

單元一 二次函數、函數值

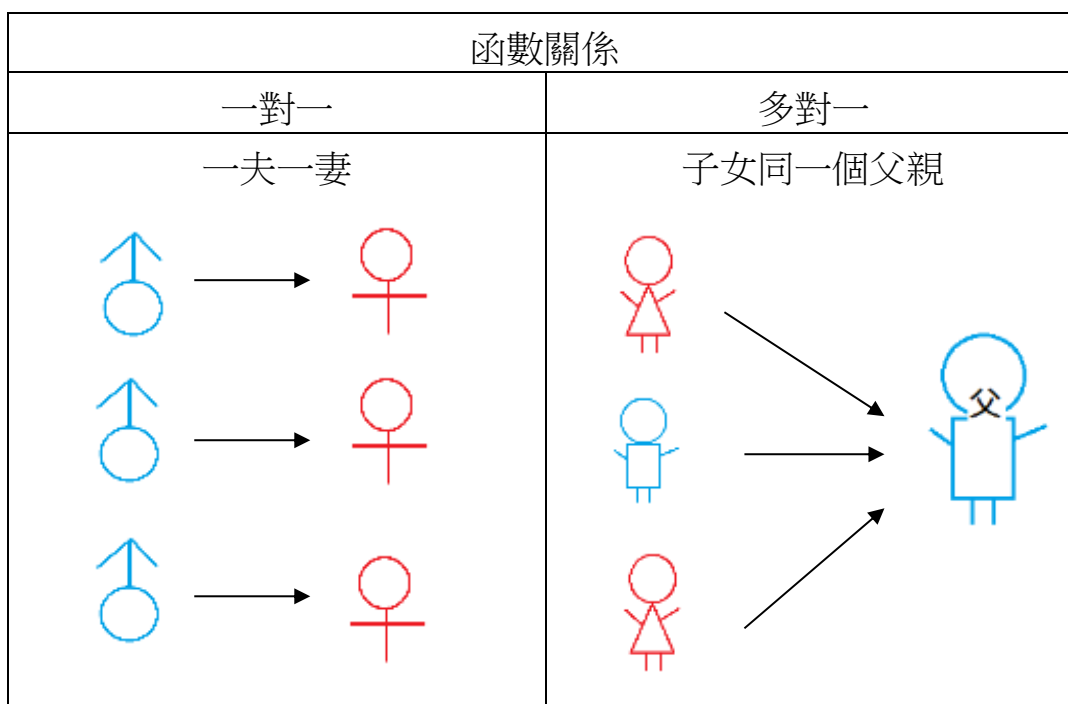
主題一 複習函數與一次函數

一、函數

生活中有許多的對應關係，「函數」就是其中一種可以用數學式子表示彼此間關係的對應情形。

◇ 函數有兩種情況：

- 一對一(例.一夫一妻、每種商品一種價格、每個人一種身高、每個人一個生日)
- 多對一(例.子女同一個父親、同一種價格有很多商品、同一個身高有很多人、同一天有很多人生日)



