=-4$

所以方程式的解為 1 和 -4

動 動 腦

例 3 中，若將 $(x-1)(2x+3)=(x-1)(x+2)$ 兩邊同時除以 $(x-1)$ 得 $2x+3=x+2$ ，解一元一次方程式得 $x=-1$ ，這樣的解法對不對？說說看你的想法。

不對，當 $x-1=0$ 時，等號兩邊不可同除以 $(x-1)$

由 $x-1=0$ 可知， $x=1$ 也是此一元二次方程式的解

若等號兩邊同除以 $(x-1)$ ，則會少掉 $x=1$ 這個解

例 4

利用十字交乘法解方程式 學習內容 A-8-7

解下列各一元二次方程式。

(1) $x^2 - 3x + 2 = 0$

(2) $-4y^2 + 6y = -4$

解

(1) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$

$x-1=0$ 或 $x-2=0$

$x=1$ 或 $x=2$

所以方程式的解為 1 和 2。

因式分解

$$\begin{array}{r} x \quad \times \quad -1 \\ x \quad \times \quad -2 \\ \hline -x - 2x = -3x \end{array}$$

(2) $-4y^2 + 6y = -4$

$-4y^2 + 6y + 4 = 0$

$2y^2 - 3y - 2 = 0$

$(2y+1)(y-2) = 0$

$2y+1=0$ 或 $y-2=0$

$y = -\frac{1}{2}$ 或 $y=2$

所以方程式的解為 $-\frac{1}{2}$ 和 2。

移項使等號右邊為 0

同除以 -2

因式分解

$$\begin{array}{r} 2y \quad \times \quad 1 \\ y \quad \times \quad -2 \\ \hline y - 4y = -3y \end{array}$$



隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

(1) $-2x^2 + 13x - 15 = 0$

$2x^2 - 13x + 15 = 0$

$(x-5)(2x-3) = 0$

$x-5=0$ 或 $2x-3=0$

$x=5$ 或 $x=\frac{3}{2}$

所以方程式的解為 5 和 $\frac{3}{2}$

$$\begin{array}{r} x \quad \times \quad -5 \\ 2x \quad \times \quad -3 \\ \hline -10x - 3x = -13x \end{array}$$

(2) $39y^2 + 24y = 15$

$39y^2 + 24y - 15 = 0$

$13y^2 + 8y - 5 = 0$

$(13y-5)(y+1) = 0$

$13y-5=0$ 或 $y+1=0$

$y = \frac{5}{13}$ 或 $y = -1$

所以方程式的解為 $\frac{5}{13}$ 和 -1

$$\begin{array}{r} 13y \quad \times \quad -5 \\ y \quad \times \quad 1 \\ \hline -5y + 13y = 8y \end{array}$$

例 5

利用乘法公式解方程式 學習內容 A-8-7

解下列各一元二次方程式。

(1) $16x^2 - 1 = 0$ (2) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ (3) $-y^2 + y - \frac{1}{4} = 0$

學習時光機

- 和的平方公式
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- 差的平方公式
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 平方差公式
 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

解 (1) $16x^2 - 1 = 0$

$(4x)^2 - 1^2 = 0$

$(4x+1)(4x-1) = 0$

利用平方差公式

$4x+1=0$ 或 $4x-1=0$

$x = -\frac{1}{4}$ 或 $x = \frac{1}{4}$

所以方程式的解為 $-\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{4}$ 。

(2) $9x^2 + 12x + 4 = 0$

$(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 0$

$(3x+2)^2 = 0$

$(3x+2)(3x+2) = 0$

$3x+2=0$ 或 $3x+2=0$

$x = -\frac{2}{3}$ 或 $x = -\frac{2}{3}$

所以方程式的兩個解都是 $-\frac{2}{3}$ 。

(3) $-y^2 + y - \frac{1}{4} = 0$

$4y^2 - 4y + 1 = 0$

$(2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 1 + 1^2 = 0$

$(2y-1)^2 = 0$

$(2y-1)(2y-1) = 0$

$2y-1=0$ 或 $2y-1=0$

$y = \frac{1}{2}$ 或 $y = \frac{1}{2}$

所以方程式的兩個解都是 $\frac{1}{2}$ 。

Hint

$9x^2 + 12x + 4$
也可利用十字交乘法得
 $(3x+2)(3x+2)$

$$\begin{array}{r} 3x \quad \times \quad 2 \\ 3x \quad \times \quad 2 \\ \hline 6x + 6x = 12x \end{array}$$

