P40

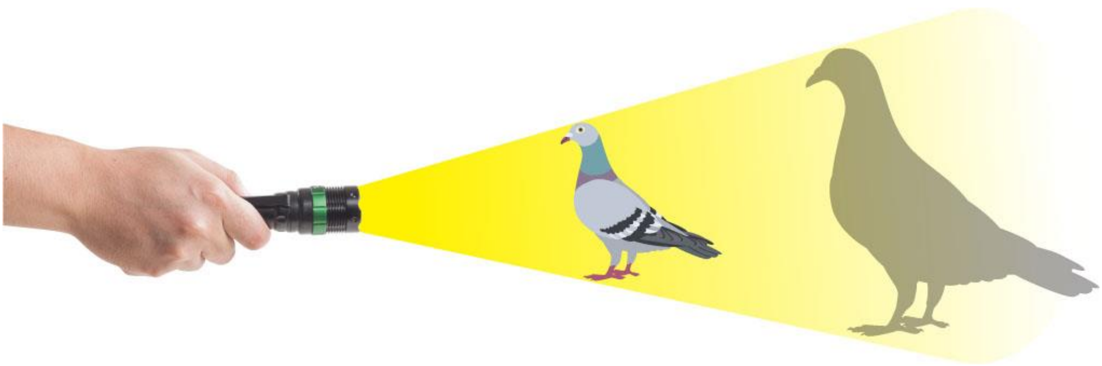
1-3 相似多邊形

1 圖形的縮放 可搭配附件 1 操作

對應能力指標 S-9-1

每個物件經放大或縮小後，雖然大小和實物不同，但其形狀是相同的。用手電筒（光源）照射動物圖案，會在牆上看到它的影子，兩者的形狀相同，但大小不同。

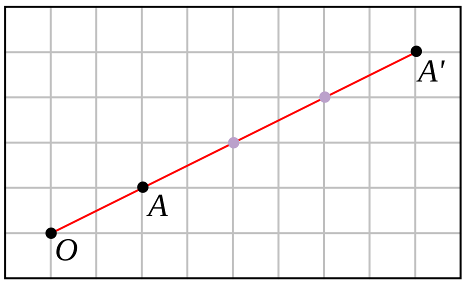
因此，我們可以將手電筒光源視為縮放中心，經過光源直線照射動物圖案的影子，就是此動物圖案的縮放圖形。



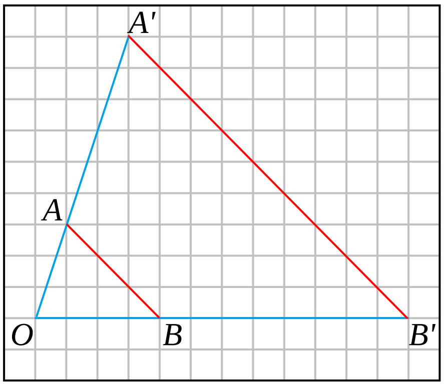
為了說明這個原理，我們先來了解以某固定點為縮放中心，任一點到此固定點距離的縮放關係。

▶線段的縮放

在平面上找一點 O，視為光源固定不動，接著任取一點 A，如右圖，在 $\overrightarrow{OA}$ 上取一點 A'，使得 $\overline{OA'}:\overline{OA}=4:1$，即 $\overline{OA'}$ 是 $\overline{OA}$ 的 4 倍。此時就稱 A' 點是以 O 點為縮放中心，將 A 點與 O 點的距離縮放 4 倍所得到的對應點。



P41



如圖，$\overline{AB}$ 為一已知線段，A'、B' 兩點是以 O 點為縮放中心，將 A、B 兩點與 O 點的距離分別縮放 3 倍所得到的對應點，並連接 $\overline{A'B'}$，那麼 $\overline{A'B'}$ 和 $\overline{AB}$ 有什麼關係？我們先說明 **$\overline{A'B'}$ // $\overline{AB}$ 且 $\overline{A'B'}$ 是 $\overline{AB}$ 的 3 倍**。

說明

$\because \overline{OA}：\overline{OA'}＝\overline{OB}：\overline{OB'}＝1：3$，

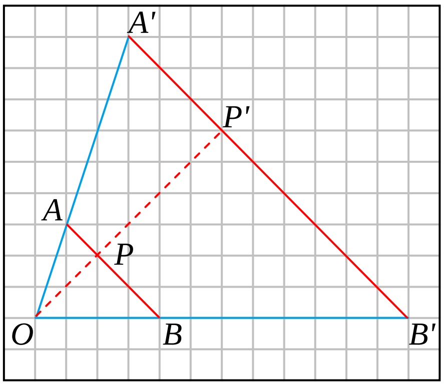
$\therefore \overline{AB}$ // $\overline{A'B'}$（截線段與平行的判別）。

故 $\overline{AB}：\overline{A'B'}＝\overline{OA}：\overline{OA'}＝1：3$（平行線截比例線段性質），因此 $\overline{A'B'}$ 是 $\overline{AB}$ 的 3 倍。

線段的縮放，就是以某固定點（O 點）為縮放中心，將線段上的每一個點與縮放中心 O 點的距離縮放 r 倍後的結果。接下來，我們將探討 $\overline{AB}$ 每一點與 O 點的距離，縮放 3 倍的圖形與 $\overline{A'B'}$ 的關係。

【探索活動】線段的縮放

1. 如圖，若 P 為 $\overline{AB}$ 上的任一點，且 P' 點是以 O 點為縮放中心，將 P 點與 O 點的距離縮放 3 倍所得的對應點，則：



(1) $\overline{OP'}$ 的長度是否為 $\overline{OP}$ 的 3 倍？

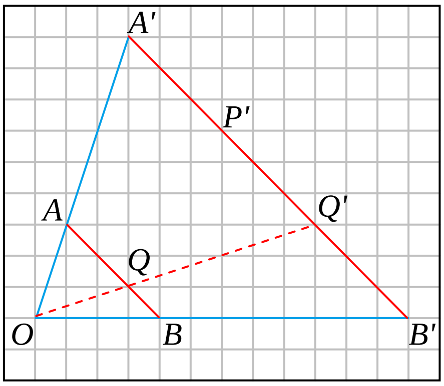
是。

(2) 以 O 為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 上的每一點與 O 點的距離縮放 3 倍後得到的點會在 $\overline{A'B'}$ 上嗎？

會。

2. 如圖，若 Q' 為 $\overline{A'B'}$ 上的任一點，連接 $\overline{OQ'}$ 與 $\overline{AB}$ 交於一點 Q，若以 O 點為縮放中心，將 Q 點與 O 點的距離縮放 3 倍所得的對應點是 Q' 嗎？

是。



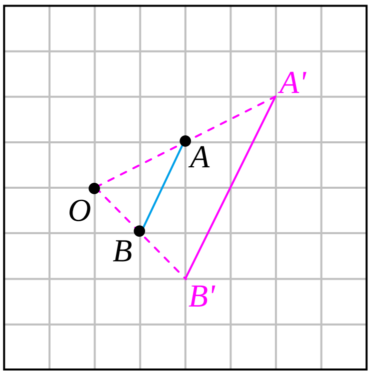
P42

由前頁的探索活動可知，**以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 上的點與 O 點的距離縮放 3 倍後的點都會在 $\overline{A'B'}$ 上，且在 $\overline{A'B'}$ 上的任一點 Q'，都可以在 $\overline{AB}$ 上找到一點 Q，使得 Q 點與 O 點的距離縮放 3 倍後的點是 Q'。此時 $\overline{AB}$ 縮放 3 倍後的圖形就是 $\overline{A'B'}$，其中 $\overline{A'B'}=3\overline{AB}$ 且 $\overline{A'B'}\,//\,\overline{AB}$，我們稱 $\overline{A'B'}$ 為 $\overline{AB}$ 的 3 倍縮放圖形**。

