數列與級數　　　　想法源頭：CA　　　　編著：陳梅仙、余秉橙

一、認識數列(將數排成一列，並以逗點分開，稱為數列。)　班級：　　座號：　　姓名：

1. 請寫出下面**數列**的下一個數字

(1) 0、4、3、4、7、8、2、6、0、8、____，□我不確定。(2) 1、2、2、3、3、3、4、4、4、4、____，□我不確定。

(3) 4、6、8、10、12、14、16、18、____，□我不確定。(________數列)

(4) 1、1、2、3、5、8、13、21、34、____，□我不確定。(________數列)

(5) 1、2、4、8、16、32、64、128、____，□我不確定。(________數列)

(6)上面那些是有規律的數列？　(7)有規律的數列的特質 □可以預測 □無法預測

(8)沒有規律的數列的特質 □可以預測 □無法預測　(9)抽籤或摸彩可以公平的特質 □可以預測 □無法預測

※1. 其中，4、6、8、10、12、14、16、18 這個數列，**任意**兩個相鄰的數字，前面數字**加上** 2 就是後面的數字，這個數字 2 稱為「**公差**」，這樣的數列被命名為「**等差數列**」。等差數列中**任意**相鄰兩項，**前項+公差＝後項**。

※2. 其中，1、2、4、8、16、32、64、128 這個數列，**任意**兩個相鄰的數字，前面數字**乘上** 2 就是後面的數字，這個數字 2 稱為「**公比**」，這樣的數列被命名為「**等比數列**」。等比數列中**任意**相鄰兩項，**前項×公比＝後項**。

※3. 將數列**編號**，第 1 個數字稱為首項，用 a_1 表示。第 2 個數字稱為第 2 項，用 a_2 表示。依此類推，第 n 個數字稱為第 n 項，用 a_n 表示。最後一個數字稱為**末項**，依然用 a_n 表示。數列中的每一個數稱為項，數的個數稱為項數。

2. 數列 3, 6, 8, 7, 9, 15, 8 中，項數為何？7

(1)第 1 項 a_1＝__3__，第 4 項 a_4＝__7__，(2) a_n＝9，則 n＝__5__，(3) a_3 跟第幾項的值相同？ a_7

3. 依其規律在空格中填入適當的數

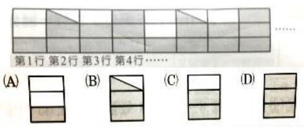
(1) 1, 8, 27, 64, 125, 216

(2) 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42

(3) $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{5}{25}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{7}{49}$

(4) -1, 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27

4. 依圖形的規律，第 108 行的圖形應為下列哪一個選項？ D



5. 具有規律的數列，如果能寫出第 n 項的表示式，就可以找到該數列的任意一項。**第 n 項**稱為此數列的**一般項**。

a_1	a_2	a_3	……	a_n
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{n}$

a_1	a_2	a_3	……	a_n
2	4	6		$2n$

二、等差數列(任意相鄰兩項，「後項減去前項所得的差」都相同，這個差稱為公差，通常用 d 表示)

1. 判別各數列是否為等差數列。(是非題)

(1) (○) 0, 11, 22, 33　(2) (○) -9, -4, 1, 6

(3) (×) -125, 100, -75, 50　(4) (○) 2, 2, 2, 2

(5) (○) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$　(6) (×) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$

2. 在下列空格中填入適當的數，使得各數列成為等差數列。

(1) __6__, 4, 2, __0__, __-2__，公差＝__-2__

(2) $4-2\sqrt{3}$, $4-\sqrt{3}$, 4, $4+\sqrt{3}$, $4+2\sqrt{3}$，公差＝$\sqrt{3}$

(3) $4a-9d$, $3a-5d$, $2a-d$, $a+3d$, $7d$，公差為$-a+4d$。

3. 有一天小梅夢到自己在爬 101 大樓，更令人興奮的是走到每個樓層，都可以獲得金幣的獎賞。請將下面數列填寫完成。

樓層	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		n
金幣	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47		2+3n