Hint

$4y^2 - 4y + 1 = 0$
也可利用十字交乘法得
 $(2y-1)(2y-1)$

$$\begin{array}{r} 2y \quad \times \quad -1 \\ 2y \quad \times \quad -1 \\ \hline -2y - 2y = -4y \end{array}$$

由第 153 頁例 5(2)知道，方程式 $9x^2 + 12x + 4 = 0$ 的兩個解均為 $-\frac{2}{3}$ 。
 當一個一元二次方程式有兩個相同的解時，稱這個解為此方程式的**重根**。
 即 $-\frac{2}{3}$ 是方程式 $9x^2 + 12x + 4 = 0$ 的重根，可將解記為 $x = -\frac{2}{3}$ 、 $-\frac{2}{3}$ ，
 或 $x = -\frac{2}{3}$ (重根)。

由於方程式的兩個解相同，因此也可以將例 5(2)的求解過程簡化為：

$$9x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 0$$

$$(3x + 2)^2 = 0$$

$$3x + 2 = 0$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ (重根)}$$

所以方程式的兩個解都是 $-\frac{2}{3}$ 。



隨堂練習

解下列各一元二次方程式。

(1) $25x^2 - 16 = 0$

$$(5x)^2 - 4^2 = 0$$

$$(5x + 4)(5x - 4) = 0$$

$$5x + 4 = 0 \text{ 或 } 5x - 4 = 0$$

$$x = -\frac{4}{5} \text{ 或 } x = \frac{4}{5}$$

所以方程式的解為 $-\frac{4}{5}$ 和 $\frac{4}{5}$

(2) $9x^2 + \frac{1}{9} = -2x$

$$9x^2 + 2x + \frac{1}{9} = 0$$

$$81x^2 + 18x + 1 = 0$$

$$(9x)^2 + 2 \cdot 9x \cdot 1 + 1^2 = 0$$

$$(9x + 1)^2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{9} \text{ (重根)}$$

即方程式的兩個解都是 $-\frac{1}{9}$

主題 3 綜合應用

接下來，我們將綜合運用多種方法來解一元二次方程式。

例 6

先將乘積展開再求解 學習內容 A-8-7

解一元二次方程式 $(x-4)(2x-7)=1$ 。

解 $(x-4)(2x-7)=1$

$$2x^2 - 15x + 28 = 1$$

$$2x^2 - 15x + 27 = 0$$

$$(x-3)(2x-9)=0$$

$$x-3=0 \text{ 或 } 2x-9=0$$

$$x=3 \text{ 或 } x=\frac{9}{2}$$

所以方程式的解為 3 和 $\frac{9}{2}$ 。

$$\begin{array}{r} x \quad \times \quad -3 \\ 2x \quad \times \quad -9 \\ \hline -6x - 9x = -15x \end{array}$$



隨堂練習

解一元二次方程式 $(2x+5)(x+4)=14$ 。

$$(2x+5)(x+4)=14$$

$$2x^2 + 13x + 20 = 14$$

$$2x^2 + 13x + 6 = 0$$

$$(2x+1)(x+6)=0$$

$$2x+1=0 \text{ 或 } x+6=0$$

$$x=-\frac{1}{2} \text{ 或 } x=-6$$

所以方程式的解為 $-\frac{1}{2}$ 和 -6

$$\begin{array}{r} 2x \quad \times \quad 1 \\ x \quad \times \quad 6 \\ \hline x + 12x = 13x \end{array}$$