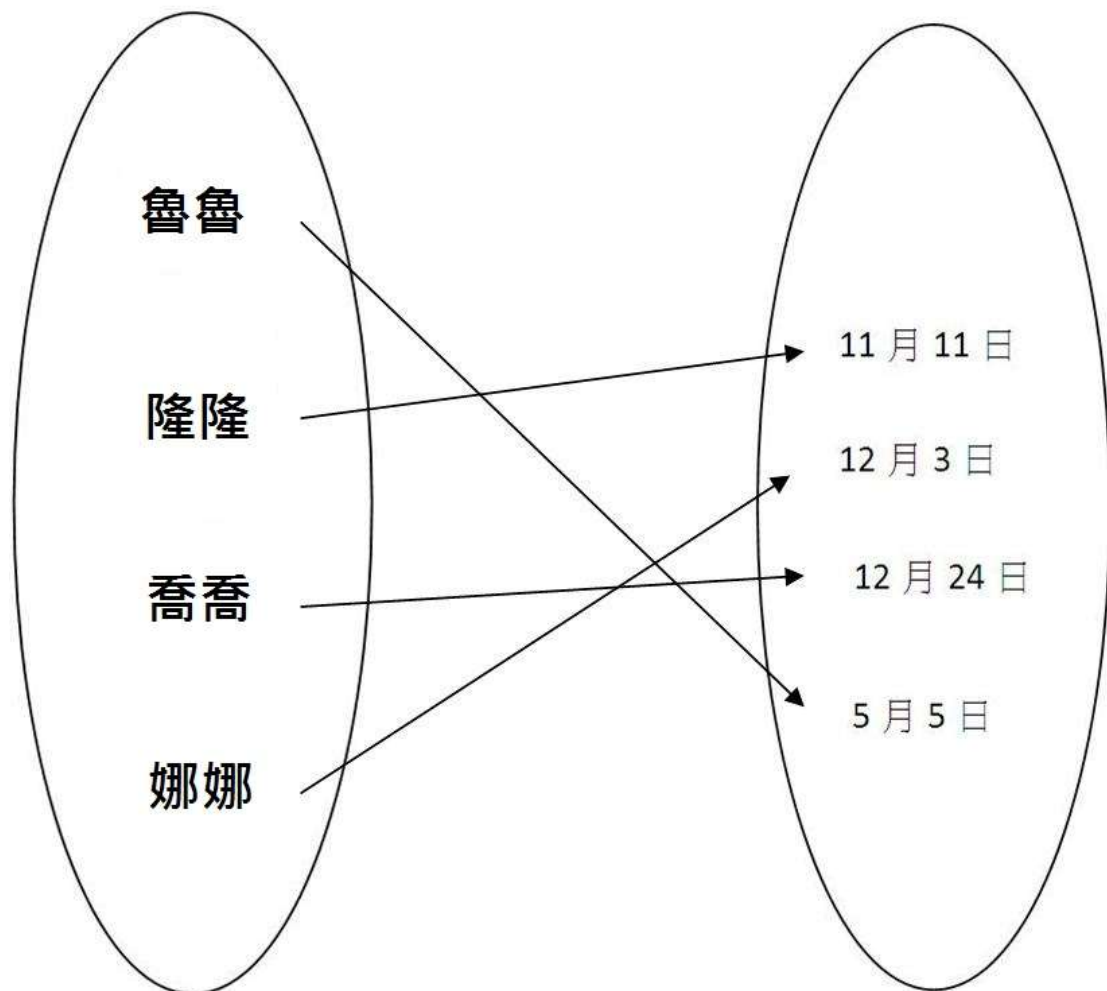
◇ 現在我們要開始進入海盜們的故事囉！

😊 這是有關一群勇敢的”海盜們”冒險的故事，下表是他們的基本資料，以下將根據下表及題意，討論人物與基本資料的對應關係。😊

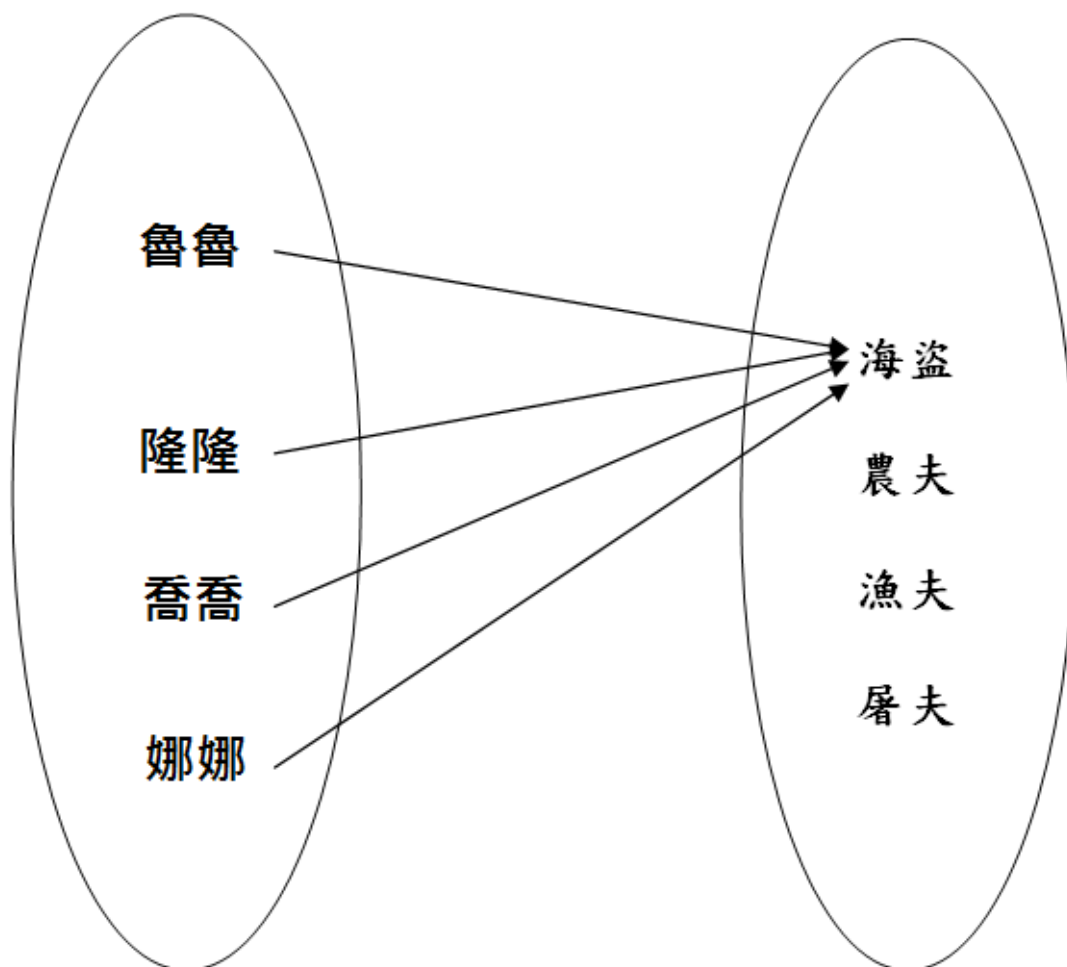
名字(x)	魯魯	隆隆	喬喬	娜娜
生日(y)	5月5日	11月11日	12月24日	7月3日

