



2-6 多項式的四則運算

在進行運算時，除了已知數的運算，我們也開始熟悉著使用未知數來進行運算，來協助我們取得方程式的解。

譬如：一元一次方程式 $3x - 5 = 2x + 9$

$$\text{二元一次聯立方程式} \begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

在解方程式的過程中，我們經常需要將同一類的算式(或項目)進行加減運算來化簡算式，最後取得方程式的解，以上面的例子來說，

$3x$ 和 _____ 是同一類， 5 和 _____ 是同一類， $3y$ 和 _____ 是同一類。

同一類，可以進行加減運算合併的項目，被稱為 _____。

對於一元二次方程式而言，譬如： $3x^2 + 6x - 5 = 2x^2 - 7x + 4$ ，則會有 3 種 **同類項**：

不含未知數的項目：_____，這些都是()的倍數。

未知數是一次方的項目：_____，這些都是()的倍數。

未知數是二次方的項目：_____，這些都是()的倍數。

由 1 的倍數、 x 的倍數、 x^2 的倍數、...、 x^n 的倍數，以加減運算所寫出來的算式被稱為 _____，如果這個算式中未知數的最高次方是 m 次，這個算式就被稱為 _____ 次 _____。

前面所提的倍數被稱為該項目的 _____。

1 的倍數的算式被稱為 _____ 項、 x 的倍數的算式被稱為 _____ 項、

x^2 的倍數的算式被稱為 _____ 項、 x^3 的倍數的算式被稱為 _____ 項...

在實際進行解方程式之前，我們先熟悉一下多項式的四則運算。

1. 多項式的乘積展開和因式分解。

乘積展開	因式分解
------	------

<p>(1) $(x+3)\times(x+3)=$_____</p> $\begin{array}{r} x + 3 \\ \times) x + 3 \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline () \square () \square () \end{array}$	<p>(2) $x^2+6x+9=$_____</p> $\begin{array}{r} () \square () \\ \times) () \square () \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline x^2 + 6x + 9 \end{array}$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

乘積展開	因式分解
<p>(3) $(x-5)\times(x-5)=$_____</p> $\begin{array}{r} x - 5 \\ \times) x - 5 \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline () \square () \square () \end{array}$	<p>(4) $x^2-10x+25=$_____</p> $\begin{array}{r} () \square () \\ \times) () \square () \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline x^2 - 10x + 25 \end{array}$
<p>(5) $(x+7)\times(x-7)=$_____</p> $\begin{array}{r} x + 7 \\ \times) x - 7 \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline () \square () \square () \end{array}$	<p>(6) $x^2-49=$_____</p> $\begin{array}{r} () \square () \\ \times) () \square () \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline x^2 - 49 \end{array}$
<p>(7) $(x+3)\times(x+5)=$_____</p> $\begin{array}{r} x + 3 \\ \times) x + 5 \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline () \square () \square () \end{array}$	<p>(8) $x^2+8x+15=$_____</p> $\begin{array}{r} () \square () \\ \times) () \square () \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline x^2 + 8x + 15 \end{array}$

<p>(9) $(x-4) \times (x-6) = \underline{\hspace{2cm}}$</p> $\begin{array}{r} x - 4 \\ \times) x - 6 \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline () \square () \square () \end{array}$	<p>(10) $x^2 - 10x + 24 = \underline{\hspace{2cm}}$</p> $\begin{array}{r} () \square () \\ \times) () \square () \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline x^2 - 10x + 24 \end{array}$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