例 6 中，可以說 $x-4=1$ 或 $2x-7=1$ ，而得到 $x=5$ 或 $x=4$ ，當成是 $(x-4)(2x-7)=1$ 的解嗎？

不可以。因為 $(x-4)(2x-7)=1$ ，也有可能是 $x-4=-1$ ， $2x-7=-1$ 或 $x-4=\frac{1}{2}$ ， $2x-7=2$ ；或……，所以不可以說 $x-4=1$ 或 $2x-7=1$

例 7

已知一元二次方程式的一根，求另一根 學習內容 A-8-7

若 x 的一元二次方程式 $x^2 - mx - 4m = 0$ 的一根為 4，則此一元二次方程式的另一根為多少？

解 將 $x=4$ 代入 $x^2 - mx - 4m = 0$ 中，

可得 $16 - 4m - 4m = 0$ ，

$$16 = 8m$$

$$m = 2$$

即原方程式為 $x^2 - 2x - 8 = 0$ ，

$$(x-4)(x+2) = 0，$$

$x=4$ 或 $x=-2$ ，

所以方程式的另一根為 -2 。

$$\begin{array}{r} x \quad \times \quad -4 \\ x \quad \times \quad 2 \\ \hline -4x + 2x = -2x \end{array}$$



隨堂練習

若 x 的一元二次方程式 $x^2 + x + (3m - 2) = 0$ 的一根為 3，則 m 的值與方程式的另一根分別為多少？

將 $x=3$ 代入 $x^2 + x + (3m - 2) = 0$ 中

可得 $9 + 3 + 3m - 2 = 0$

$$3m = -10$$

$$m = -\frac{10}{3}$$

即原方程式為 $x^2 + x + [3 \times (-\frac{10}{3}) - 2] = 0$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x+4)(x-3) = 0$$

$x = -4$ 或 $x = 3$

所以方程式的另一根為 -4

$$\begin{array}{r} x \quad \times \quad 4 \\ x \quad \times \quad -3 \\ \hline 4x - 3x = x \end{array}$$

例 8

已知一元二次方程式的兩個解，求方程式 學習內容 A-8-7

若 x 的一元二次方程式 $ax^2 - bx - 4 = 0$ 的兩個解為 1 和 -4 ，則 a 、 b 的值為多少？

解 將 $x=1$ 代入，得 $a - b - 4 = 0$ ，
 將 $x=-4$ 代入，得 $16a + 4b - 4 = 0$ ，
 則 $\begin{cases} a - b - 4 = 0 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 16a + 4b - 4 = 0 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$
 由 $\textcircled{1} \times 4 + \textcircled{2}$ ，
 得 $20a - 20 = 0$ ， $a = 1$ 代入 $\textcircled{1}$ ，
 得 $1 - b - 4 = 0$ ， $b = -3$ ，
 所以 $a = 1$ 、 $b = -3$ 。



隨堂練習

若 x 的一元二次方程式 $x^2 + px + q = 0$ 的兩個解為 1 和 -2 ，則 p 、 q 的值為多少？

將 $x=1$ 代入，得 $1 + p + q = 0$
 將 $x=-2$ 代入，得 $4 - 2p + q = 0$
 則 $\begin{cases} 1 + p + q = 0 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 4 - 2p + q = 0 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$
 由 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$
 得 $-3 + 3p = 0$ ， $p = 1$ 代入 $\textcircled{1}$
 得 $1 + 1 + q = 0$ ， $q = -2$
 所以 $p = 1$ 、 $q = -2$



1 一元二次方程式

一個方程式經化簡後可寫成 $ax^2+bx+c=0$ (其中 $a \neq 0$) 的形式，就稱此方程式為 x 的一元二次方程式。

例 $x^2+5x+4=0$ 、 $-4x^2+6x=-4$ 、 $(x-1)^2=(2x+3)^2$ 等，
都是 x 的一元二次方程式。

2 一元二次方程式的解

將某數代入一元二次方程式的未知數中，會使等號左右兩邊的值相等，就稱這個數為此一元二次方程式的解或根。

3 因式分解解一元二次方程式

若一個一元二次方程式可化簡為「等號的一邊是兩個一次式的乘積，另一邊是 0。」則可利用「有兩數 A 、 B ，若 $A \times B = 0$ ，則 $A = 0$ 或 $B = 0$ 。」的性質求解。