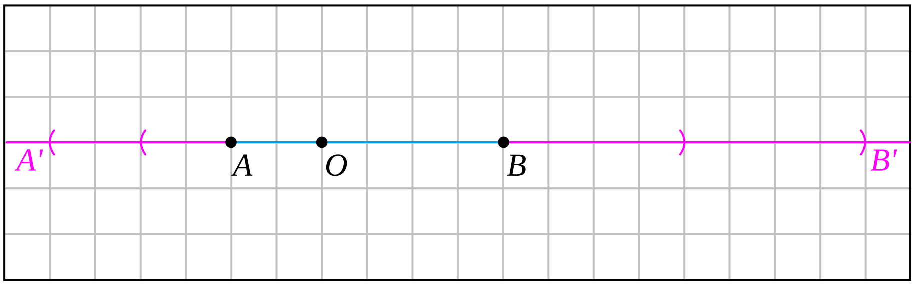
隨堂練習

1. 如圖，O 點不在 $\overline{AB}$ 上，畫出以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 2 倍後的圖形。

   $\overline{A'B'}$ 即為所求。



2. 如圖，O 點在 $\overline{AB}$ 上，畫出以 O 點為縮放中心，將 $\overline{AB}$ 縮放 3 倍後的圖形。



   $\overline{A'B'}$ 即為所求。

【縮放的性質】

1. 一線段經過縮放後仍是線段，且該線段與原線段平行，或在同一直線上。
2. 線段縮放 k 倍後，縮放後的線段長為原線段長的 k 倍。

同理，一射線經過縮放後的圖形仍是射線，且該射線與原射線平行或在同一直線上；一直線經過縮放後的圖形仍是直線，且該直線與原直線平行或兩直線重合。

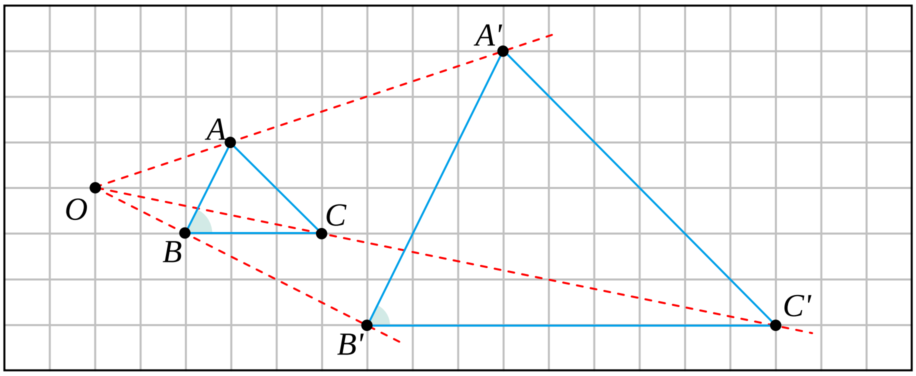
P43

▶多邊形的縮放

一個多邊形經過縮放後，其內角的度數與邊長會有什麼變化呢？我們先以三角形為例進行探索。

【探索活動】三角形的縮放

如圖，已知△ABC 及外部一點 O，以 O 點為縮放中心，分別將 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 縮放 3 倍後，得到△$A'B'C'$，則稱△$A'B'C'$ 是△ABC 的 3 倍縮放圖形。



(1) ∠OBA 與∠$OB'A'$ 是否相等？為什麼？

∵縮放後的線段與原線段平行，即 $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ ，

∴∠OBA＝∠$OB'A'$（同位角相等）。

(2) ∠OBC 與∠$OB'C'$ 是否相等？為什麼？

∵縮放後的線段與原線段平行，即 $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ ，

∴∠OBC＝∠$OB'C'$（同位角相等）。

(3) ∠ABC 與∠$A'B'C'$ 是否相等？為什麼？

∠ABC＝∠OBC－∠OBA

＝∠$OB'C'$－∠$OB'A'$

＝∠$A'B'C'$。

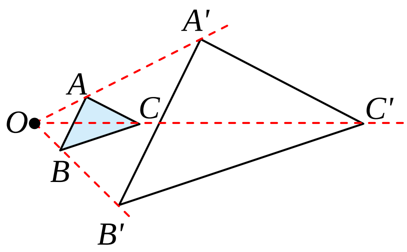
由探索活動可知，將一個△ABC 的圖形縮放 3 倍後得到△$A'B'C'$，則∠BAC＝∠$B'A'C'$、∠ABC＝∠$A'B'C'$、∠ACB＝∠$A'C'B'$。即三內角經過縮放後，其角度皆不變，且其三邊長都放大 3 倍，所以對應邊成比例。

P44

當三角形的縮放中心在不同位置，縮放相同倍率後，所得到的三角形是否會全等？我們以下面的例子來說明：

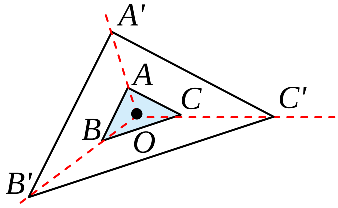
自評 P59 第 1 題

如圖一，縮放中心 O 點在三角形的外部，將△ABC 縮放 3 倍後，所得的新三角形為△$A'B'C'$。取出附件 3，而附件 3 中的△$A'B'C'$為圖一的△$A'B'C'$。接下來，我們利用附件進行下列活動：

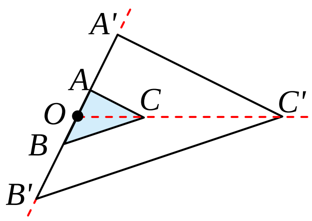


圖一 O 點在三角形外部

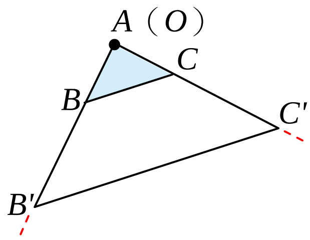
若將縮放中心 O 點改在其它的位置，把同一個△ABC 縮放 3 倍後，所得的新三角形如圖二、圖三、圖四。接著將附件 3，依序與這三個新三角形疊合，可發現它們都與附件 3 的△$A'B'C'$全等。



圖二 O 點在三角形內部



圖三 O 點在三角形邊上

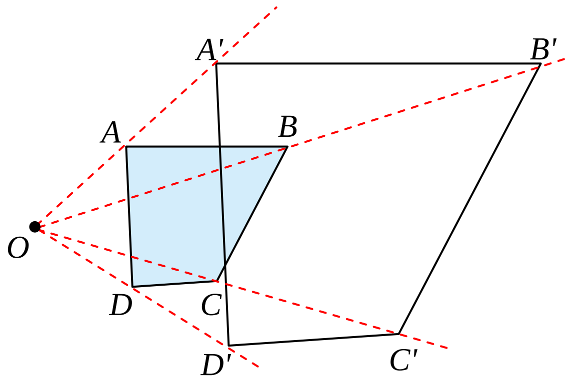


圖四 O 點在三角形的頂點

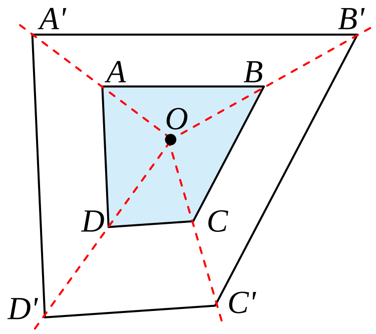
由前面的說明可知，**縮放中心 O 點在不同的位置，將同一個△ABC 縮放 3 倍後，所得的新三角形都會全等，它們與△ABC 的對應角皆不變、對應邊成比例**。