◇ 函數關係：

- 一對一：“海盜” 對應 ” 自己的生日”



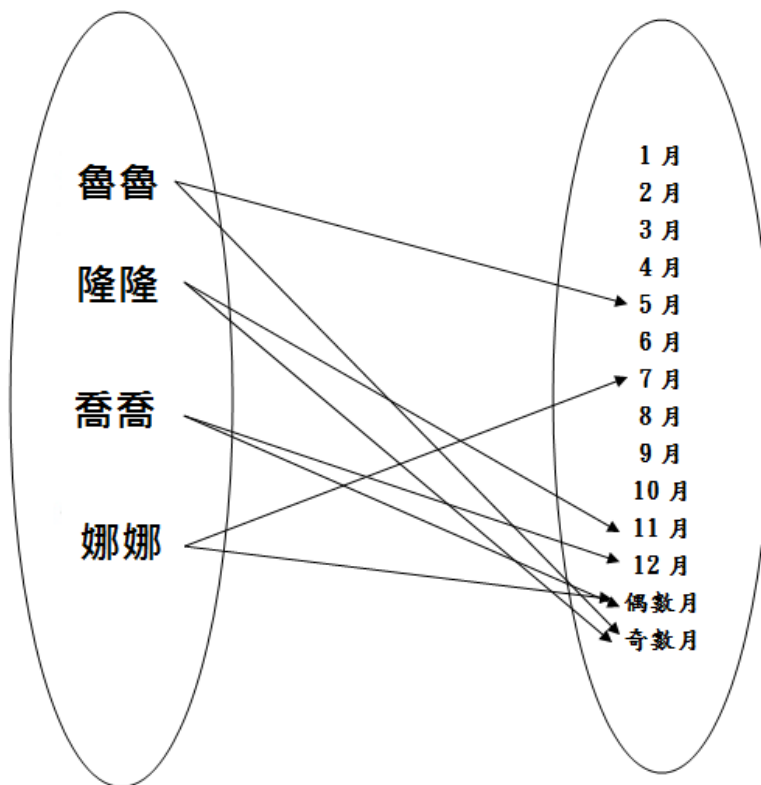
- 多對一：“海盜” 對應 ” 職業”



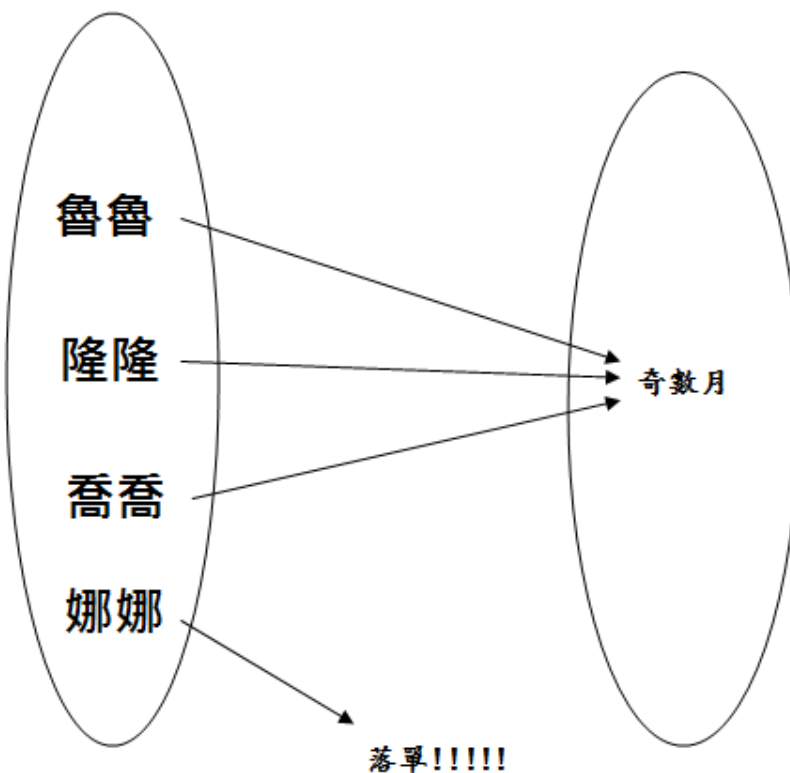
◎ 由上可以發現，海盜和他們生日的對應關係是一對一(每一個海盜都只有一個對應的生日)；和他們職業的對應關係是多對一(每一個海盜都對應同一個職業)，這兩種對應關係都稱為函數。