乘積展開	因式分解
<p>(11) $(x+4) \times (x-6) = \underline{\hspace{2cm}}$</p> $\begin{array}{r} x + 4 \\ \times) x - 6 \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline () \square () \square () \end{array}$	<p>(12) $x^2 - 2x - 24 = \underline{\hspace{2cm}}$</p> $\begin{array}{r} () \square () \\ \times) () \square () \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline x^2 - 2x - 24 \end{array}$
<p>(13) $(2x+3) \times (4x+5) = \underline{\hspace{2cm}}$</p> $\begin{array}{r} 2x + 3 \\ \times) 4x + 5 \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline () \square () \square () \end{array}$	<p>(14) $8x^2 + 22x + 15 = \underline{\hspace{2cm}}$</p> $\begin{array}{r} () \square () \\ \times) () \square () \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline 8x^2 + 22x + 15 \end{array}$
<p>(15) $(3x+4) \times (2x-7) = \underline{\hspace{2cm}}$</p> $\begin{array}{r} 3x + 4 \\ \times) 2x - 7 \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline () \square () \square () \end{array}$	<p>(16) $6x^2 - 13x - 28 = \underline{\hspace{2cm}}$</p> $\begin{array}{r} () \square () \\ \times) () \square () \\ \hline \square () \square () \\ () \square () \\ \hline 6x^2 - 13x - 28 \end{array}$

<p>(17) $(2x^2 - 7x + 5) \times (3x - 4)$ $=$ _____</p> <p style="text-align: center;">$2x^2 \quad - \quad 7x \quad + \quad 5$</p> <p>×) $\quad \quad \quad 3x \quad - \quad 4$</p>	<p>(18) $6x^3 - 29x^2 + 43x - 20$ $=$ _____</p> <p style="text-align: center;">() □ () □ ()</p> <p>×) $\quad \quad \quad () \quad \square \quad ()$</p>
□ () □ () □ ()	□ () □ () □ ()
() □ () □ ()	() □ () □ ()
() □ () □ () □ ()	$6x^3 - 29x^2 + 43x - 20$

由上而下的直式運算，將算式從「一起算」改寫成「分開算」，這個過程被稱為_____，譬如： $(3x+4) \times (2x+1) = 6x^2 + 11x + 4$ 。

由下而上的直式運算，將算式從「分開算」改寫成「一起算」，這個過程被稱為_____，譬如： $6x^2 + 11x + 4 = (3x+4) \times (2x+1)$ 。

此時， $6x^2 + 11x + 4$ 可以被 $3x+4$ 、 $2x+1$ 整除。

$6x^2 + 11x + 4$ 被稱為 $3x+4$ 、 $2x+1$ 的_____，

$3x+4$ 、 $2x+1$ 被稱為 $6x^2 + 11x + 4$ 的_____。

將多項式分解可以檢查整除與否，但，有時我們更在意的是，一個多項式可以被寫成另一個多項式的幾倍，還剩多少，直接除除看！

2. 多項式的除法。

先從數字來思考除法的想法是什麼？

以 $37 \div 4$ 為例

$\begin{array}{r} (\quad) \\ 4 \overline{) 37} \\ (\quad) \\ \hline (\quad) \end{array}$	<p>运算過程中...</p> <p>我們在思考 37 是 4 的幾倍，還剩多少？</p> <p>紀錄為 $37 \div 4 = (\quad) \dots (\quad)$</p> <p>想法為 $37 = 4 \times (\quad) + (\quad)$</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

也就是說，我們使用乘法來達成除法的運算。

使用相同的想法，我們來學習多項式的除法。

除法	乘法
(1) $(6x^2 + 23x + 20) \div (2x + 5)$ $= (\quad) \dots (\quad)$	(2) $(2x + 5) \times (\quad) + (\quad)$ $= 6x^2 + 23x + 20$ $ \begin{array}{r} \\ \\ \\ \hline 6x^2 + 23x + 20 \end{array} $

除法	乘法
(3) $(10x^2 + 3x - 18) \div (5x - 6)$ $= (\quad) \dots (\quad)$ $ \begin{array}{r} \\ \\ \\ \hline \\ \\ \hline \end{array} $	(4) $(5x - 6) \times (\quad) + (\quad)$ $= 10x^2 + 3x - 18$ $ \begin{array}{r} \\ \\ \\ \hline 10x^2 + 3x - 18 \end{array} $
(5) $(6x^2 + 17x + 10) \div (3x + 4)$ $= (\quad) \dots (\quad)$ $ \begin{array}{r} \\ \\ \\ \hline \\ \\ \hline \end{array} $	(6) $(3x + 4) \times (\quad) + (\quad)$ $= 6x^2 + 17x + 10$ $ \begin{array}{r} \\ \\ \\ \hline 6x^2 + 17x + 10 \end{array} $