P45

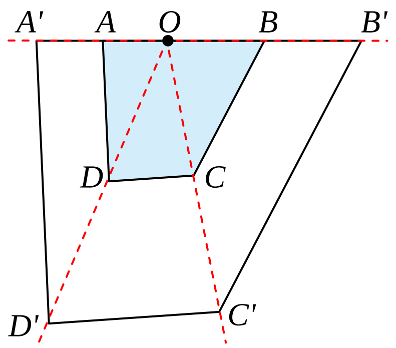
同樣的，縮放中心 O 點在不同的位置，將同一個四邊形縮放 2 倍後，所得的新四邊形也都會全等，且與原四邊形的對應角皆相等、對應邊成比例。



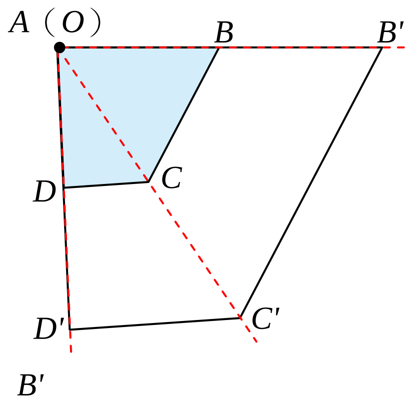
圖一 O 點在四邊形的外部



圖二 O 點在四邊形的內部

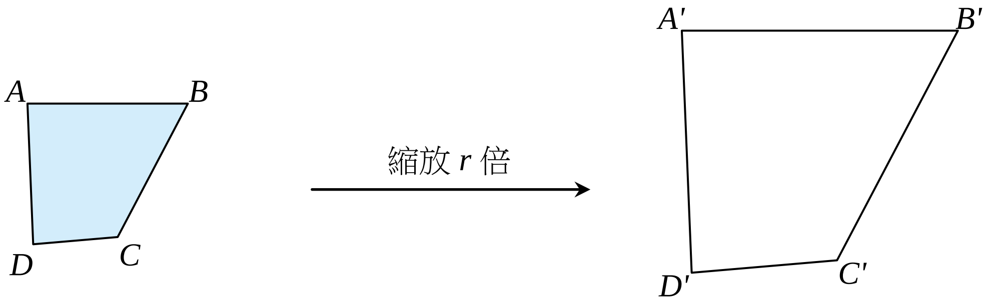


圖三 O 點在四邊形的邊上



圖四 O 點在四邊形的頂點

四邊形 $ABCD$ 與四邊形 $A'B'C'D'$ 的對應關係：



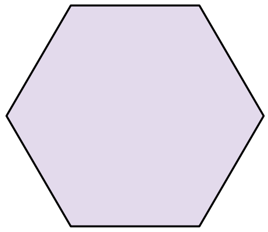
對應頂點	$A \longleftrightarrow A'$、$B \longleftrightarrow B'$、$C \longleftrightarrow C'$、$D \longleftrightarrow D'$
對應角相等	$\angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle B'$，$\angle C = \angle C'$，$\angle D = \angle D'$
對應邊成比例	$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}} = r$ 或 $\overline{A'B'} : \overline{B'C'} : \overline{C'D'} : \overline{D'A'} = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \overline{DA}$

P46

　　事實上，縮放中心所在位置不同，對同一個多邊形做 *r* 倍縮放，所得的圖形都會全等，則此縮放後的新圖形，稱為原多邊形的 r 倍縮放圖，它們會與原多邊形的對應角相等、對應邊成比例。

例 1　**多邊形的縮放**　　搭配習作 P12 基礎題 1

右圖是邊長為 2 公分的正六邊形，將它縮放 3 倍後所得的縮放圖形，其內角度數與邊長分別是多少？



解

正六邊形的每一個內角是 120°，

∵縮放後的多邊形，

　會與原多邊形的對應角相等、對應邊成比例，

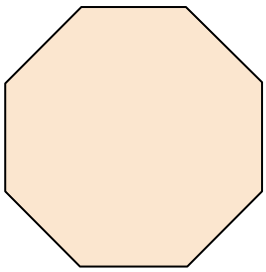
∴內角度數保持不變，仍是 120°，

邊長變成原來的 3 倍，即 $2\times3=6$（公分）。

正 n 邊形的每一個內角是 $\dfrac{(n-2)\times180°}{n}$。

隨堂練習

右圖是邊長為 1.5 公分的正八邊形，將它縮放 2 倍後所得的縮放圖形，其內角度數與邊長分別是多少？



正八邊形的每一個內角是 135°，

∵縮放後的多邊形，會與原多邊形的對應角相等、

　對應邊成比例，

∴內角度數保持不變，仍是 135°，

　邊長變成原來的 2 倍，也就是 $2\times1.5=3$（公分）

P47

2 相似多邊形

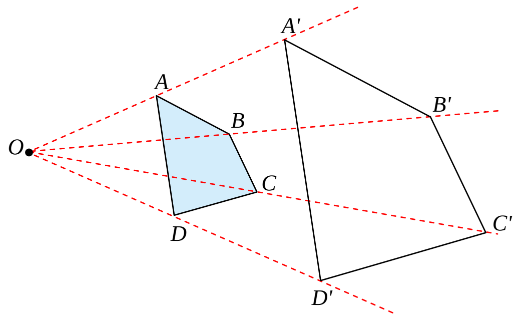
對應能力指標 S-9-1

上圖是艾美設計的一組俄羅斯套娃平面圖，它們看起來相似。

兩個邊數一樣的多邊形，若其**對應角相等、對應邊成比例**，就稱這兩個多邊形相似。通常**以符號「～」表示它們的相似關係，讀作「相似於」**。

如圖，四邊形 $A'B'C'D'$是四邊形 $ABCD$ 的縮放圖形，所以對應角相等、對應邊成比例，因此四邊形 $ABCD$～四邊形 $A'B'C'D'$。

也就是說，兩個多邊形相似，它們的對應角相等、對應邊成比例。



例如：四邊形 $ABCD$～四邊形 $A'B'C'D'$，

所以 $\angle A=\angle A'$、$\angle B=\angle B'$、$\angle C=\angle C'$、$\angle D=\angle D'$（對應角相等），

且 $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}}$（對應邊成比例）。

【相似多邊形】

1. 如果兩個多邊形的對應角相等、對應邊成比例，就稱這兩個多邊形相似。
2. 如果兩個多邊形相似，它們的對應角相等、對應邊成比例。

一般而言，「四邊形 $ABCD$～四邊形 $A'B'C'D'$」只表示此兩圖形相似，不一定表示各頂點依序對應。在本教材中各頂點皆依序對應，例如：**「四邊形 $ABCD$～四邊形 $A'B'C'D'$」表示 A 對應到 A'，B 對應到 B'，C 對應到 C'，D 對應到 D'**。