◇ 不是函數：

- 一對多：“海盜” 對應 “自己生日的月份”



- 一對無：“海盜” 對應 “自己生日的月份”

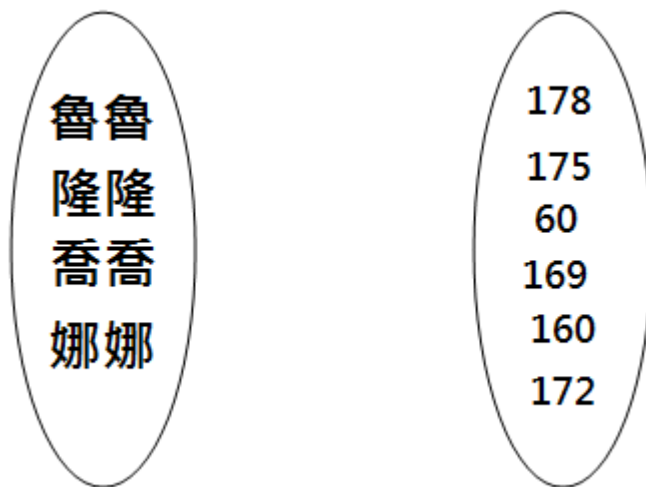


- ⊙ 函數就是：在 x, y 兩個變量的關係式中，對於每個 x 值，恰好有一個 y 值與它對應，我們就說 y 是 x 的函數。此時 x 稱為自變數， y 稱為應變數。
- ⊙ 例如，隆隆的生日是 11 月 11 日；魯魯的生日是 5 月 5 日，所以海盜和他們生日的關係是函數，且海盜的名字是自變數，生日是應變數。

名字(x)	魯魯	隆隆	喬喬	娜娜
身高(y)公分	172	178	60	169

◇ 想一想：

(1) 請你把海盜和他們身高的對應關係畫出來。



(2) 海盜們和他們身高的對應關係是不是函數呢？

😊 魯魯現在要帶領他的同伴，繼續航向偉大的航道。 😊

◇ 挑戰 1！

- 下列 x 、 y 的關係式中，何者為 y 是 x 的函數？

(A) $y = 5x + 1$

(B) $y^2 = x$

(C) $|y| = x$

(D) $y = x^2$

◇ 挑戰 2！

- 判斷下列各小題的 y 是否為 x 的函數？

(A) 平年時， x 月份的天數是 y 天。(B) 一個面積為 50 的三角形，其底長為 x ，高為 y 。(C) 一個數 y 與本身的 3 倍相乘，所得的積為 x 。

◇ 挑戰 3！

- 判斷下列各小題的 y 是否為 x 的函數？

(A) 閏年時， y 月份的天數是 x 天。(B) 一個周長為 y 的正三角形，其邊長為 x 。(C) 一個長方形的周長為 60，其長為 x ，寬為 y 。

現在我們已經回想起「函數」了，接下來我們來回憶一下什麼是「一次函數」。

二、一次函數($y = ax + b(a \neq 0)$)：自變數 x 的最高次數為一次

☺ 首先，海盜們來到一次函數島，島上的東西都可以用一次函數表示。市場裡小販們在叫賣果實，每個小販兜售的果實價錢可以用一個一次函數表示… ☺

◇ 自變數 x 為果實個數，應變數 y 為價格。

- 小販貝爾： $y = 3x$
- 小販皮亞傑： $y = x + 2$
- 小販維高斯基： $y = 5x + 8$
- 小販斯金納： $y = x - 6$
- 小販艾瑞克遜： $y = 4x - 3$



⊗ 如果式子能夠整理成 $y = ax + b(a \neq 0)$ 的形式，就是一次函數。

◇ 想一想：

現在換你來判斷下面的式子，哪些是 x 的一次函數呢？

- $y = -4x - 3$
- $y = x^2 + 6x + 3$
- $x - 2$
- $y = -3x$
- $y = -\frac{3}{2}x + 1$
- $y = -5x + 8$
- $y = x^2 - 1$
- $y = \frac{1}{7}x + 8$
- $y = -6$
- $-5x + 8$

主題二 二次函數

一、二次函數($y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$))：自變數 x 的最高次數為二次

☺ 海盜們現在來到二次函數島，這是個特殊的島，島上的所有村莊面積都是二次函數，而且島的面積會根據島上的人數改變大小……
 首先，來到 A、B 村莊，A 村莊是正方形，B 村莊是圓形。 ☺

