2-2 根式的運算

主題 1 根式運算的基本性質

由 2-1 節知道 $\sqrt{2}$、$-\sqrt{2}$、$\sqrt{5}$、$-\sqrt{5}$、……分別代表不同的數，這些帶有根號的數像整數、分數一樣，也能做加、減、乘、除的運算，而且滿足加法、乘法的交換律、結合律及分配律。

我們將含有根號的算式稱為**根式**，例如：$2+\sqrt{3}$、$1\div\sqrt{5}$、$3\times\sqrt{7}$、$\sqrt{8}-1$ 等都是根式。接下來就來討論根式運算的基本性質。

根式的表示

在第一冊我們學過：

$$x+x+x \text{ 寫成 } 3\cdot x \text{ 或 } 3x\text{；}$$

$$(-\frac{1}{2})\cdot x \text{ 寫成 } -\frac{1}{2}x \text{ 或} -\frac{x}{2}\text{；}$$

$$x\div 3 \text{ 寫成 } \frac{x}{3} \text{ 或 } \frac{1}{3}x\text{。}$$

而根式也可以利用這種形式來表示：

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2} \text{ 寫成 } 3\times\sqrt{2} \text{ 或 } 3\sqrt{2}\text{；}$$

$$(-\frac{1}{2})\times\sqrt{2} \text{ 寫成 } -\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ 或} -\frac{\sqrt{2}}{2}\text{；}$$

$$\sqrt{5}\div 3 \text{ 寫成 } \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ 或 } \frac{1}{3}\sqrt{5}\text{。}$$

一般而言，**若 $a\neq 0$，$b\geq 0$，則 $a\times\sqrt{b}$ 寫成 $a\sqrt{b}$；**

$$\sqrt{b}\div a \text{ 寫成 } \frac{\sqrt{b}}{a} \text{ 或 } \frac{1}{a}\sqrt{b}\text{。}$$

根式也滿足乘法的交換律與結合律，我們來看下面的例題。

例 1　$a\sqrt{b}\times c$ 的運算

計算下列各式的值。

(1) $(-2)\times 3\sqrt{5}$　(2) $4\sqrt{2}\times\frac{1}{6}$　(3) $\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$

解

(1) $(-2)\times 3\sqrt{5}$

$=(-2)\times 3\times\sqrt{5}$

$=-6\times\sqrt{5}$

$=-6\sqrt{5}$

(2) $4\sqrt{2}\times\frac{1}{6}$

$=4\times\sqrt{2}\times\frac{1}{6}$

$=4\times\frac{1}{6}\times\sqrt{2}$

$=\frac{2}{3}\times\sqrt{2}$

$=\frac{2}{3}\sqrt{2}$

(3) <方法一>

$\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\sqrt{3}$

$=\frac{2}{9}\sqrt{3}$

<方法二>

$\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=\frac{2\times\sqrt{3}}{3\times 3}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $\frac{3}{5}\times 5\sqrt{2}$　(2) $\frac{\sqrt{5}}{12}\times(-16)$　(3) $\frac{3\sqrt{7}}{4}\times\frac{1}{9}$

根式的乘除運算

1. 根式的乘法運算

我們知道 $2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$，那 $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ 呢？

根據平方根的意義：「若 $b^2=a$，則 b 是 a 的平方根。」

因為 $(\sqrt{2}\times\sqrt{5})^2=(\sqrt{2}\times\sqrt{5})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{5})=(\sqrt{2}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{5}\times\sqrt{5})=2\times5$，

所以 $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ 是 2×5 的正平方根，又 $\sqrt{2\times5}$ 也是 2×5 的正平方根，

所以 $\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{2\times5}$。事實上，**若 $a\geq0$、$b\geq0$，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$**。

我們也可以利用計算機來檢驗 $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ 與 $\sqrt{10}$ 的值。

$\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ → 2 SHIFT $\sqrt{\ }$ x^2 × 5 SHIFT $\sqrt{\ }$ x^2 = 3.16227766