例 解一元二次方程式 $x^2+5x+4=0$

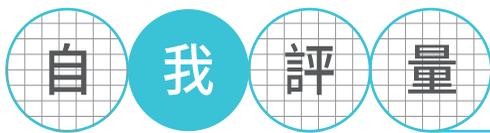
可得 $(x+1)(x+4)=0$

$x+1=0$ 或 $x+4=0$

$x=-1$ 或 $x=-4$

所以方程式的解為 -1 和 -4 。

$$\begin{array}{r} x \quad \times \quad 1 \\ x \quad \times \quad 4 \\ \hline x+4x=5x \end{array}$$



1 判斷下列式子是否為一元二次方程式？是的打「○」，不是的打「×」。

(×) (1) $5 - x = 0$

(○) (2) $(2x - 1)(5x + \frac{2}{5}) = 0$ P.147 隨堂

(×) (3) $x^2 - 4x$

(○) (4) $\frac{1}{2}x^2 = 16$

(×) (5) $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 1 + 9x$

(○) (6) $2(5x - 1)^2 + 5(2x - 1) = 12$

2 解下列各一元二次方程式。

(1) $3x^2 - 8x = 0$

P.150 例 2

$$x(3x - 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } 3x - 8 = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } x = \frac{8}{3}$$

所以方程式的解為 0 和 $\frac{8}{3}$

(2) $(3x - 2)(x + 6) = (3x - 2)(2x + 3)$

P.151 例 3

$$(3x - 2)(x + 6) - (3x - 2)(2x + 3) = 0$$

$$(3x - 2)[(x + 6) - (2x + 3)] = 0$$

$$(3x - 2)(-x + 3) = 0$$

$$3x - 2 = 0 \text{ 或 } -x + 3 = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ 或 } x = 3$$

所以方程式的解為 $\frac{2}{3}$ 和 3

(3) $x^2 - 4x - 5 = 0$

P.152 例 4

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

$$x - 5 = 0 \text{ 或 } x + 1 = 0$$

$$x = 5 \text{ 或 } x = -1$$

所以方程式的解為 5 和 -1

$$\begin{array}{r} x \times -5 \\ x \times 1 \\ \hline -5x + x = -4x \end{array}$$

(4) $(3y - 2)(-2y + 1) = -1$

P.155 例 6

$$-6y^2 + 7y - 2 = -1$$

$$6y^2 - 7y + 1 = 0$$

$$(6y - 1)(y - 1) = 0$$

$$6y - 1 = 0 \text{ 或 } y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1}{6} \text{ 或 } y = 1$$

所以方程式的解為 $\frac{1}{6}$ 和 1

$$\begin{array}{r} 6y \times -1 \\ y \times -1 \\ \hline -y - 6y = -7y \end{array}$$

- 3 若 x 的一元二次方程式 $x^2 + ax - 2a = 0$ 的一根為 1，求 a 的值與方程式的另一根分別為多少？

P.156 例 7

將 $x=1$ 代入 $x^2 + ax - 2a = 0$

可得 $1^2 + a - 2a = 0$ ， $a = 1$

即原方程式為 $x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x+2=0$ 或 $x-1=0$

$x=-2$ 或 $x=1$

所以方程式的另一根為 -2

$$\begin{array}{r} x \quad 2 \\ x \quad -1 \\ \hline 2x - x = x \end{array}$$

挑錯題

以下是小翊和小妍「解一元二次方程式 $(x-1)^2 = 3^2$ 」的過程，判斷他們的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。

<p>小翊：</p> $(x-1)^2 = 3^2$ $\boxed{x-1=3}$ $x=4$	<p>小妍：</p> $(x-1)^2 = 3^2$ $(x-1)^2 - 3^2 = 0$ $[(x-1)+3][(x-1)-3] = 0$ $(x+2)(x-4) = 0$ $x = -2 \text{ 或 } x = 4$
--	--

正確解法如小妍所示