◇ 對於 A 村莊，村裡有幾個人，邊長就多長。我們發現人數 x 和面積 y 有下列的關係：

A 村莊人數(x)	A 村莊面積(y)
1 人	1^2 平方單位
2 人	2^2 平方單位
3 人	3^2 平方單位
4 人	4^2 平方單位
5 人	5^2 平方單位
6 人	6^2 平方單位
7 人	7^2 平方單位

表一

- 由表一發現，
 我們可以將 A 村莊的人數 x 與面積 y 寫成「 $y = x^2$ 」的關係。

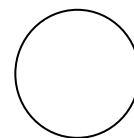


◇ 對於 B 村莊，村裡有幾個人，半徑就多長。我們發現人數 x 和面積 y 有下列的關係：

B 村莊人數(x)	A 村莊面積(y)
1 人	$1^2 \pi$ 平方單位
2 人	$2^2 \pi$ 平方單位
3 人	$3^2 \pi$ 平方單位
4 人	$4^2 \pi$ 平方單位
5 人	$5^2 \pi$ 平方單位
6 人	$6^2 \pi$ 平方單位
7 人	$7^2 \pi$ 平方單位

表二

- 由表二發現，
我們可以將 B 村莊的人數 x 與面積 y 寫成
「 $y = x^2 \pi$ 」的關係。



◇ 其他村莊的面積也都可以用二次函數表示……

- C 村莊的面積 $y = 2x^2$
- D 村莊的面積 $y = x^2 - 1$
- E 村莊的面積 $y = 5x^2 + 3x + 1$
- F 村莊的面積 $y = 5x^2 + 3$
- G 村莊的面積 $y = x^2 + 6x + 3$

◎ 如果式子能夠整理成 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的形式那麼就是二次函數。

◇ 想一想：

現在換你來判斷下面的式子，哪些是 x 的二次函數呢？

$y = -2x^2 - 6x + 3$

$y = 4x - 3$

$y = 3$

$y = -\frac{3}{2}x + 1$

$-5x + 1$

$y = -x^2 + 9$

$y = x^2 + \frac{1}{4}x - 7$

$y = \frac{1}{3}x^2 - 2x - 1$

$-x^2 + 2x - 3$

$y = -x^2 + 6x + 3$

$y = x^2$

$y = 3x$

😊兩位島主不小心把島上的資料遺失在垃圾場，請你/妳為兩位島主
找出各自的資料。😊

挑戰 1 !

- (1) 以下哪些式子會出現在一次函數島？哪些會出現在二次函數島？
 (A) $y = 3x + 2$ (B) $y = 5$ (C) $y = 4x^2 + 1$ (D) $y = -2x^2 + 3x - 8$
 (E) $y = 0$ (F) $y = x$ (G) $y = 3 - x^2$ (H) $y = x^2$

- (2) 以下哪些式子會出現在一次函數島？哪些會出現在二次函數島？
 (A) $y = \frac{1}{3}x + 2$ (B) $y = 2x$ (C) $y = -x^2 + \frac{3}{4}$
 (D) $y = -\frac{7}{10}x^2 + \frac{5}{2}x - 8$
 (E) $y = 1$ (F) $y = -\frac{9}{5}x$ (G) $y = 3 - \frac{1}{2}x^2$ (H) $y = \frac{1}{3}x^2$

◇ 想一想：

(1) $y = (x - 1)^2$ 是否為二次函數

(2) $y = 3(x + 2)^2$ 是否為二次函數？

◎ 如果把形如 $y = a(x - h)^2 + k$ 的式子乘開，會發現可以寫成 $y = ax^2 + bx + c$ 的形式，因此 $y = a(x - h)^2 + k$ 也是二次函數。

挑戰 2！

- (1) 以下哪些式子會出現在一次函數島？哪些會出現在二次函數島？
(A) $y = 3x + 2$ (B) $y = 5$ (C) $y = 4x^2 + 1$ (D) $y = (x - 2)^2 + 3$
(E) $y = 0$ (F) $y = x$ (G) $y = 3 - x^2$ (H) $y = 2(x + 1)^2$

- (2) 以下哪些式子會出現在一次函數島？哪些會出現在二次函數島？
(A) $y = 3x$ (B) $y = 5 + 2x + 3x^2$ (C) $y = 3 - x^2$
(D) $y = -3x^2$ (E) $y = 8x^2$ (F) $y = \frac{1}{8}x$ (G) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$
(H) $y = 7$

二、具體情境

☺島主對魯魯一行人說：「想得到寶藏的話，必須解開下面的這些題目。」☺

- 島主示範。

算出 A 村莊的面積，邊長為 x 的正方形，面積是 y ，則 x 與 y 的關係式為 $y = x^2$ 。

(1)完成下表。

x(公分)	1	3	5	7
y(平方公分)				