(1)從樓層 1 的金幣 5 枚開始，每次都往後加 3 枚，想算出樓層 4 的金幣數字，要往後加__3__次

(2)從樓層 1 的金幣 5 枚開始，每次都往後加 3 枚，加 5 次之後，得到樓層__6__的金幣數字__20__

編號	1	4	1+5	n
數列	5			

※ a_n＝________　$a_n=a_1+(n-1)d$

4. (1)有一等差數列的首項為 405，公差為 -20，則：①第 13 項。②145 是此等差數列的第幾項？

(1)165 (2)14

編號	1	13	
數列	405		145

(2)已知一個等差數列的第 11 項為 20，公差為$\frac{3}{5}$，求此等差數列的首項？

14

編號	1	11
數列		20

(3)已知一個等差數列的首項為 0，第 16 項為 -30，求此等差數列的公差？

-2

編號	1	16
數列	0	-30

(4)若某數列的第 n 項 $a_n=(n+1)\times(n+2)\times(n+3)$，則此數列的第 7 項為何？

720

(5)已知某數列的第 n 項 $a_n=n^2-1$，則：①此數列的第 20 項為何？ ②若此數列的第 k 項為 440，則 k 的值為何？

① 399 ② k=±21(負不合)

(6)已知某等差數列的第 n 項 $a_n=7n-3$，求此數列的公差 a_{10}。公差為 7，$a_{10}=67$

5. (1)已知彰化地區計程車的計費錶起跳為 90 元，之後每跳一次錶加 5 元。若將起跳價 90 作為數列的首項，則每次跳錶所形成的數列為 90, 95, 100, 105，……，a_n，求：(1)第 31 項。(2)若陳老師車資為 360 元，則共跳錶多少次？(設 90 元即為第一次跳錶)

(1) $a_{31}=90+(31-1)\times5=240$ (2)設跳錶 n 次，$90+(n-1)\times5=36$，n＝55。

(2)宜蓁想買一雙 3700 元的籃球鞋，已知她原有存款 450 元，從 4 月 1 日起，她每日存下 65 元的零用錢，請問她在幾月幾日能存到剛好的錢可以購買球鞋？

4 月 1 日存款＝450＋65＝515，515＋65×(n－1) ＝3700，n＝50，50－30＝20，故所求為 5 月 20 日

(3)翊丞為健身，6 月 23 日坐仰臥起坐 15 次，之後每天都比前一天多做 2 次(6 月 24 日做 17 次)若某天他做了 41 次，則該天幾月幾日？(A)7 月 4 日 (B)7 月 5 日 (C)7 月 6 日 (D)7 月 7 日　C 設該天為第 n 天

41＝15＋(n－1)×2，n＝14 又 6 月 23 日～6 月 30 日共有 8 天，14－8＝6

(4)鈺婕在某一本書的第 1 頁開始，逐頁依順序在每一頁上寫一個數字，已知鈺婕在第 1 頁寫 1，且之後每一頁寫的數字均為她在前一頁寫的數字加 5。若這本書共有 178 頁，則鈺婕在最後一頁寫下的數字為何？

$a_1=1$，$d=5$，$a_{178}=1+(178-1)\times5=886$

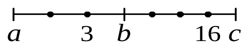
(5)育琪影城的座位排列，每一排都比前排多 4 個座位，最後一排有 115 個座位，共 25 排，則第一排有多少個座位。

$d=4$，$a_{25}=a_1+24\times4=115$，

$a_1=19$ 個座位。

(6)設 a、b、c 三數成等差數列，在 a、b 兩數之間插入 2 個數使成一等差數列，靠近 b 的數為 3；在 b、c 兩數之間插入 3 個數使成一等差數列，靠近 c 的數為 16，則 b=？$\frac{1}{3}d+\frac{3}{4}d=16-3$, $\frac{13}{12}d=13$，

