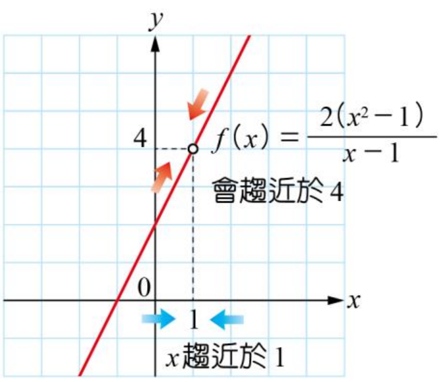
彰化縣私立精誠高中數學領域公開觀議課教案

<table>
<tr><td colspan="2">教 學 單 元</td><td>函數的極限</td><td>授　課　教　師</td><td colspan="2">張國欽</td></tr>
<tr><td colspan="2">教 學 時 間</td><td>50 分鐘</td><td>教　學　對　象</td><td colspan="2">6 年 7 班</td></tr>
<tr><td rowspan="4">教
學
研
究</td><td>教學
理念</td><td colspan="4">讓學生透過觀察來發現，進而理解概念與意義。</td></tr>
<tr><td>教學
目標</td><td colspan="4">1. 理 解 函 數 極 限 的 意 義 。
2. 了解函數極限存在的條件。</td></tr>
<tr><td>教學
方法</td><td colspan="4">講 述 教 學 法 、 問 答 教 學 法 。</td></tr>
<tr><td>評量
方式</td><td colspan="4">課 堂 表 現 。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">教
學
活
動</td><td colspan="2">教 學 流 程 及 內 容 設 計</td><td>時 間</td><td colspan="2">教學資源</td></tr>
<tr><td colspan="2">壹 、 準 備 階 段
1. 由已學習過的數列的極限引入
數列〈a_n〉的極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，即當 n 愈來愈大時，一般項 a_n 可能趨近於某個定值。

而數列的一般項可視作某種函數，那麼函數是否也可能存在著極限呢？

貳 、 發 展 階 段
1. 舉例：當 x 趨近於 1 時，$\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}$ 的值會趨近於多少？

</td><td>2 分鐘

5 分鐘</td><td colspan="2">課 本 、 黑 板 、 粉 筆</td></tr>
</table>

x	$\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}$
0.9	3.8
0.99	3.98
0.999	3.998
1.001	4.002
1.01	4.02
1.1	4.2

4

2. **函數的極限** 4 分鐘

設函數 $f(x)$ 在一個包含 a 的開區間中的任意實數 $x(x \neq a)$有定義。若能找到一個實數 L 使得：只要 x 足夠靠近 a，函數 $f(x)$ 的值要多麼靠近 L 都可以，

則我們稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 時有極限 L，

記為 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$。

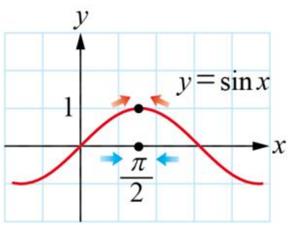
因為 $f(x)$ 的函數值不可能同時無限接近兩個不同的實數，所以極限若存在，則必唯一。

3. 【例題 1】 6 分鐘

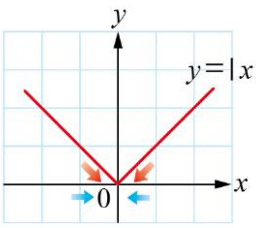
計算下列各極限：(1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$。 (2) $\lim\limits_{x \to 0} |x|$

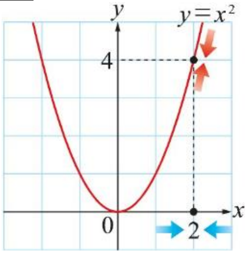
$\boxed{解}$：

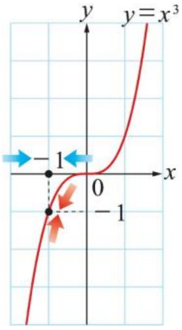
(1)由函數圖形可觀察到，當 x 趨近於 $\dfrac{\pi}{2}$ 時，$\sin x$ 的函數值會趨近於 1，故 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$。

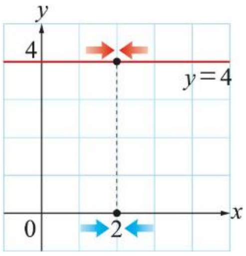


(2)由函數圖形可觀察到，當 x 趨近於 0 時，$|x|$ 的函數值會趨近於 0，故 $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$。