$\sqrt{10}$ → 10 SHIFT $\sqrt{\ }$ x^2 3.16227766

例 2 根式的乘法運算

計算下列各式的值。

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ (2) $(-\frac{2}{3}\sqrt{5})\times4\sqrt{7}$ (3) $7\sqrt{2}\times5\sqrt{2}$

解

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}$

(2) $(-\frac{2}{3}\sqrt{5})\times4\sqrt{7}=(-\frac{2}{3})\times\sqrt{5}\times4\times\sqrt{7}$

$=(-\frac{2}{3})\times4\times\sqrt{5}\times\sqrt{7}=-\frac{8}{3}\sqrt{35}$

(3) $7\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=7\times\sqrt{2}\times5\times\sqrt{2}=7\times5\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=35\times2=70$

隨堂練習

計算下列各式的值。

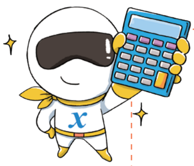
(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{11}$ (2) $\frac{\sqrt{5}}{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{5})$ (3) $3\sqrt{6}\times4\sqrt{6}$

2. 根式的除法運算

我們知道 $\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{2\times5}$，那麼 $\sqrt{2}\div\sqrt{5}$ 是否會等於 $\sqrt{2\div5}$ 呢？

$\sqrt{2}\div\sqrt{5}$ 的值可用 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 表示，因為 $(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})^2=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{2}{5}$，所以 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 是 $\dfrac{2}{5}$ 的正平方根，又 $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ 也是 $\dfrac{2}{5}$ 的正平方根，所以 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}$。

事實上，**若 $a\geq0$、$b>0$，則 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 或 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{a\div b}$**。



我們也可以利用計算機來檢驗 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 與 $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ 的值。

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\rightarrow$ 2 SHIFT x^2 ÷ 5 SHIFT x^2 = 0.632455532

$\sqrt{\dfrac{2}{5}}\rightarrow$ 2 ÷ 5 = SHIFT x^2 0.632455532

例 3　根式的除法運算

計算下列各式的值。

(1) $\sqrt{35}\div\sqrt{5}$　　(2) $(-12\sqrt{6})\div(8\sqrt{3})$　　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\div\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

解

(1) $\sqrt{35}\div\sqrt{5}=\sqrt{35\div5}=\sqrt{7}$

(2) $(-12\sqrt{6})\div(8\sqrt{3})=-\dfrac{\overset{3}{\cancel{12}}\sqrt{6}}{\underset{2}{\cancel{8}}\sqrt{3}}=-\dfrac{3}{2}\times\sqrt{\dfrac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}}=-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\div\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}\div\sqrt{\dfrac{6}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}\div\dfrac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}}=\sqrt{(\dfrac{1}{3})^2}=\dfrac{1}{3}$

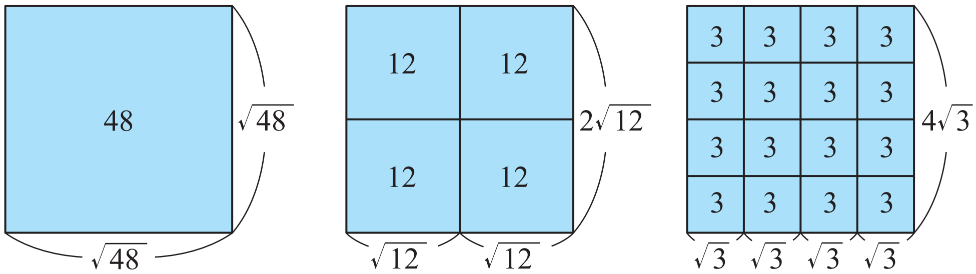
隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $\sqrt{98}\div\sqrt{14}$　　(2) $9\sqrt{35}\div(-3\sqrt{7})$　　(3) $\dfrac{\sqrt{33}}{\sqrt{7}}\div\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{21}}$

最簡根式與有理化

我們可以將一個面積為 48 的大正方形切成 4 個面積為 12 的中正方形，也可以切成 16 個面積為 3 的小正方形，如下圖。



由圖可知，三個大正方形的邊長分別會是 $\sqrt{48}$、$2\sqrt{12}$ 和 $4\sqrt{3}$。又因為大正方形的面積都相等，所以它們的邊長也會相等，即 $\sqrt{48}=2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$。