(2) x 與 y 的關係式是否為二次函數？

◇ 想一想：

請你/妳幫魯魯算出 B 村莊的面積。

- 半徑為 x 的圓，面積是 y ，則 x 與 y 的關係式為 $y = x^2 \pi$ 。

(1)完成下表。

x(公分)	1	3	5	7
y(平方公分)				

(2) x 與 y 的關係式是否為二次函數？

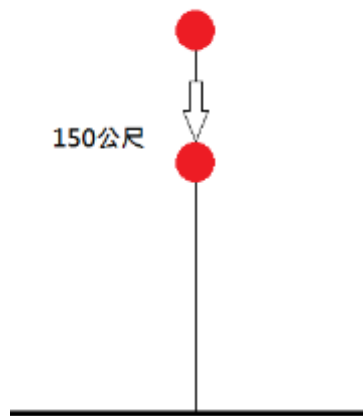
◇ 挑戰 1！

- 一顆球從 150 公尺高的地方落下，經過 x 秒後，球離地面的高度是 y 公尺，且 x 與 y 滿足關係式 $y = 150 - 4.9x^2$ ，則：

(1)完成下表。

x(秒)	0	1	2	3
y(公尺)	150	145.1		

(2)x 與 y 的關係式是否為二次函數？



◇ 挑戰 2！

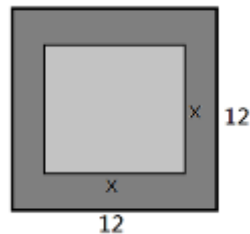
- 如圖，邊長 12 公分的正方形鐵片，中間減去一個邊長為 x 公分的小正方形鐵片，剩下的四方框鐵片的面積是 y 平方公分，則：

(1)完成下表。

x(公分)	0	2	4	6
y(平方單位)	144	140		

(2)x 與 y 的關係式為何？

(3)x 與 y 的關係式是否為二次函數？



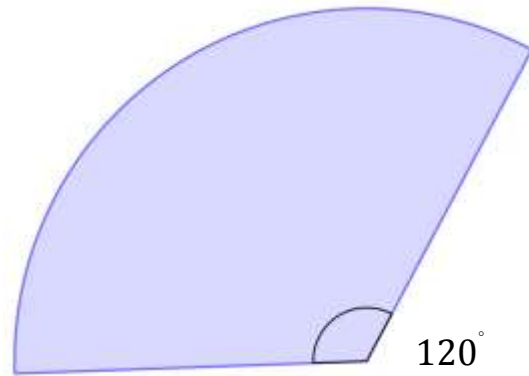
◇ 挑戰3！

- 已知一圓心角為 120° 的扇形，其半徑為 x 公分，扇形面積為 y 平方公分。

x 與 y 的對應關係如下表。

半徑(x)	1	2	3	4	5
面積(y)	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$			

- (1) 請完成上表。
- (2) 請寫出 x 與 y 的關係式。
- (3) y 是否為 x 的二次函數？



三、二次函數的形式為 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 或

$$f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$$

☉ 在七年級的時候我們曾經說到，在兩個變數 x 與 y 的關係式中，如果給定一個自變數 x 的值，就恰有一個應變數 y 的值，便稱 y 是 x 的函數，記作 $y=f(x)$ ；其中 $f(x)$ 讀作「 f of x 」。

☺ 魯魯一行人在挑戰的過程中，娜娜說：「我們可以給每個二次函數一個名字，用 $f(x)$ 表示，例如 $y = 2x^2 + 3x - 1$ 可以寫成 $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ 。如此一來，方便我們表示。」☺

◇ 現在換你/妳用娜娜的方式來表示下面的式子

- C 村莊的面積 $y = 2x^2$

→

- D 村莊的面積 $y = x^2 - 1$

→

- E 村莊的面積 $y = 5x^2 + 3x + 1$

→

- F 村莊的面積 $y = 5x^2 + 3$

→

四、求函數值

- ◎ 函數 $y = f(x)$ 中，當 $x = a$ 時，對應的 $y = f(a)$ 稱為函數在 $x = a$ 的函數值。
- ◎ 例如，設函數 $f(x) = 5x - 6$ ，當 $x = -3$ 時，
 $f(-3) = 5 \times (-3) - 6 = -21$ 稱為函數在 $x = -3$ 的函數值。

😊 終於進入最後的關卡了！
 村長的請託 😊

- C 村長希望知道上個月和這個月村莊的面積。
 上個月島上有 9 個人，這個月島上因為魯魯一行人的到來，變成 13 個人，已知 C 村莊的面積為 $y = 2x^2$ ，請你/妳算出，這兩個月村莊的面積分別為何。

(1) $y = 2x^2$

上個月 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ◦ 面積 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ ◦

這個月 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ◦ 面積 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ ◦

(2) 另一種表示法： $f(x) = 2x^2$

上個月 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ◦ 面積 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ◦

這個月 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ◦ 面積 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ◦