$d=12$, $b=3+\frac{1}{3}\times12=7$



三、等差中項(當三個數成等差數列時，中間的那一項稱為另兩項的等差中項。可想成是平均數)

$3+7=2\times5$

1 , 3 , 5 , 7 , 9

$1+9=2\times5$

a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 （$-d$，$+d$；$-2d$，$+2d$）

1. 若 b 為 a 與 c 的等差中項，則 $b-a=c-b$ ，$2b=a+c$，即 $b=$ _$(a+c)\div2$_。
2. 觀察右邊數列，可發現 5 既是_3_和_7_的等差中項，也是_1_和_9_的等差中項。
3. 即 a_3 是 a_2 和 a_4 的等差中項，也是 a_1 和 a_5 的等差中項。例如：$a_{21}+a_9=-58$，則 $a_{15}=$？-29

4. (1)已知 $1, x, 9$ 成等差數列，求 $x=$？
(2)若 $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{7}$成等差數列，求 $x=$？
(1) $x=\frac{1+9}{2}=5$ (2) $\frac{84}{13}$

5. 已知三數成等差數列，且其等差中項為 7，求此三數的和。
$a+c=2\times7=14$，$a+b+c=21$。

6. 已知△ABC 三個內角∠A、∠B、∠C 的度數正好形成等差數列，則下列何者正確？
(A)∠A=45° (B)∠B=60° (C)∠C=90°
(D)∠A<∠B<∠C 三者大小關係無法確定，僅知等差中項 60° B

7. 已知 a 與 b 的等差中項為-4，且 $5a+b=0$，求 axb 的值。a=2，b=-10
axb=-20

8. 已知 a_1、a_2、a_3、…為一等差數列，且 $a_1+a_9=18$，則 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=$？
45

9. 家語、爸爸和爺爺三人的年齡正好形成等差數列，已知爸爸現年 35 歲，且爺爺的年齡正好是家語的 13 倍，求家語現年幾歲？
設家語現年 x 歲，爺爺現年 13x 歲
x+13x=35x2，x=5。

10. (1)等差數列 99, 93, 87, ……，自第幾項開始為負數？(2)已知-101, -95, -89, ‥為一等差數列，則：①此數列從第幾項開始為正數。(1)設 $a_n<0$，$a_n=99+(n-1)\times(-6)<0$，$n>17.5$，第 18 項(2)①$a_n>0$，$a_n=(-101)+(n-1)\times6>0$，$n>17$. …, 故所求為第 18 項
②若于瑄從此數列中選出某連續三項形成一新的等差數列，且此三數的和為-33，則此三數中的首項是原本等差數列中的第幾項。
②三數的和為-33, 知其等差中項為-11，此三項中的首項為-17，$(-101)+(m-1)\times6=-17$，m=15。

四、等比數列(任意相鄰兩項，「後項除以前項所得的比值」都相同，這個比值稱為公比，通常用 r 表示)

1. 坤翰發明了一種讓國王百玩不厭的棋子遊戲，於是國王決定重賞他。坤翰：陛下，我只要一點麥子，請讓人將麥子放在棋盤格子內，第一格放 1 粒，…，每天在棋盤中放前一天的兩倍的米就好。直到六十四個棋格都放滿就行了！($2^{63}=9.223\cdots\times10^{18}$)
2. 給我一張只有 0.1 毫米厚的紙，只要能連續不斷地對摺，其厚度就可以比 101 大樓還高！(0.1×2^{23} 毫米=838.8608 公尺)
3. 判別下列各數列是否為等比數列。 (1)(○) 9，9，9，9 (2)(×) 0，0，0，0 (3)(×) 3，9，-27，-81
(4)(○) -1，1，-1，1 (5)(○) $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$ (6)(×) $\frac{1}{10}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{7}$ (7)(○) $\sqrt{5}$, -5，$5\sqrt{5}$, -25
4. 完成下列各等比數列，並寫出公比。(1) 54, 18, _6_, _2_, $\frac{2}{3}$；公比為$\frac{1}{3}$。(2) _-128_，_64_，-32，16；公比為$-\frac{1}{2}$。
(3)_2_, -4, 8, _16_, ；公比為_-2_。(4) _3_, _$3\sqrt{3}$_, 9, $9\sqrt{3}$, _27_；公比為_$\sqrt{3}$_。(5) _$-\sqrt{14}$_, $2\sqrt{7}$, $-2\sqrt{14}$, _$4\sqrt{7}$_；公比為_$-\sqrt{2}$_。
5. 有一天鈞翔夢到自己在爬 101 大樓，更令人興奮的是走到每個樓層，都可以獲得金幣的獎賞。請將下面數列填寫完成。