這些根式看起來雖然不一樣，但它們的值都相等，因此在數學上，我們可以將根式化簡成 $a\sqrt{b}$ 的形式，其中 a 為整數、分數或小數，b 為正整數，且 b 的標準分解式中，質因數的次數都是 1，此時我們就稱 $a\sqrt{b}$ 為**最簡根式**，所以 $4\sqrt{3}$ 是最簡根式，$3\sqrt{2}$、$-7\sqrt{3}$、$\frac{1}{2}\sqrt{15}$ 等也都是最簡根式。

若有下列幾種情形，就<u>不是</u>最簡根式：

(1) **根號內的數，其標準分解式中有質因數的次數大於 1**。
例如：$\sqrt{48}=\sqrt{2^4\times 3}$、$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times 3}$。

(2) **分數的分母有根式**。例如：$\frac{1}{\sqrt{5}}$、$-\frac{9}{\sqrt{6}}$、$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$。

(3) **根號內的數為分數或小數**。例如：$\sqrt{\frac{1}{2}}$、$-\sqrt{0.1}$。

隨堂練習

圈圈看，下列哪些是最簡根式？

$\sqrt{2.7}$　$\sqrt{18}$　$-\sqrt{42}$　$\frac{8}{3}\sqrt{15}$　$\frac{7}{\sqrt{2}}$　$\sqrt{\frac{6}{11}}$　$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}$

第 77 頁提到的三種不是最簡根式的情形，又該如何化簡呢？

(1) 如果**根號內的數，其標準分解式中質因數的次數大於 1**，我們可以針對完全平方的因數先做處理，讓根式變成最簡根式。

例 4

化為最簡根式

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{5^3}$　(2) $\sqrt{18}$　(3) $\sqrt{8}\times\sqrt{45}$　(4) $\sqrt{4\times3\times18}$

解

(1) $\sqrt{5^3}=\sqrt{5^2\times5}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{18}=\sqrt{2\times3^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}=\sqrt{2}\times3=3\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{8}\times\sqrt{45}=\sqrt{2^2\times2}\times\sqrt{3^2\times5}$
$=2\sqrt{2}\times3\sqrt{5}$
$=6\sqrt{10}$

(4) $\sqrt{4\times3\times18}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}\times\sqrt{18}$
$=2\times\sqrt{3}\times3\sqrt{2}$
$=6\sqrt{6}$

Hint

根式相乘時，可先將根號內的數相乘之後再化簡，也可以先各自化簡之後再相乘。

隨堂練習

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{2^5}$　(2) $\sqrt{80}$　(3) $\sqrt{12}\times\sqrt{20}$　(4) $\sqrt{6\times9\times121}$

(2) 如果**分數的分母含有根式**，此時可以利用擴分或其他方法，讓此分數變成最簡根式。將分母化為不帶有根號的過程，稱為分母有理化。

例 5 利用分母有理化化為最簡根式

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$　　(2) $\dfrac{5}{\sqrt{12}}$

解

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$

分母有理化

$=\dfrac{2\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}$

$=\dfrac{\cancel{2}^{1}\times\sqrt{10}}{\cancel{10}_{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

(2) $\dfrac{5}{\sqrt{12}}$

$=\dfrac{5}{\sqrt{2^2\times3}}$

$=\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$

分母有理化

$=\dfrac{5\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{2\times3}$

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

隨堂練習

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$　　(2) $\dfrac{3}{\sqrt{32}}$

(3) 如果**根號內的數為分數或小數**，要如何化為最簡根式呢？我們來看下面的例題。

例 6 化為最簡根式

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{0.8}$　　(2) $\sqrt{\frac{5}{27}}$

解 (1) $\sqrt{0.8}=\sqrt{\frac{8}{10}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{4\times5}{5\times5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

或 $\sqrt{0.8}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(2) $\sqrt{\frac{5}{27}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{27}}=\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3\times3}=\frac{\sqrt{15}}{9}$