<p>(7) $(8x^2 - 10x - 5) \div (4x + 1)$ $= (\quad) \dots (\quad)$</p> $ \begin{array}{r} (\quad) \square (\quad) \\ 4x + 1 \overline{) 8x^2 - 10x - 5} \\ \underline{(\quad) \square (\quad)} \\ (\quad) \square (\quad) \\ \underline{(\quad) \square (\quad)} \\ (\quad) \end{array} $	<p>(8) $(4x + 1) \times (\quad) + (\quad)$ $= 8x^2 - 10x - 5$</p> $ \begin{array}{r} 4x + 1 \\ \times (\quad) \square (\quad) \\ \hline \square (\quad) \square (\quad) \\ (\quad) \square (\quad) \\ \hline 8x^2 - 10x - 5 \end{array} $
<p>(9) $(4x^2 + 1) \div (2x + 1)$ $= (\quad) \dots (\quad)$</p> $ \begin{array}{r} (\quad) \square (\quad) \\ 2x + 1 \overline{) 4x^2 \quad + 1} \\ \underline{(\quad) \square (\quad)} \\ (\quad) \square (\quad) \\ \underline{(\quad) \square (\quad)} \\ (\quad) \end{array} $	<p>(10) $(2x + 1) \times (\quad) + (\quad)$ $= 4x^2 + 1$</p> $ \begin{array}{r} 2x + 1 \\ \times (\quad) \square (\quad) \\ \hline \square (\quad) \square (\quad) \\ (\quad) \square (\quad) \\ \hline 4x^2 \quad + 1 \end{array} $
<p>除法</p>	<p>乘法</p>
<p>(11) $(6x^2 + 8x - 1) \div (2x)$ $= (\quad) \dots (\quad)$</p> $ \begin{array}{r} (\quad) \square (\quad) \\ 2x \overline{) 6x^2 + 8x - 1} \\ \underline{(\quad) \square (\quad)} \\ (\quad) \square (\quad) \\ \underline{(\quad) \square (\quad)} \\ (\quad) \end{array} $	<p>(12) $(2x) \times (\quad) + (\quad)$ $= 6x^2 + 8x - 1$</p> $ \begin{array}{r} 2x \\ \times (\quad) \square (\quad) \\ \hline \square (\quad) \\ (\quad) \\ \hline 6x^2 + 8x - 1 \end{array} $
<p>(13) $(6x^2 - 5x + 1) \div (3x^2 - 2x + 4)$ $= (\quad) \dots (\quad)$</p> $ \begin{array}{r} (\quad) \\ 3x^2 - 2x + 4 \overline{) 6x^2 - 5x + 1} \\ \underline{(\quad) \square (\quad) \square (\quad)} \\ (\quad) \square (\quad) \end{array} $	<p>(14) $(3x^2 - 2x + 4) \times (\quad) + (\quad)$ $= 6x^2 - 5x + 1$</p> $ \begin{array}{r} 3x^2 - 2x + 4 \\ \times (\quad) \\ \hline (\quad) \square (\quad) \square (\quad) \\ \hline 6x^2 - 5x + 1 \end{array} $

命名一下，並寫出彼此關係。

$$37 \div 4 = 9 \dots 1 \quad \longleftrightarrow \quad (6x^2 + 17x + 10) \div (3x + 4) = 2x + 3 \dots -2$$

↑ ↑ ↑ ↑
↑ ↑ ↑ ↑

被除數 除數 商數 餘數
((((

))))

$$37 = 4 \times 9 + 1 \qquad 6x^2 + 17x + 10 = (3x + 4) \times (2x + 3) + (-2)$$

被除數 = 除數 × 商數 + 餘數 () = () × () + ()

<p>(15) 已知 $8x^2 + 2x - 15$ 除以多項式 B 後，商式為 $4x + 7$，餘式為 6，求多項式 B。</p>	<p>(16) 已知梯形上底 $x - 3$、下底 $3x + 5$、面積 $2x^2 + 5x + 2$，求此梯形的高。</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------