◇ 想一想：

現在請你/妳幫 D、E 兩個村莊算出這兩個月的面積吧！

- (1)D 村莊的面積 $y = x^2 - 1$

上個月 $x = 8$ 面積 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

這個月 $x = 6$ 面積 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- (2)E 村莊的面積 $f(x) = 5x^2 + 3x + 1$

上個月 $x = 9$ 面積 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

這個月 $x = 12$ 面積 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- F 村莊今年不定時遭受攻擊，村裡損失慘重，值錢的物品幾乎被搶奪一空， x 為剩餘寶藏箱數， y 為剩餘財產，以下為 F 村莊剩餘財產 y 與 x 的關係式。利用已知的 x 求出 F 村莊這兩個月的剩餘財產。

- (1) F 村莊的剩餘財產 $y = 5x^2 + 3$

上個月 $x = 2$ 剩餘財產 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

這個月 $x = 1$ 剩餘財產 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- (2) 另一種表示法： $f(x) = 5x^2 + 3$

上個月 $x = 2$ 剩餘財產 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

這個月 $x = 1$ 剩餘財產 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

◇ G 村莊同樣受到攻擊， x 為剩餘寶藏箱數，現在請你/妳利用已知的 x 求出 G 村莊這兩個月的剩餘財產。

- G 村莊的剩餘財產 $f(x) = x^2 + 6x + 3$

上個月 $x = 4$ 剩餘財產 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

這個月 $x = 2$ 剩餘財產 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

◇ 挑戰！

- (1) 已知二次函數 $f(x) = -x^2 + 3$ ，求 $f(-4)$ 的值。

- (2) 已知二次函數 $y = 2(x - 3)^2 + 1$ ，求此函數在 $x=2$ 時的函數值為何？

- (3) 已知二次函數 $f(x) = -(x - 1)^2$ ，求 $f(-1)$ 的值。

- (4) 已知二次函數 $y = x^2 - 3x + 2$ ，求此函數在 $x=2$ 時的函數值為何？

- (5) 已知二次函數 $f(x) = -2(x + 3)^2 + 2$ ，求 $f(3)$ 的值。

- (6) 求函數 $f(x) = -3x^2 - 4x$ 分別在 $x = 5$ ， $x = 0$ 及 $x = -2$ 時的函數值。

◇ 本章重點整理

⊙ 函數：在 x, y 兩個變量的關係式中，對於每個 x 值，恰好有一個 y 值與它對應，我們就說 y 是 x 的函數。此時 x 稱為自變數， y 稱為應變數。

⊙ 一次函數：形如 $y = ax + b (a \neq 0)$ 的函數稱為一次函數。

⊙ 二次函數：形如 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 或 $y = a(x - h)^2 + k$ 的函數稱為二次函數。

⊙ 函數 $y = f(x)$ 中，當 $x = a$ 時，對應的 $y = f(a)$ 稱為函數在 $x = a$ 的函數值。

◇ 挑戰！

- (1)下列哪些是 x 的二次函數？
(A) $y = -(x + 3)^2 - 1$ (B) $y = 2x^2 - x + 7$
(C) $x^2 - 4$ (D) $y = x^2 - 4$
(E) $y = -3x^2 - \frac{1}{x}$ (F) $2y = -x^2$
(G) $y = 5(x - 1)^2$ (H) $\frac{1}{2}y = (x + 1)^2 - 2$

- (2)下列哪些是 x 的二次函數？
(A) $(x + 1)^2$ (B) $y = -x^2 + 2x - 1$
(C) $y = 2x^2$ (D) $y = x + 2$
(E) $y = \frac{2}{3}(x + 1)^2$ (F) $y = \frac{1}{4+x^2}$
(G) $y = 3x^2 - 5x + 3$ (H) $y = x^2 + x + 1$

- (3)設二次函數 $f(x) = 5x^2 - 1$ ，則 $f(-3) = ?$

- (4)已知二次函數 $f(x) = x^2 - 3x - 1$ ，求 $f(3)$ 的值。

- (5)已知二次函數 $y = x^2 + 2$ ，求此函數在 $x = 1$ 時的函數值為何？

◇ 進階挑戰 1！

- (1) 已知 $f(x) = x^2 + ax + 1$ 且 $f(2) = -1$ ，則 $a = ?$

- (2) 已知 $f(x) = -2x^2 + ax + 3$ 且 $f(-1) = 0$ ，則 $a = ?$

- (3) 已知 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x + a$ 且 $f(2) = \frac{7}{3}$ ，則 $a = ?$

- (4) 已知 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$ 且 $f(b) = 5$ ，則 $b = ?$

- (5) 已知 $f(x) = -x^2 - 2$ 且 $f(b) = -11$ ，則 $b = ?$

- (6) 已知 $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ 且 $f(b) = 4$ ，則 $b = ?$