或 $\sqrt{\frac{5}{27}}=\sqrt{\frac{5\times3}{27\times3}}=\sqrt{\frac{15}{81}}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{81}}=\frac{\sqrt{15}}{9}$

Hint

若將 $\sqrt{\frac{5}{27}}$ 寫成 $\sqrt{\frac{5\times27}{27\times27}}$，也可將分母有理化，但數字較大不好計算。

隨堂練習

將下列根式化為最簡根式。

(1) $\sqrt{7.2}$　　(2) $\sqrt{\frac{3}{28}}$

主題 2 根式的四則運算

同類方根

當兩個或兩個以上的根式分別化為形如 $a\sqrt{b}$ 的最簡根式後，若根號內的數 b 相同，就稱它們是同類方根。

例如：$2\sqrt{2}$、$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$、$-3\sqrt{2}$ 是 $\sqrt{2}$ 的同類方根；

$-3\sqrt{10}$、$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 是 $\sqrt{10}$ 的同類方根。

隨堂練習

圈圈看，下列哪些是 $\sqrt{6}$ 的同類方根。

$\sqrt{12}$　　$\sqrt{24}$　　$\sqrt{16}$　　$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$　　$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　　$\sqrt{0.06}$

數學好好玩　易根玉米

玉米是世界上最重要的糧食作物之一，富有相當高的營養價值，也可製成可分解的環保餐具。請翻到書末 *P*.IV「易根玉米」，根據同類方根與根式的化簡，動手種出自己獨一無二的「易根玉米」吧！

根式的加減運算

在第二冊學習二元一次式時，我們知道，

(1) 同類項能合併化簡，例如：$2x+3x=5x$、$4y-3y=y$。

(2) 不同類項則不能合併化簡，例如：$x+3y$。

同樣的，**根式的加減運算是將同類方根合併化簡，不同類方根則不能合併化簡**。我們用下面的例題說明。

例 7　同類方根的加減運算

化簡下列各式。

(1) $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}$　　(2) $4\sqrt{6}-3\sqrt{6}$

(3) $5\sqrt{10}-3\sqrt{5}-2\sqrt{10}+4\sqrt{5}$

解

(1) $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=(2+3)\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

(2) $4\sqrt{6}-3\sqrt{6}=(4-3)\times\sqrt{6}=\sqrt{6}$

(3) 因為 $5\sqrt{10}$ 和 $-2\sqrt{10}$ 是同類方根，

$-3\sqrt{5}$ 和 $4\sqrt{5}$ 是同類方根，

所以 $5\sqrt{10}-3\sqrt{5}-2\sqrt{10}+4\sqrt{5}$

$=(5\sqrt{10}-2\sqrt{10})+(-3\sqrt{5}+4\sqrt{5})$

$=3\sqrt{10}+\sqrt{5}$

隨堂練習

化簡下列各式。

(1) $7\sqrt{13}-4\sqrt{13}$　　(2) $5\sqrt{11}-3\sqrt{7}-2\sqrt{11}+4\sqrt{7}$

計算根式的加減時，通常會先將各項化為最簡根式，再進行運算。

例 8 先化為最簡根式再做運算

化簡下列各式。

(1) $3\sqrt{2}+\sqrt{8}$

(2) $\sqrt{1\frac{9}{16}}+\sqrt{4\frac{25}{36}}$

(3) $\frac{2}{\sqrt{6}}-\frac{2}{3}\sqrt{6}$

(4) $3\sqrt{3}+2\sqrt{5}-(\sqrt{12}-\sqrt{45})$

解 (1) $3\sqrt{2}+\sqrt{8}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{1\frac{9}{16}}+\sqrt{4\frac{25}{36}}=\sqrt{\frac{25}{16}}+\sqrt{\frac{169}{36}}=\frac{5}{4}+\frac{13}{6}=\frac{41}{12}$ (或 $3\frac{5}{12}$)

(3) $\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

所以 $\frac{2}{\sqrt{6}}-\frac{2}{3}\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{6}=(\frac{1}{3}-\frac{2}{3})\sqrt{6}=-\frac{1}{3}\sqrt{6}$