樓層	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…	n
金幣	5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960	81920	…	$5\times2^{n-1}$

(1)從樓層 1 的金幣 5 枚開始，每次都往後乘 2 倍，想算出樓層 4 的金幣數字，要往後乘_3_次

(2)從樓層 1 的金幣 5 枚開始，每次都往後乘 2 倍，乘 5 次之後，得到樓層_6_的數字_160_

編號	1	4	1+5
數列	5		

※ $a_n=$______ $a_n=a_1\times r^{n-1}$

6. (1)有一個等比數列為$-2\sqrt{2}$, 4, $-4\sqrt{2}$，…，求:①此數列的第 8 項是多少？②第幾項是 128？①$a_8=32$ ②$(-\sqrt{2})^{n-1}=-32\sqrt{2}$，$n-1=11$；$n=12$

編號	1	8	
數列	$-2\sqrt{2}$		128

(2)若一個等比數列的首項為 640，公比為$\frac{1}{2}$，則 5 是此數列的第幾項？8

編號	1	
數列	640	5

(3)已知一個等比數列的各項皆為正數，若首項為 48，第 7 項為$\frac{3}{4}$，則此數列的公比？
$r^6=\frac{1}{64}=(\pm\frac{1}{2})^6$，$r=\pm\frac{1}{2}$ (負不合)

編號	1	7
數列	48	3/4

7. (1)已知 1 個 T 細菌每經過一分鐘會分裂成 2 個，若某實驗室中的培養皿上原有 2 個 T 細菌，依此方式分裂，且過程中皆無細菌死亡，則 5 分鐘後共分裂成多少個細菌？
所求$=2\times2^5=64$(個)

(2)于瑄將一個皮球自離地面 81 公尺高處落下，首次反彈後高度為 54 公尺，此後每次反彈高度為其前次反彈高度的$\frac{2}{3}$，求第 5 次反彈後的高度是多少公尺？
$a_5=81\times(\frac{2}{3})^5=54\times\frac{16}{81}=\frac{32}{3}$

(3)某頭痛藥物的半衰期為 1 個小時，可以快速代謝。只要經過 x 小時後，血液中的藥物濃度就能低於最高血中濃度的 1%，這樣就可以再服用第二顆。請問至少隔多少小時才能吃下一顆？ 至少間隔 7 小時
$(\frac{1}{2})^x<\frac{1}{100}$，$(\frac{1}{2})^6=\frac{1}{64}$，$(\frac{1}{2})^7=\frac{1}{128}<\frac{1}{100}$

五、等比中項(三數成等比數列時，中間項稱為另兩項的等比中項。前後兩項乘積的平方根。)

$6\times24=12\times12$

3 , 6 , 12 , 24 , 48

$3\times48=12\times12$

a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 （$\div r$，$\times r$；$\div r^2$，$\times r^2$）

1. a，b，c 三數成等比數列，此時公比相同，即$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$，$b^2=ac$，$b=\pm\sqrt{ac}$。
2. 觀察右邊數列，可發現 12 既是_6_和_24_的等比中項，也是_3_和_48_的等比中項。
3. 即 a_3 是 a_2 和 a_4 的等比中項，也是 a_1 和 a_5 的等比中項。例如：$a_1\times a_9=576$，則 $a_5=$？±24