◇ 進階挑戰 2！

- (1) 設 $f(x) = 4x^2 + 6x + k$ ，且 $f(1) = 3$ ，求 k 的值及 $f(-2)$ 的值。

- (2) 設 $f(x) = ax^2 + bx + 3$ ，且 $f(1) = 4$ ， $f(-1) = 6$ ，求 a ， b 的值。

- (3) 設 $f(x) = ax^2 + bx - 1$ ，且 $f(1) = -2$ ， $f(-1) = -6$ ，求 a ， b 的值及 $2a + b$ 的值。

- (4) 已知 $f(x + 1) = 2x^2 - 3x + 4$ ，求 $f(1) = ?$

- (5) 已知一圓心角為 240° 的扇形，其半徑為 x 公分，扇形面積為 y 平方公分，則：
 - (a) x 與 y 的關係式為何？
 - (b) 半徑 5 公分時，扇形面積為多少？

◇ 進階挑戰 3！

- (1) 設 $f(x) = -2x^2 + 7x + k$ ，且 $f(2) = 7$ ，求 k 的值。

- (2) 設 $f(x) = 5x^2 + kx - 2$ ，且 $f(-1) = 6$ ，求 k 的值。

- (3) 設 $f(x) = x^2 + ax - b$ ，且 $f(1) = 5$ ， $f(-1) = -1$ ，求 a ， b 的值。

- (4) 已知 $f(x) = ax^2 + bx + 2$ ，且 $f(1) = 3$ ， $f(-1) = -1$ ，求 $f(-5) = ?$

- (5) 已知一長方形的長比寬多三公分。設其長為 x 公分，面積為 y 平方公分，則：
 - (a) x 與 y 的關係式為何？
 - (b) 長為 7 公分時，長方形面積為多少？

◇ 綜合演練！

- (1) 設二次函數 $f(x) = 5x^2 - 1$ ，則 $f(-2)$ 和 $f(3)$ 分別是多少？

- (2) 已知二次函數 $y = -2x^2 + x - 1$ ，求此函數在 $x = -1$ 時的函數值為何？

- (3) 設二次函數 $f(x) = -(x + 3)^2 + 5$ ，則 $f(-4) = ?$

- (4) 求函數 $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$ 分別在 $x = 3$ ， $x = 0$ 及 $x = -2$ 時的函數值。

- (5) 已知 $f(x) = -ax^2 - 3x + 1$ 且 $f(2) = -9$ ，則 $a = ?$

- (6) 已知 $f(x) = -x^2 + 2x - 9$ 且 $f(a) = -9$ ，則 $a = ?$

◇ 綜合演練！

- (7) 設 $f(x) = -3x^2 + 7x + k$ ，且 $f(1) = 2$ ，求 k 的值及 $f(-2)$ 的值。

- (8) 設 $f(x) = 5x^2 + kx + 5$ ，且 $f(1) = 9$ ，求 k 的值。

- (9) 已知一三角形的底為 x ，高比底多 5 公分。設其底為 x 公分，面積為 y 平方公分，則：
 - (a) x 與 y 的關係式為何？
 - (b) 底為 4 公分時，三角形面積為多少？

- (10) 設 $f(x) = ax^2 + bx + 2$ ，且 $f(1) = 4$ ， $f(-1) = 2$ ，求 a ， b 的值及 $-a + b$ 的值。

- (11) 設二次函數 $f(x) = a(x + 3)^2 + b$ ，且 $f(1) = -31$ ， $f(-1) = -7$ ，求 a ， b 的值。

- (12) 已知 $f(x) = 2x^2 - x - 3$ 且 $f(a) = 0$ ，則 $a = ?$

😊 恭喜你/妳囉!!終於完成島主嚴酷的任務，可以打開寶藏了!!! 😊

- ◇ 魯魯一行人懷著一顆緊張的心，打開了寶箱，裡面有一張捲軸，上面記錄著餃子的由來：

餃子的由來

有一天，”皮”在路上走著閒晃，忽然被一群蒙面人毆打，於是，”皮”哭著跑去找他的好朋友”肉丸”，”肉丸”聽完”皮”的遭遇後，很有義氣的說：「他們太過分了!你放心!包在我身上!!」……



資料來源：

iStockphoto(2012年). Cartoon Tropical Island. 2012年10月10日取自
<http://goo.gl/TjSjQ>

素材藝庫(2012年).精美商務金融插畫矢量素材 371-金融.2012年10月10日取自
<http://goo.gl/bSFCZ>

Shutterstock(2003年).Cartoon vector fairy tale.2012年10月26日取自.
<http://goo.gl/9nu21>

無名小站(2009年8月1日).海賊王生日大全(更新). 2012年11月18日取自.
<http://goo.gl/q0dT0>

參考資料：

翰林出版 1 下(101 年 2 月初版)課本

康軒文教 3 下(101 年 2 月)教師手冊(備課篇)

補救教學基本學習內容【國民中學數學學習領域】(試行版)