例題 3

當 $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha-\beta)$ 都有意義時，證明:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

證

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$ (分子、分母同除以 $\cos\alpha\cos\beta$，其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 皆不為 0)

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

上式中以 $-\beta$ 代 β，得

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan[\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

隨堂練習

已知 $\tan\alpha=2$, $\tan\beta=-3$.

(1) 試求 $\tan(\alpha+\beta)$ 與 $\tan(\alpha-\beta)$ 之值.

(2) 若 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ 且 $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，試求 $\alpha-\beta$.

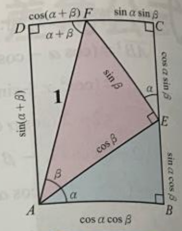
在第二冊時學過: 若直線 $y=mx+k$ 的斜角為 θ，則直線的斜率 $m=\tan\theta$. 當時對於兩直線的夾角，是經由計算機分別求兩直線的斜角的近似值來處理. 現在利用**例題** 3 中正切的差角公式，就可以求得兩直線夾角的正切值.

老師的話

直線與 x 軸正向的夾角為 $\theta\ (-90^\circ<\theta<90^\circ)$，稱為此直線的斜角.

$$\sin(\alpha-\beta)=\cos[90^\circ-(\alpha-\beta)]$$
$$=\cos[(90^\circ-\alpha)+\beta]$$
$$=\cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta-\sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin[\alpha-(-\beta)]$$
$$=\sin\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$



老師的話

$\overline{AD}=\overline{BE}+\overline{CE}$,
$\overline{DF}=\overline{AB}-\overline{CF}$.

現在我們將正弦與餘弦的差角、和角公式整理如下:

和角與差角公式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

例題 1

1. 試求 $\cos 75^\circ$ 之值.
2. 試求 $\cos 115^\circ\cos 145^\circ+\sin 115^\circ\sin 145^\circ$ 之值.

解

1. $\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$
2. $\cos 115^\circ\cos 145^\circ+\sin 115^\circ\sin 145^\circ$
$$=\cos(115^\circ-145^\circ)=\cos(-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

隨堂練習

1. 求 $\sin 75^\circ$ 之值.
2. 求 $\sin 97^\circ\cos 37^\circ-\cos 97^\circ\sin 37^\circ$ 之值.