4. (1)3 與 27 的等比中項？
$k^2=81$，$k=\pm9$

(2)若 3 與 x 的等比中項為 6，則 x 之值為何？3, 6, x 成等比數列，$\frac{6}{3}=\frac{x}{6}$，x=12

(3)已知$\frac{1}{27}$，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{3}$三數成等比，求 x。
27, x, 3 成等比數列，$\frac{x}{27}=\frac{3}{x}$，$x=\pm9$

5. 已知 $5+x$，$10+x$，$16+x$ 三數成等比數列，則 x 的值為何？公比為何？
$(10+x)^2=(5+x)(16+x)$，$x=20$
(等比數列為 25，30，36，公比為$\frac{6}{5}$)

6. (1)已知 4, a, 16 三數成等差數列，4, b, 16 三數成等比數列，則 $a+b^2=$？
74

(2)已知 a 和 c 的等差中項為 10，而-8 為 a 與 c 的等比中項。若 a>c，則 $a-c=$？ $a+c=20$，$ac=64$。
又 a>c，a=16，c=4。$a-c=12$。

綜合演練

1.(1)在 10 和 38 之間插入 6 個數，使其成等差數列，則公差 d。
4

編號	1	8
數列	10	38

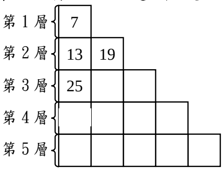
(2)在 3 和 96 之間插入 4 個數，使其成等比數列，則公比 r。
2

編號	1	6
數列	3	96

3.(1)已知 a, 4 , b , 9 , c 是一個等比數列，則 a×b×c 的值為何？(1) b^2＝ac＝36, b＝±6，a×b×c＝36×(±6)＝±216

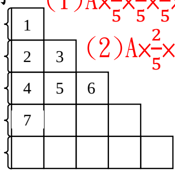
(2)設等比數列的第 3 項與第 37 項的乘積為 121，且第 4 項為 a，則第 5 項與第 35 項的乘積為何？(A) 11 (B) 121 (C) 11a (D) 121a B $a_{20}^2=a_3\times a_{37}=a_5\times a_{35}$

2.(1)彥廷將等差數列 7, 13, 19, 25, …，從第 1 項開始，按順序由左而右，由上而下依序填入右圖的階梯方格中，求：①第 4 層最右邊的數為何？②第 5 層由左邊算起第 3 個數為何？



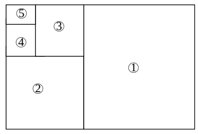
$a_1=7$，d＝6，
1＋2＋3＋4＝10
$a_{10}=61$，$a_{13}=79$

(2)佳絃將所有磁磚編 1～210 號(如圖)，依照以下原則改貼壁紙。一.若編號在 $a_1=3$，且 d＝2 的等差數列中，則貼上亮銀壁紙二.若編號在 $a_1=3$，且 r＝2 的等比數列中，則貼上黃金壁紙三.若編號同時滿足原則一和二，則貼上黃金壁紙①牆上共貼上多少張亮銀壁紙？②牆上最後有多少片磁磚是不用貼上壁紙的？



①$3+(n-1)\times 2\leqq 210$，n＝104，103 張
②$3\times 2^{n-1}\leqq 210$，$2^{n-1}\leqq 70$，n＝7
210－103－7＝100 片

3.有一張長 125 公分、寬 75 公分的矩形紙片，如右圖，依序剪掉圖中①、②、③、④的區域，且每一次剪掉的區域面積都是前一次所剩區域面積的 3/5，則：(1)區域④面積：區域②面積的比值。(2)區域⑤的面積。長方形面積 125×75＝A,
(1)$A\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}:A\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{4}{25}$
(2)$A\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=240$