(4) $3\sqrt{3}+2\sqrt{5}-(\sqrt{12}-\sqrt{45})=3\sqrt{3}+2\sqrt{5}-(2\sqrt{3}-3\sqrt{5})$

$=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+3\sqrt{5}$

$=\sqrt{3}+5\sqrt{5}$

隨堂練習

化簡下列各式。

(1) $4\sqrt{3}-\sqrt{12}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{18}$

(3) $\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{27}+\sqrt{50}$

動動腦

1. $\sqrt{4}+\sqrt{9}=\sqrt{4+9}$ 是否成立？

2. $\sqrt{4\frac{25}{36}}=2\frac{5}{6}$ 是否成立？

根式的四則運算

根式也可以像數一樣進行四則運算，我們來看下面的例題。

例 9 根式的四則運算

化簡下列各式。

(1) $\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{5}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}$ (2) $(-4\sqrt{15})\times(-\sqrt{\frac{1}{3}})-4\sqrt{5}$

解 (1) $\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{5}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}$

$=\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\div\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{6}{1}}$

$=\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{3\times5}{5\times5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

(2) $(-4\sqrt{15})\times(-\sqrt{\frac{1}{3}})-4\sqrt{5}$

$=4\times\sqrt{15\times\frac{1}{3}}-4\sqrt{5}$

$=4\sqrt{5}-4\sqrt{5}$

$=0$

隨堂練習

化簡下列各式。

(1) $(-\sqrt{6})\times\sqrt{\frac{1}{3}}\div(2\sqrt{2})$ (2) $(-\sqrt{1\frac{2}{3}})\times(-\sqrt{\frac{3}{10}})+\frac{1}{\sqrt{2}}$

例 10 根式的四則運算

化簡下列各式。

(1) $2\sqrt{3}\times(\sqrt{12}-\sqrt{2})$　　(2) $(-3\sqrt{2}+\sqrt{15})\div\sqrt{3}$

(3) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-1)$

解

(1) $2\sqrt{3}\times(\sqrt{12}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}\times(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}$

$=12-2\sqrt{6}$

(2) $(-3\sqrt{2}+\sqrt{15})\div\sqrt{3}=\dfrac{-3\sqrt{2}+\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{-3\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+\sqrt{\dfrac{15}{3}}$

$=-\sqrt{6}+\sqrt{5}$

(3) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-1)=\sqrt{3}\times\sqrt{6}-\sqrt{3}\times1+\sqrt{2}\times\sqrt{6}-\sqrt{2}\times1$

$=\sqrt{18}-\sqrt{3}+\sqrt{12}-\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

隨堂練習

化簡下列各式。

(1) $(\sqrt{24}-2\sqrt{3}+\sqrt{15})\div\sqrt{12}$　　(2) $(1+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{3})$

例 11　利用乘法公式進行根式運算

化簡下列各式。

(1) $(\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$　　(2) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2$

學習時光機

1. 和的平方公式
$(a+b)^2$
$=a^2+2ab+b^2$
2. 差的平方公式
$(a-b)^2$
$=a^2-2ab+b^2$
3. 平方差公式
$(a+b)(a-b)$
$=a^2-b^2$

解 (1) 利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，

得 $(\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2$

$=3-8$

$=-5$

(2) 利用乘法公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，

得 $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{3}\times2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2$

$=3+4\sqrt{6}+8$

$=11+4\sqrt{6}$

隨堂練習

利用乘法公式化簡下列各式。

(1) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$

(2) $(\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$

如果分母是兩個根式相加(減),就可利用乘法公式,將分母有理化。

例 12 利用乘法公式將分母有理化

將下列各式的分母有理化。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

解 (1) 要將分母有理化,可利用乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,

即 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=3-2=1$,

所以 $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{1\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\times(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}$

$=\dfrac{3\sqrt{6}-6}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}=\dfrac{3\sqrt{6}-6}{18-12}$

$=\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$ (或 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}-1$)

