

例3 求正整數的平方根

求下列各數的平方根：

(1) 49

(2) 17

解

(1) 因為 $7^2 = (-7)^2 = 49$ ，

所以 49 的平方根為 $\sqrt{49} = 7$ 與 $-\sqrt{49} = -7$ ，

可簡記為 ± 7 。

(2) 因為 $(\sqrt{17})^2 = (-\sqrt{17})^2 = 17$ ，

所以 17 的平方根為 $\sqrt{17}$ 與 $-\sqrt{17}$ ，

可簡記為 $\pm \sqrt{17}$ 。

± 7 讀作正負 7，
表示 7 與 -7 。



隨堂練習

求下列各數的平方根：

(1) 64

(2) 13

因為 $8^2 = (-8)^2 = 64$ ，

所以 64 的平方根為 ± 8 。

因為 $(\sqrt{13})^2 = (-\sqrt{13})^2 = 13$ ，

所以 13 的平方根為 $\pm \sqrt{13}$ 。

在上面的例子中，我們要求得某數 a 的平方根，若 a 是某整數的平方，則我們稱 a 為**完全平方數**（或**平方數**），例如：1、4、9、64、……均為完全平方數，此時 a 的正平方根 $\sqrt{a}$ 可以輕易化簡成一個正整數。我們可以將一正整數 a 寫成標準分解式來判斷它是否為完全平方數，進而求得 a 的平方根。

例4 利用標準分解式求完全平方數的平方根

求下列各數的平方根：

(1) $2^2 \times 3^4 \times 5^2$

(2) 1225

解

(1) 因為 $2^2 \times 3^4 \times 5^2 = (2 \times 3^2 \times 5)^2$

故 $2^2 \times 3^4 \times 5^2$ 的平方根為

$$\begin{aligned}\pm \sqrt{2^2 \times 3^4 \times 5^2} &= \pm \sqrt{(2 \times 3^2 \times 5)^2} \\ &= \pm (2 \times 3^2 \times 5) \\ &= \pm 90\end{aligned}$$

(2) 利用短除法，可將 1225 分解成

$$1225 = 5^2 \times 7^2 = (5 \times 7)^2,$$

$$\begin{aligned}\text{故 } 1225 \text{ 的平方根為 } \pm \sqrt{1225} &= \pm \sqrt{(5 \times 7)^2} \\ &= \pm (5 \times 7) \\ &= \pm 35\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 1225 \\ \hline 5 & 245 \\ \hline 7 & 49 \\ \hline & 7 \end{array}$$



隨堂練習

求下列各數的平方根：

(1) $2^6 \times 3^2$

$2^6 \times 3^2$ 的平方根

$$\begin{aligned}&= \pm \sqrt{2^6 \times 3^2} \\ &= \pm \sqrt{(2^3 \times 3)^2} \\ &= \pm 24\end{aligned}$$

(2) 2025

2025 的平方根

$$\begin{aligned}&= \pm \sqrt{2025} \\ &= \pm \sqrt{5^2 \times 9^2} \\ &= \pm \sqrt{(5 \times 9)^2} \\ &= \pm (5 \times 9) \\ &= \pm 45\end{aligned}$$

例5 求分數與小數的平方根

求下列各數的平方根：

- (1) $\frac{49}{16}$ (2) $2\frac{1}{4}$ (3) 0.09

解

(1) $\frac{49}{16}$ 的平方根為 $\pm\sqrt{\frac{49}{16}} = \pm\sqrt{(\frac{7}{4})^2} = \pm\frac{7}{4}$ 。

(2) 因為 $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ ，

故 $2\frac{1}{4}$ 的平方根為 $\pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\sqrt{(\frac{3}{2})^2} = \pm\frac{3}{2}$ 。

(3) 0.09 的平方根為 $\pm\sqrt{0.09} = \pm\sqrt{(0.3)^2} = \pm 0.3$ 。

**隨堂練習**

求下列各數的平方根：

(1) $\frac{81}{100}$

$\frac{81}{100}$ 的平方根為 $\pm\sqrt{\frac{81}{100}} = \pm\sqrt{(\frac{9}{10})^2} = \pm\frac{9}{10}$ 。