P48

例 2 相似多邊形的對應關係

搭配習作 P12 基礎題 2 自評 P59 第 2 題

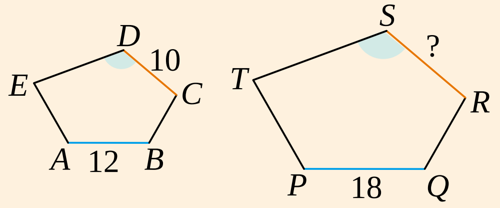
已知五邊形 $ABCDE$～五邊形 $PQRST$，A、B、C、D、E 的對應頂點依序為 P、Q、R、S、T，回答下列問題：

(1) 若 $\overline{AB}=12$，$\overline{CD}=10$，$\overline{PQ}=18$，求 $\overline{RS}$ 的長。

(2) 若 $\angle P+\angle Q=240°$，$\angle R：\angle S：\angle T=5：6：4$，求 $\angle D$。

思路分析

五邊形 $ABCDE$～五邊形 $PQRST$，$\overline{AB}$ 的對應邊是 $\overline{PQ}$；$\overline{CD}$ 的對應邊是 $\overline{RS}$，利用相似多邊形對應邊成比例、對應角相等的性質來做此題。



解

(1) ∵相似形的對應邊成比例，

∴ $\overline{AB}：\overline{PQ}=\overline{CD}：\overline{RS}$

$12：18=10：\overline{RS}$

$\overline{RS}=15$。

(2) 設 $\angle R=5r°$，$\angle S=6r°$，$\angle T=4r°$，$r\neq 0$，

∵ $\angle P+\angle Q+\angle R+\angle S+\angle T=540°$

∴ $240+5r+6r+4r=540$，$r=20$

又相似形的對應角相等，

故 $\angle D=\angle S=6\times 20°=120°$。

隨堂練習

已知四邊形 $ABCD$～四邊形 $PQRS$，A、B、C、D 的對應頂點依序為 P、Q、R、S，若 $\angle Q=76°$，$\angle R=64°$，$\angle S=100°$，$\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=15$，$\overline{PQ}=8$，求 $\angle A$ 及 $\overline{QR}$。

(1) ∵相似形的對應角相等

∴ $\angle A=\angle P=360°-（\angle Q+\angle R+\angle S）$

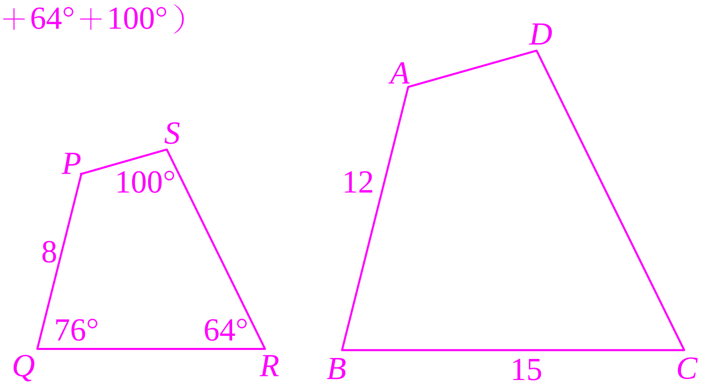
$=360°-（76°+64°+100°）$

$=120°$

(2) ∵相似形的對應邊成比例

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{QR}}$，即 $\dfrac{12}{8}=\dfrac{15}{\overline{QR}}$，

故 $\overline{QR}=10$。



我們可利用「對應角相等」與「對應邊成比例」判別兩個多邊形是否相似。

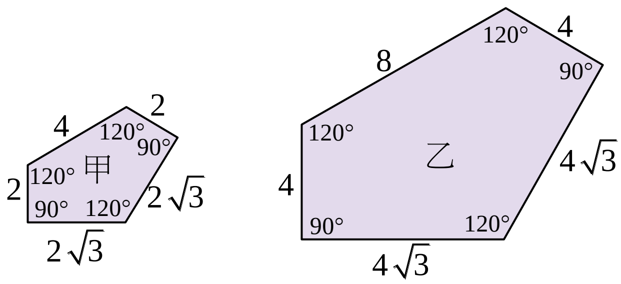
例 3 **相似多邊形的判別** 自評 P60 第 3 題

如圖，甲、乙都是五邊形，回答下列問題，並說明理由。

(1) 甲與乙的對應角是否相等？

(2) 甲與乙的對應邊是否成比例？

(3) 甲與乙是否相似？



解

(1) 是。

∵對應角分別相等。

(2) 是。

∵對應邊長比是 1：2。

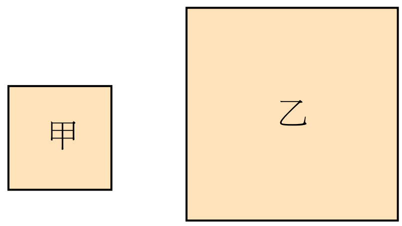
(3) 是。

∵對應角相等、對應邊成比例，

∴甲與乙相似。

隨堂練習

如圖，甲是邊長為 1 的正方形，乙是邊長為 2 的正方形，回答下列問題：



(1) 甲與乙的對應角是否相等？

(2) 甲與乙的對應邊是否成比例？

(3) 甲與乙是否相似？

(1) 是。

∵對應角分別相等。

(2) 是。

∵對應邊長比是 1：2。

(3) 是。

∵對應角相等、對應邊成比例，∴甲與乙相似。

兩個多邊形的「對應角相等」與「對應邊成比例」如果只有一個條件成立，則這兩個多邊形是否一定相似？

P50

例 4 相似多邊形的判別 自評 P60 第 3 題

回答下列問題，並說明理由。

(1) 兩個任意的長方形是否相似？ (2) 兩個任意的菱形是否相似？

解

(1) 兩個長方形不一定相似。

∵長方形的四組對應角雖然相等

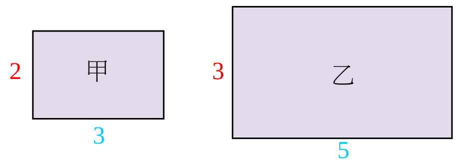
（皆為 90°），但對應邊長不一定成比例。

例如：右圖中，甲、乙兩個長方形對應邊長

的比分別為 3：5 與 2：3，

∵3：5≠2：3， ← 要比較 3：5（較長邊之比）和 2：3（較短邊之比）是否相等。

∴甲、乙兩個長方形不相似。



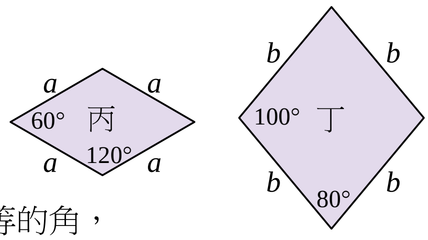
(2) 兩個菱形不一定相似。

∵兩個菱形的對應邊雖然成比例，

但對應角不一定相等。

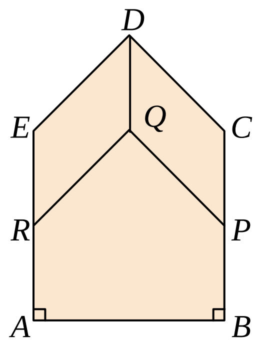
例如：右圖中，60°和 120°皆無法找到對應相等的角，

∴此兩個菱形不相似。



隨堂練習

如圖，$ABCDE$ 為五邊形，$\angle A=\angle B=90°$，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AE}$，四邊形 $DERQ$ 與四邊形 $DCPQ$ 皆為平行四邊形，P、R 分別是 $\overline{BC}$、$\overline{AE}$ 的中點，回答下列問題：