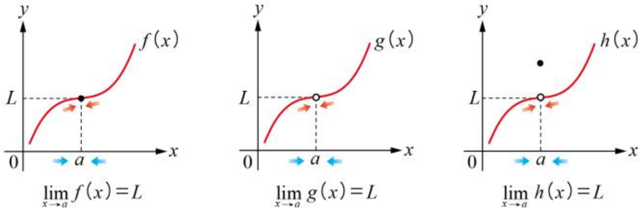
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
4. 【隨堂練習 1】
計算下列各極限：
(1) $\lim\limits_{x\to 2} x^2$ (2) $\lim\limits_{x\to -1} x^3$ (3) $\lim\limits_{x\to 2} 4$
$\boxed{\text{解}}$：


由函數圖形可觀察到 $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$。


由函數圖形可觀察到 $\lim\limits_{x\to -1} x^3 = -1$。


由函數圖形可觀察到 $\lim\limits_{x\to 2} 4 = 4$。

5. 觀念：
(1)“x 趨近於 a”是“x 愈來愈靠近 a，”而不是“$x=a$。”

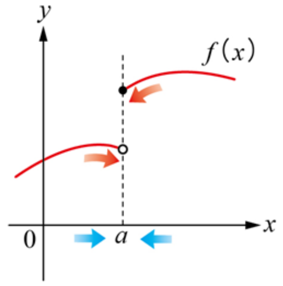
(2)


$g(x)$ 在 $x=a$ 沒有定義，$h(x)$ 在 $x=a$ 有定義，但值不是 L。然而，這三個函數在 $x=a$ 的極限都是 L。亦即，求 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 時，並不需要考慮 $f(a)$ 的值。
</td>
<td>8 分鐘

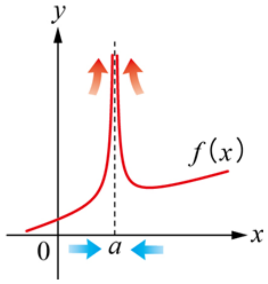
6 分鐘</td>
<td></td>
</tr>
</table>

(3)並不是每一個函數在 $x=a$ 都有極限。

4 分鐘



當 x 趨近於 a 時，x 由左側或右側靠近時，$f(x)$ 趨近的值並不相同，這樣就稱 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在。



當 x 趨近於 a 時，$f(x)$ 值值趨近無限大，這樣也稱 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在。

6. 【例題 2】

4 分鐘

函數 $f(x)$ 的圖形如圖 9，試求：

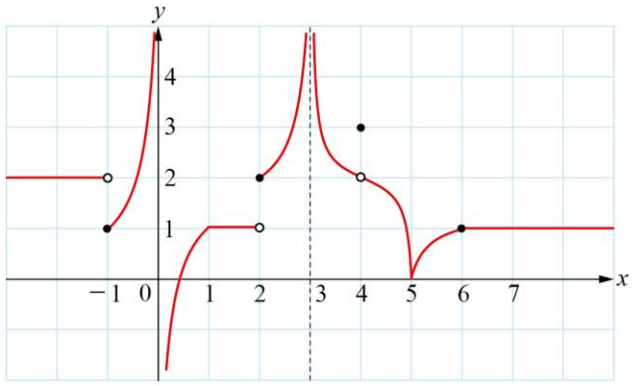


圖 9

(1) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ (4) $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$

解：

(1) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ 不存在，因為 x 由左側趨近於 -1 時，$f(x)$ 趨近於 2，而 x 由右側趨近於 -1 時，$f(x)$ 趨近於 1，兩者不相等。

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，因為 x 由左側或右側趨近於 0 時，$f(x)$ 分別趨近於正、負無限大。

	(3) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$，因為 x 由左側或右側趨近於 4 時，$f(x)$ 趨近於 2，故極限值為 2。 (4) $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 1$。		
	7. 當 $f(x)$ 在某個以 a 為右端點的開區間有定義時，我們將「x 從左側趨近於 a 時，$f(x)$ 趨近的值」稱為「$f(x)$ 在 $x=a$ 的**左極限**」，記為 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$。 當 $f(x)$ 在某個以 a 為左端點的開區間有定義時，我們將「x 從右側趨近於 a 時，$f(x)$ 趨近的值」稱為「$f(x)$ 在 $x=a$ 的**右極限**」，記為 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$。 因此「$f(x)$ 在 $x=a$ 有極限 L」即「$f(x)$ 在 $x=a$ 的左極限等於右極限，且都等於 L。」	6 分鐘	
	8. **極限存在的條件** $f(x)$ 在 $x=a$ 有極限 L 的充要條件為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的左極限等於右極限，且都等於 L 即 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ 且 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$	3 分鐘	
	參、綜合階段		
	1. 重點複習：函數的極限的意義及函數極限存在的條件。	2 分鐘	
	2. 作業：練習隨堂練習 2，並預習函數極限的運算性質。		
	參考資料：普通型高級中學數學選修數學甲上（翰林版）		