(2) $1\frac{7}{9}$

因為 $1\frac{7}{9} = \frac{16}{9}$ ，故 $1\frac{7}{9}$ 的平方根為 $\pm\sqrt{\frac{16}{9}} = \pm\sqrt{(\frac{4}{3})^2} = \pm\frac{4}{3}$ 。

(3) 0.25

0.25 的平方根為 $\pm\sqrt{0.25} = \pm\sqrt{(0.5)^2} = \pm 0.5$ 。



探索活動

根號裡的數

小新上課學到 $\sqrt{3^2} = 3$ ，因此他覺得 $\sqrt{(-3)^2}$ 等於 -3 ，小新的想法對嗎？為什麼？

不對，因為 $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ 。

例 6

平方根的應用

已知 $3x-5$ 的平方根為 $\pm\sqrt{10}$ ，求 x 的值。

解

因為 $3x-5$ 的平方根為 $\pm\sqrt{10}$ ，

所以 $(\pm\sqrt{10})^2 = 3x-5$ ，

$10 = 3x-5$ ， $15 = 3x$ ， $x = 5$ 。



隨堂練習

已知 $5x+3$ 的平方根為 $\pm\sqrt{13}$ ，求 x 的值。

因為 $5x+3$ 的平方根為 $\pm\sqrt{13}$ ，

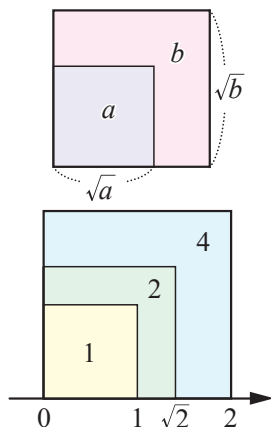
所以 $(\pm\sqrt{13})^2 = 5x+3$ ，

$13 = 5x+3$ ， $10 = 5x$ ， $x = 2$ 。

平方根的近似值

在前面的課文中，我們提到面積 2 的正方形邊長為 $\sqrt{2}$ ，它也是 2 的正平方根，那麼 $\sqrt{2}$ 這個數字到底有多大呢？

我們可從幾何圖形知道：面積較大的正方形，邊長也比較大。如果兩個正方形的面積分別為 a 與 b ，且 $a < b$ ，那麼 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 。也就是說：若 $0 < a < b$ ，則 $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$ 。利用這個性質就可以知道二次方根整數部分的值。例如由右圖可知這三個正方形的邊長大小關係為 $1 < \sqrt{2} < 2$ ，因此可知 $\sqrt{2}$ 這個數的整數部分為 1。



例7 平方根的整數部分

已知 m 為正整數，若 $m < \sqrt{10} < m + 1$ ，求 m 的值。

解 因為 $3^2 = 9$ ， $4^2 = 16$ ，且 $9 < 10 < 16$ ，得 $3^2 < 10 < 4^2$ ，
所以 $\sqrt{3^2} < \sqrt{10} < \sqrt{4^2}$ ，即 $3 < \sqrt{10} < 4$ ，
故 $m = 3$ ，也就是 $\sqrt{10}$ 的整數部分為 3。



隨堂練習

- 已知 a 為正整數，若 $a < \sqrt{135} < a + 1$ ，求 a 的值。
因為 $11^2 = 121$ ， $12^2 = 144$ ， $121 < 135 < 144$ ，所以 $11 < \sqrt{135} < 12$ ，
故 $a = 11$ 。
- 比較 $\sqrt{78}$ 與 8 的大小。
因為 $8^2 = 64$ ，且 $64 < 78$ ，故 $8 < \sqrt{78}$ 。

由前述可知 $1 < \sqrt{2} < 2$ ，透過以下探索活動的方法能求得 $\sqrt{2}$ 更精確的值。