(1) 五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $ABPQR$ 的對應角是否相等？

是。

(2) 五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $ABPQR$ 的對應邊是否成比例？

否。

(3) 五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $ABPQR$ 是否相似？否。

從前面的例題與隨堂練習可知，當兩個多邊形的「對應角相等」與「對應邊成比例」條件缺一時，則這兩個多邊形不一定相似。

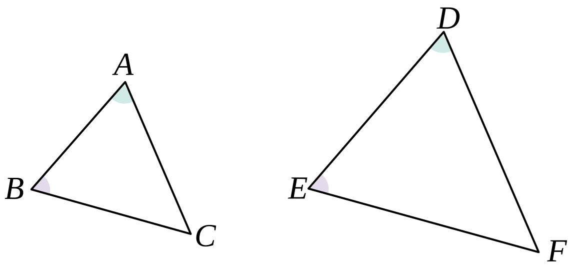
P51

3 三角形的相似性質

對應能力指標 S-9-2

兩個多邊形必須對應邊成比例與對應角相等，這兩個多邊形才會相似。至於兩個三角形的相似，是否這些條件也必須都符合才相似呢？我們曾經學過三角形的全等性質有 SSS、SAS、ASA、AAS、RHS 等，那麼要判別兩個三角形是否相似，也會有類似的性質嗎？接下來，我們來探討三角形的相似性質。

▶*AA* 相似性質



如右圖，$\triangle ABC$ 與$\triangle DEF$ 中，

若$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，

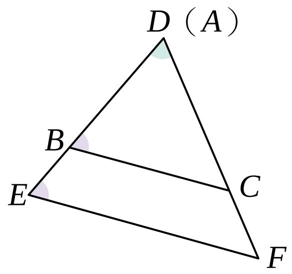
則$\triangle ABC$ 與$\triangle DEF$ 是否相似？

由於$\angle A=\angle D$，

可將$\triangle ABC$ 疊合在$\triangle DEF$ 上，

使得 A 點落在 D 點上，

則 B、C 兩點分別在$\overline{DE}$ 與$\overline{DF}$ 上。



又$\angle B=\angle E$，所以$\overline{BC}\,/\!/\,\overline{EF}$，

可得$\angle C=\angle F$，

且$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$。

由上可知，$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 的對應角相等、對應邊成比例，所以$\triangle ABC\sim\triangle DEF$。

【*AA* 相似性質】

若兩個三角形的兩組對應角相等，則這兩個三角形相似，這個性質稱為 ***AA* 相似性質**。

P52

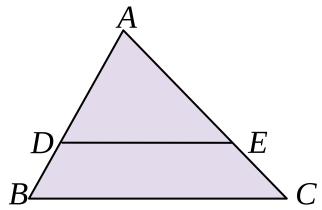
若兩個三角形中，有兩組角對應相等，則這兩個三角形的第三組角也會對應相等，所以 AA 相似性質也可以稱為 ***AAA* 相似性質**。

例 5 **平行線與相似三角形** 　　　　搭配習作 P13 基礎題 3

如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 上，已知 $\overline{DE} // \overline{BC}$ ，$\overline{AD}=6$，$\overline{BD}=3$，$\overline{DE}=8$。

(1) 說明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$。

(2) 求 $\overline{BC}$ 。



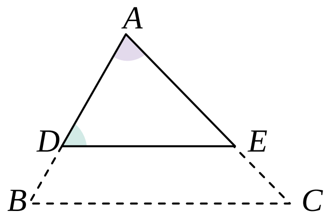
解

(1) 在 $\triangle ADE$ 與 $\triangle ABC$ 中，

$\because \overline{DE} // \overline{BC}$ ，$\therefore \angle ADE = \angle B$（同位角相等），

又 $\angle A = \angle A$（公用角），

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$（$AA$ 相似性質）。

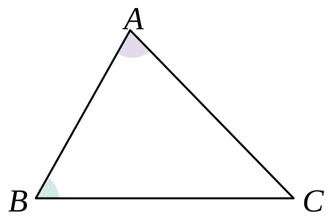


(2) $\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\therefore \overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AB}$

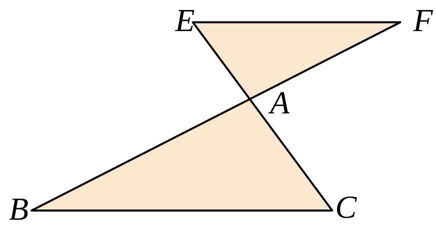
$8 : \overline{BC} = 6 : (6+3)$

$\overline{BC} = 12$



隨堂練習

如圖，$\overline{EF} // \overline{BC}$ ，$\overline{EC}$ 與 $\overline{BF}$ 交於 A 點，$\overline{EF}=18$，$\overline{BC}=27$，$\overline{AE}=8$，求 $\overline{AC}$ 。



$\because \overline{EF} // \overline{BC}$ ，

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ACB$（$AA$ 相似性質）

故 $\overline{AE} : \overline{AC} = \overline{EF} : \overline{BC}$

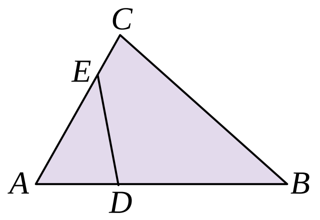
$8 : \overline{AC} = 18 : 27$

$\overline{AC} = 12$

P53

例 6 ***AA* 相似性質** **可搭配附件 5 操作** 自評 P60 第 4 題

如圖，△ABC 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 上，已知∠AED=∠B，$\overline{AD}$ =10，$\overline{BD}$ =20，$\overline{AE}$ =15，求 $\overline{EC}$ 。



解

在△ADE 與△ACB 中，

∵∠AED=∠B（已知），

∠A=∠A（公用角），

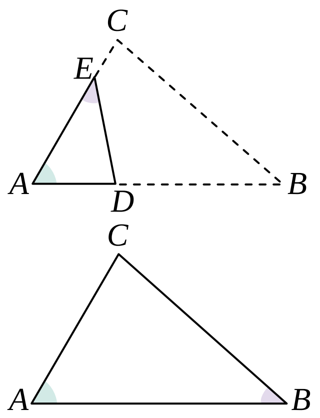
∴△ADE～△ACB（AA 相似性質），

因此 $\overline{AD}$ ：$\overline{AC}$ ＝ $\overline{AE}$ ：$\overline{AB}$

10：$\overline{AC}$ =15：（10+20）

$\overline{AC}$ =20

故 $\overline{EC}$ = $\overline{AC}$ − $\overline{AE}$ =20−15=5。



隨堂練習 自評 P61 第 5 題

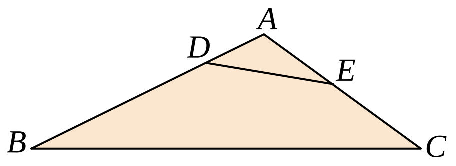
如圖，△ABC 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，已知∠ADE=∠C，$\overline{AD}$ =2，$\overline{AB}$ =8，$\overline{AC}$ =6，$\overline{BC}$ =12，求 $\overline{AE}$ 與 $\overline{DE}$ 。

由 AA 相似性質可知△ABC～△AED，

$\overline{AC}$ ：$\overline{AD}$ ＝ $\overline{AB}$ ：$\overline{AE}$ ＝ $\overline{BC}$ ：$\overline{DE}$