隨堂練習

將下列各式的分母有理化。

(1) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}$

重點整理

1 根式的表示

若 $a \neq 0$、$b \geq 0$，則 $a \times \sqrt{b}$ 寫成 $a\sqrt{b}$；$\sqrt{b} \div a$ 寫成 $\dfrac{\sqrt{b}}{a}$ 或 $\dfrac{1}{a}\sqrt{b}$。

例 $5 \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$、$\sqrt{7} \div 2 = \dfrac{\sqrt{7}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{7}$。

2 根式的乘除運算

(1) 若 $a \geq 0$、$b \geq 0$，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$。

例 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$。

(2) 若 $a \geq 0$、$b > 0$，則 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 或 $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b}$。

例 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$，$\sqrt{35} \div \sqrt{5} = \sqrt{35 \div 5} = \sqrt{7}$。

3 最簡根式

若一個數為 $a\sqrt{b}$，其中 a 為整數、分數或小數，b 為正整數，且 b 的標準分解式中，質因數的次數都是 1，我們稱 $a\sqrt{b}$ 為最簡根式。

例 $3\sqrt{2}$、$-7\sqrt{3}$、$\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$ 都是最簡根式。

4 分母有理化

將分母化為不帶有根號的過程，稱為分母有理化。

例 $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$。

5 同類方根

當兩個或兩個以上的根式分別化為形如 $a\sqrt{b}$ 的最簡根式後，若根號內的數 b 相同，就稱它們是同類方根。

例 $\sqrt{2}$ 和 $3\sqrt{2}$ 是同類方根；$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 和 $-\sqrt{5}$ 是同類方根。

6 根式的加減運算

根式的加減運算是將同類方根合併化簡，不同類則不能合併化簡。

例 $2\sqrt{3} + 4\sqrt{6} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{6} = (2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) + (4\sqrt{6} - 3\sqrt{6}) = 5\sqrt{3} + \sqrt{6}$。

自我評量

1 下列何者是最簡根式？答：________。 P.77 隨堂

(A) $\sqrt{75}$　(B) $\frac{2}{9}\sqrt{7}$　(C) $\frac{3}{\sqrt{6}}$　(D) $\sqrt{\frac{5}{19}}$

2 下列何者<u>不是</u> $\sqrt{3}$ 的同類方根？答：________。 P.81 隨堂

(A) $\sqrt{12}$　(B) $\frac{6}{\sqrt{3}}$　(C) $\frac{1}{3}\sqrt{24}$　(D) $\sqrt{16\frac{1}{3}}$

3 計算下列各式的值，並化為最簡根式。

(1) $(-3\sqrt{3})\times4\sqrt{5}$ P.75 例 2

(2) $\sqrt{\frac{5}{6}}\div\sqrt{2\frac{1}{2}}$ P.76 例 3

(3) $4+6\sqrt{2}-(5\sqrt{2}-3)$ P.82 例 7

(4) $\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{16}$ P.83 例 8

(5) $(2\sqrt{5}-\sqrt{10})\div\sqrt{15}$ P.85 例 10

(6) $(1+\sqrt{12})\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ P.85 例 10

4 若 $a=2\sqrt{5}$、$b=3\sqrt{2}$，利用乘法公式計算下列各式的值，並化為最簡根式。

(1) $(a+b)(a-b)$　　(2) $(a+b)^2$

P.86 例 11

5 將 $\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}$ 化為最簡根式。

P.87 例 12

挑錯題

以下是小翊和小妍「計算 $\sqrt{16\frac{1}{3}}+\sqrt{1\frac{1}{3}}$ 」的過程。判斷他們的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。

小翊：

$$\sqrt{16\frac{1}{3}}+\sqrt{1\frac{1}{3}}$$
$$=\sqrt{16\frac{1}{3}+1\frac{1}{3}}=\sqrt{17\frac{2}{3}}$$
$$=\sqrt{\frac{53}{3}}=\frac{\sqrt{159}}{3}$$

小妍：

$$\sqrt{16\frac{1}{3}}+\sqrt{1\frac{1}{3}}$$
$$=4\sqrt{\frac{1}{3}}+1\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$=5\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$