6：2=8：$\overline{AE}$ =12：$\overline{DE}$

$\overline{AE} = \frac{8}{3}$，$\overline{DE}$ =4。



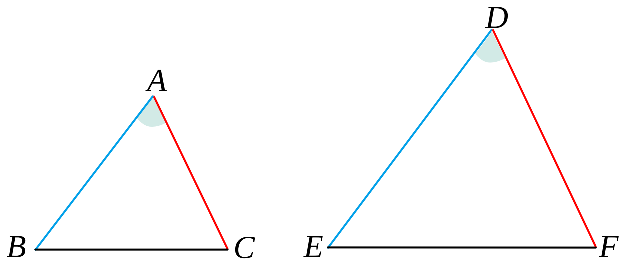
P54

▶SAS 相似性質

如右圖，△ABC 與△DEF 中，

若∠A＝∠D，$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$，

則△ABC 與△DEF 是否相似呢？



由於∠A＝∠D，

可將△ABC 與△DEF 疊合，

使得 A 點落在 D 點上，

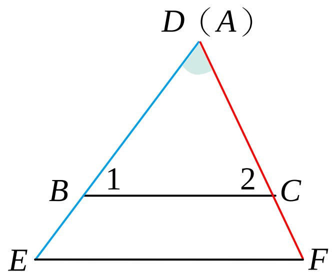
則 B、C 兩點分別在 $\overline{DE}$ 與 $\overline{DF}$ 上。

又 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$，即 $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{DC}}{\overline{DF}}$，

所以 $\overline{BC}\,//\,\overline{EF}$，

因此∠1＝∠E、∠2＝∠F，

且 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$。



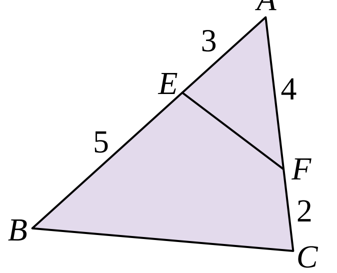
由上可知，△ABC 和△DEF 的對應角相等、對應邊成比例，所以△ABC～△DEF。

【SAS 相似性質】

若兩個三角形有一組對應角相等，且夾此等角的兩組對應邊成比例，則這兩個三角形相似，這個性質稱為 **SAS 相似性質**。

P55

例 7 ***SAS* 相似性質** 可搭配附件 6 操作　　搭配習作 P13 基礎題 4　自評 P60 第 4 題



如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AE}=3$，$\overline{EB}=5$，$\overline{AF}=4$，$\overline{FC}=2$，回答下列問題：

(1) $\triangle AEF$ 與 $\triangle ACB$ 是否相似？為什麼？

(2) 若 $\overline{EF}=3.3$，求 $\overline{BC}$。

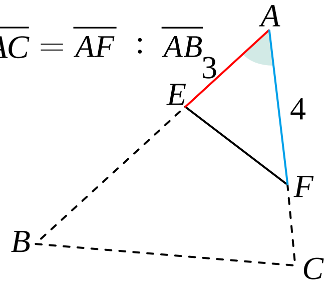
解

(1) 在 $\triangle AEF$ 與 $\triangle ACB$ 中，

$$\left.\begin{array}{l}\because \overline{AE}:\overline{AC}=3:(4+2)=3:6=1:2\\ \quad\overline{AF}:\overline{AB}=4:(3+5)=4:8=1:2\end{array}\right\}\overline{AE}:\overline{AC}=\overline{AF}:\overline{AB}$$

又 $\angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle AEF\sim\triangle ACB$（*SAS* 相似性質）。

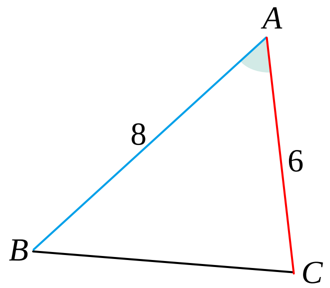


(2) $\because \triangle AEF\sim\triangle ACB$，

$\therefore \overline{EF}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{AC}$

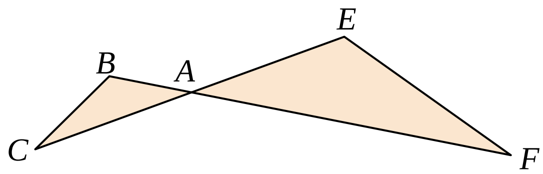
$3.3:\overline{BC}=3:6$

$\overline{BC}=6.6$。



隨堂練習　　自評 P61 第 6 題

如圖，$\overline{EC}$ 與 $\overline{BF}$ 交於 A 點，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=\overline{AE}=20$，$\overline{AF}=40$，$\overline{EF}=25.6$，求 $\overline{BC}$。



在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle AEF$ 中，

$\because \overline{AB}:\overline{AE}=10:20=1:2$，

$\quad \overline{AC}:\overline{AF}=20:40=1:2$，

又 $\angle BAC=\angle EAF$，

$\therefore \triangle ABC\sim\triangle AEF$（*SAS* 相似性質）。

故 $\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{AB}:\overline{AE}$

$\quad \overline{BC}:25.6=10:20$

$\quad \overline{BC}=12.8$。

$\boxed{\textbf{P56}}$

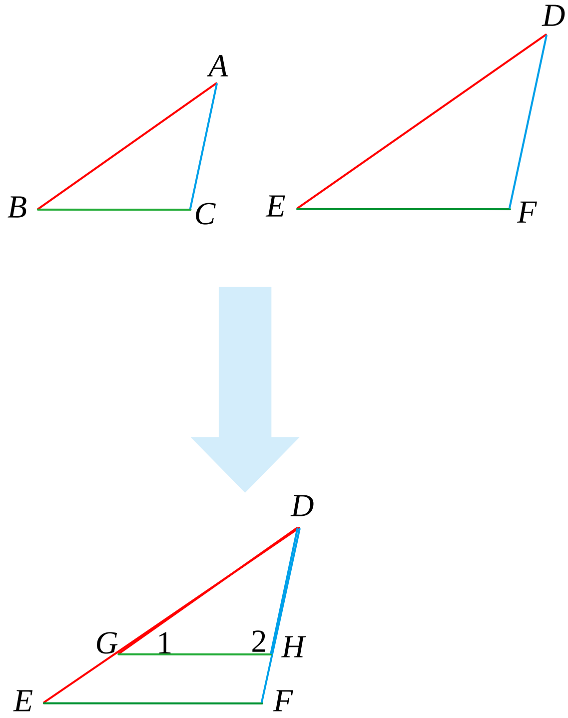
▶*SSS* 相似性質

如右圖，△*ABC* 與△*DEF* 中，

$\overline{DE} > \overline{AB}$，

若 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$，

則△*ABC* 與△*DEF* 是否相似？



在 $\overline{DE}$ 上取一點 G，使得 $\overline{DG}=\overline{AB}$；

在 $\overline{DF}$ 上取一點 H，使得 $\overline{DH}=\overline{AC}$。

因為 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$，所以 $\dfrac{\overline{DG}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{DF}}$，

因此 $\overline{GH} \,//\, \overline{EF}$。

由此可得∠1＝∠*E*，∠2＝∠*F*，

即∠*B*＝∠*E*＝∠1，

∠*C*＝∠*F*＝∠2。

再由三角形的內角和均為 180°可得

∠*A*＝∠*D*。

因為 $\overline{GH} \,//\, \overline{EF}$，

所以 $\dfrac{\overline{DG}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{DF}}=\dfrac{\overline{GH}}{\overline{EF}}$，

又 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$（已知），

所以 $\overline{GH}=\overline{BC}$，

故△*ABC* ≅ △*DGH*（*SSS* 全等性質），

因此∠*B*＝∠1，∠*B*＝∠2。

由上可知，△*ABC* 和△*DEF* 的對應角相等、對應邊成比例，所以△*ABC*～△*DEF*。

【*SSS* 相似性質】

若兩個三角形的三組對應邊成比例，則這兩個三角形相似，這個性質稱為 ***SSS* 相似性質**。

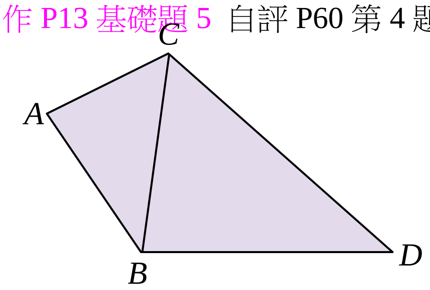
P57

例 8 ***SSS*** **相似性質** 可搭配附件 7 操作　　搭配習作 P13 基礎題 5　自評 P60 第 4 題

如圖，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=8$，$\overline{BC}=12$，$\overline{BD}=15$，$\overline{CD}=18$，回答下列問題：

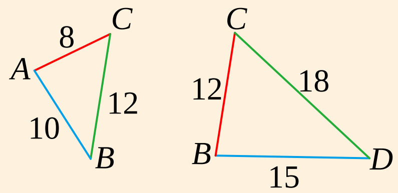
(1) 為什麼$\triangle ABC\sim\triangle BDC$？

(2) $\angle D$ 與$\triangle ABC$ 的哪個角相等？



思路分析

可以分別從兩個三角形邊長的大小關係找到對應邊。將$\triangle ABC$ 與$\triangle BDC$ 的三邊長分別由小到大排列，$\triangle ABC$ 的邊長分別為 $\overline{AC}=8$，$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=12$，$\triangle BDC$ 的邊長分別為 $\overline{BC}=12$，$\overline{BD}=15$，$\overline{CD}=18$。



解

(1) 在$\triangle ABC$ 與$\triangle BDC$ 中，

$$\left.\begin{array}{l}\because \overline{AC}:\overline{BC}=8:12=2:3\\ \quad\ \overline{AB}:\overline{BD}=10:15=2:3\\ \quad\ \overline{BC}:\overline{CD}=12:18=2:3\end{array}\right\}\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{BC}:\overline{CD}$$

$\therefore\triangle ABC\sim\triangle BDC$（$SSS$ 相似性質）。

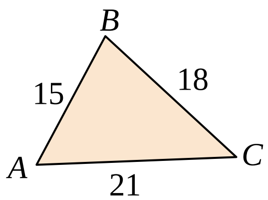
(2) $\because\triangle BDC\sim\triangle ABC$，

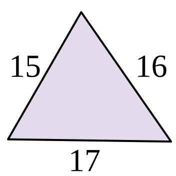
$\therefore\angle D=\angle ABC$。

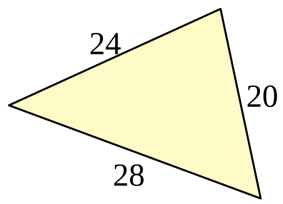
隨堂練習

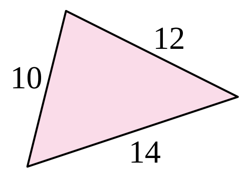
下列哪些三角形與$\triangle ABC$ 相似，在□中打「✓」。

(1) □　　(2) ☑　　(3) ☑









1-3 重點回顧

❶ 縮放的性質

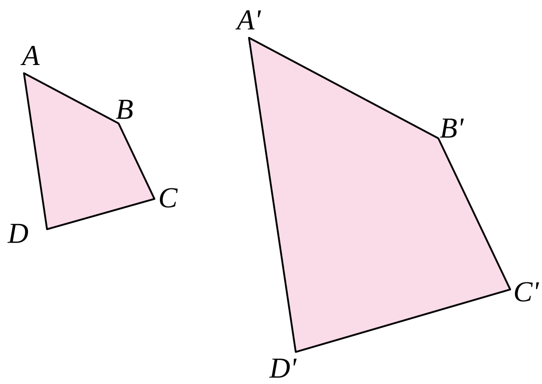
(1) 線段縮放 k 倍後，縮放後的線段長為原線段長的 k 倍。

(2) 任意一個多邊形經過縮放 r 倍後的新多邊形，其對應角的角度不變，對應的邊長變成原來的 r 倍。

❷ 相似多邊形

(1) 如果兩個多邊形的對應角相等、對應邊成比例，就稱這兩個多邊形相似。

例



如圖，四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $A'B'C'D'$，

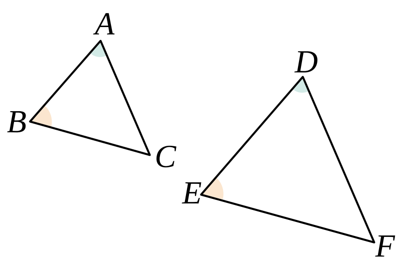
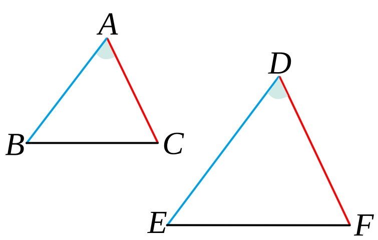
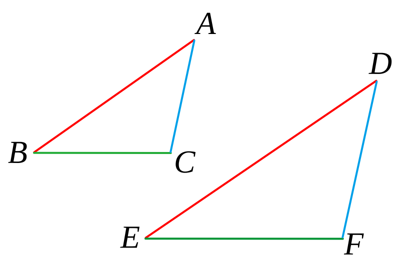
$\angle A'=\angle A$、$\angle B'=\angle B$、$\angle C'=\angle C$、$\angle D'=\angle D$（對應角相等），

$\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}}$（對應邊成比例），

就稱四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$。

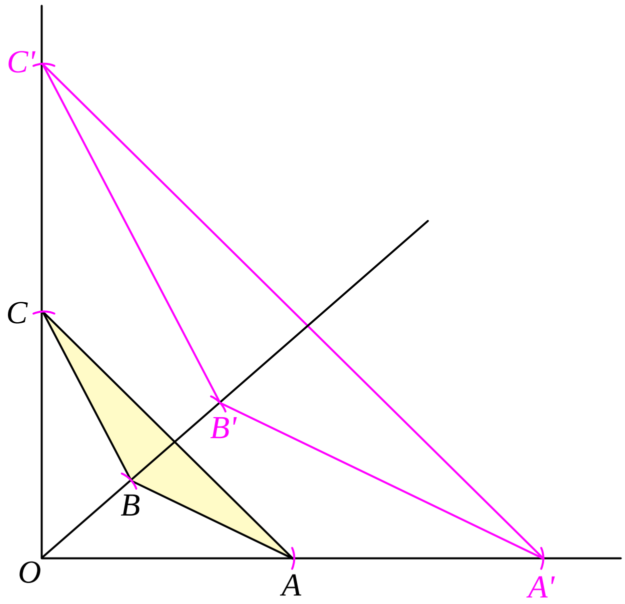
(2) 若兩個多邊形相似，則其對應角相等，對應邊成比例。

❸ 三角形的相似性質

AA 相似性質	SAS 相似性質	SSS 相似性質
		
$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$	$\angle A=\angle D$，$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$	$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$

1-3 自我評量

① 如圖，在$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$上分別取 A'、B'、C' 三點，使△$A'B'C'$～△ABC，且 $\overline{A'B'}=2\overline{AB}$。（只要作圖，不必寫出做法） 課 P44 課文



課 P48 例 2

② 已知四邊形 $ABCD$～四邊形 $A'B'C'D'$ 中，A、B、C、D 對應頂點為 A'、B'、C'、D'，

(1) 若 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{DA}=1:3:4:2$，四邊形 $A'B'C'D'$ 周長為 50，求 $\overline{A'B'}$、$\overline{C'D'}$。

(2) 若 $\angle A:\angle B:\angle C=2:5:3$，$\angle D=100°$，求 $\angle A'$ 及 $\angle B'$。

(1) ∵四邊形 $ABCD$～四邊形 $A'B'C'D'$，

∴ $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{DA}=\overline{A'B'}:\overline{B'C'}:\overline{C'D'}:\overline{D'A'}=1:3:4:2$，

故 $\overline{A'B'}=50\times\dfrac{1}{1+3+4+2}=5$，

$\overline{C'D'}=50\times\dfrac{4}{1+3+4+2}=20$。

(2) 設 $\angle A=2r°$，$\angle B=5r°$，$\angle C=3r°$，$r\neq0$，

∵ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$

∴ $2r+5r+3r+100=360$，$r=26$

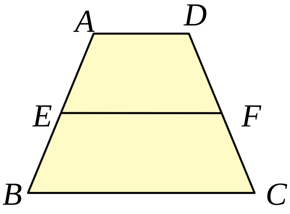
又相似形的對應角相等，

故 $\angle A'=2\times26°=52°$，$\angle B'=5\times26°=130°$。

答：(1) $\overline{A'B'}=5$，$\overline{C'D'}=20$，(2) $\angle A'=52°$，$\angle B'=130°$。

課 P49、50 例 3、4

③ 如圖，四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形，$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，$E$、$F$ 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{DC}$ 的中點，已知 $\overline{AD}=3$，$\overline{BC}=7$，回答下列問題：



(1) 四邊形 $AEFD$ 與四邊形 $EBCF$：

① 對應角是否相等？ ☑是 □否

② 對應邊是否成比例 □是 ☑否

③ 兩圖形是否相似？ □是 ☑否

(2) 四邊形 $AEFD$ 與四邊形 $ABCD$：

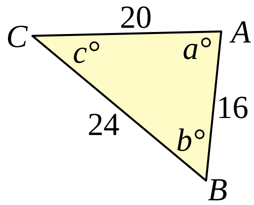
① 對應角是否相等？ ☑是 □否

② 對應邊是否成比例 □是 ☑否

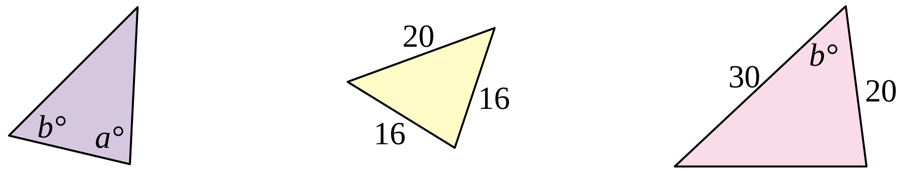
③ 兩圖形是否相似？ □是 ☑否

課 P53、55、57 例 6～8

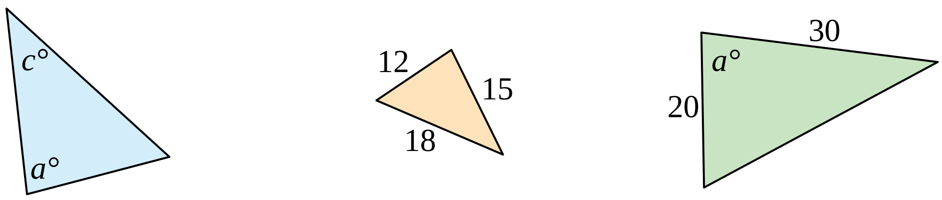
④ 下列哪些三角形與△ABC 相似，在□中打「✓」，並寫出所用的相似性質：



(1) ☑ ___*AA*___ 相似性質 (2) □______相似性質 (3) ☑ ___*SAS*___ 相似性質

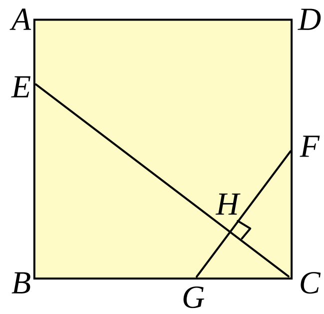


(4) ☑ ___*AA*___ 相似性質 (5) ☑ ___*SSS*___ 相似性質 (6) □______相似性質



課 P53 隨堂

⑤ 如圖，四邊形 $ABCD$ 是邊長為 8 的正方形，E、F 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 上，$\overline{AE}=2$，且 F 是 $\overline{CD}$ 的中點，自 F 點作直線垂直 $\overline{EC}$ 且分別交 $\overline{EC}$、$\overline{BC}$ 於 H、G，回答下列問題：



(1) $\triangle EBC$ 與 $\triangle GCF$ 是否相似？為什麼？

(2) 求 $\overline{BG}$。

(1) 在 $\triangle EBC$ 與 $\triangle GCF$ 中，

$\because$ 四邊形 $ABCD$ 為正方形，

$\therefore \angle B=\angle GCF=90^\circ$，$\angle ECB+\angle BEC=\angle ECB+\angle FGC$

$\therefore \angle BEC=\angle FGC$

故 $\triangle EBC \sim \triangle GCF$（$AA$ 相似性質）。

(2) $\because \triangle EBC \sim \triangle GCF$

$\therefore \dfrac{\overline{EB}}{\overline{GC}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CF}}$，$\dfrac{6}{\overline{GC}}=\dfrac{8}{4}$，$\overline{GC}=3$，

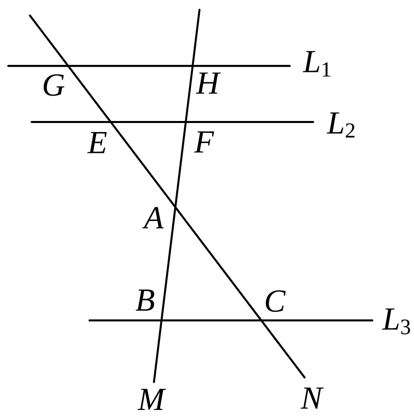
$\therefore \overline{BG}=8-3=5$。

答：(1)是，(2) 5。

課 P55 隨堂

⑥ 如圖，L_1、L_2、L_3 皆為直線，$L_1 // L_2 // L_3$，直線 M、N 交於 A 點，$\overline{GE}=2$，$\overline{EA}=3$，$\overline{AC}=4$，$\overline{HA}=4$，求：

(1) $\overline{FA}$。　(2)若 $\overline{EF}=2.1$，求 $\overline{BC}$。



(1) $\because L_1 // L_2$

$\therefore \overline{EA}:\overline{GA}=\overline{FA}:\overline{HA}$

$3:(3+2)=\overline{FA}:4$

$\overline{FA}=2.4$。

(2) $\because L_2 // L_3$

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ACB$（$AA$ 相似性質）

故 $\overline{EA}:\overline{AC}=\overline{EF}:\overline{BC}$

$3:4=2.1:\overline{BC}$

$\overline{BC}=2.8$。

答：(1) 2.4，(2) 2.8。