六、等差級數的和

1.將數列的各項用「＋」連接而成的式子，稱為**級數**。
2.當 a_1, a_2, a_3, …, a_n 為等差數列時，將此數列的各項用「＋」連接，所得的式子 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ 就稱為**等差級數**。
3.而 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ 的值稱為此**等差級數的和，以符號 S_n 表示，即 $S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$**。
4.若一等差級數的和 $S_n=n(n+4)$，則此級數中的 a_{10}＝？d＝？$a_{10}=S_{10}-S_9=140-117=23$，$a_1=S_1=5$，$S_2=12$，$a_2=7$，d＝2
5.例如：1, 3, 5, 7, 9 是等差數列，1＋3＋5＋7＋9 稱為等差級數，而其和為 25，就稱 25 為**等差級數的和**。

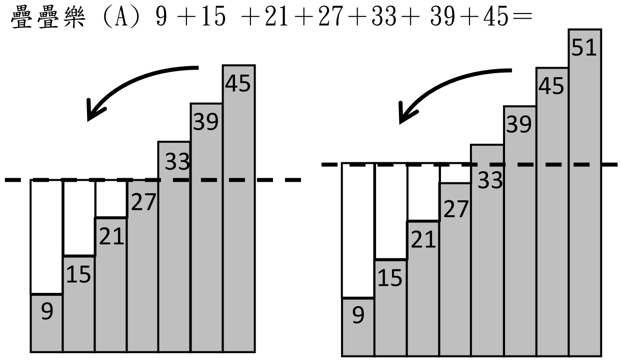
(1)有關等差級數「1＋3＋5＋……＋19」的敘述，下列何者錯誤？(A) 項數為 11 (B)首項為 1 (C) 公差為 2 (D) 末項為 19
A

(2)下列各式中，哪一個是等差級數？(A) 2＋4＋8＋16 (B) (－1)＋0＋(－1)＋0 (C) (－1)＋4＋9＋14 (D) $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}$ C

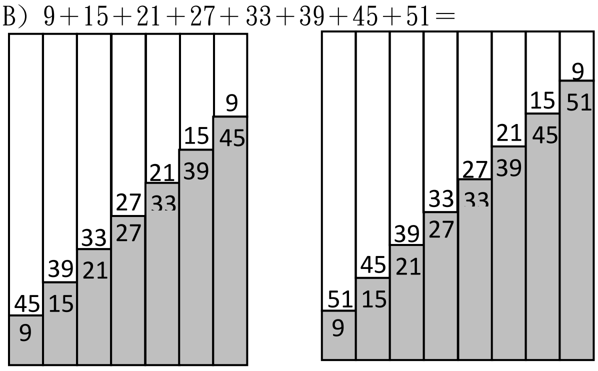
(3)等差級數－2＋(－1)＋0＋1＋2＋……＋n 共有多少項？(A) n (B) n＋1 (C) n＋2 (D) n＋3
D

(4)已知一等差級數共有 20 項，其總和為 S，若各項都加 1，則新的級數和是多少？(A) S (B) S＋1 (C) S＋10 (D) S＋20 D

6.疊疊樂 (A) 9＋15＋21＋27＋33＋39＋45＝



(B) 9＋15＋21＋27＋33＋39＋45＋51＝



方法 1：截長補短(等差中項-平均數的概念)：
(A) 9＋15＋21＋27＋33＋39＋45＝$\frac{(9+45)}{2}\times 7$
(B) 9＋15＋21＋27＋33＋39＋45＋51＝$\frac{(9+51)}{2}\times 8$
每一條的長度＝(最長＋最短)÷2＝(第二長＋第二短)÷2
總長度＝每一條的長度×總條數

方法 2：複製補上(高斯小學使用的方法)：
(A) 9＋15＋21＋27＋33＋39＋45＝$\frac{(9+45)\times 7}{2}$
(B) 9＋15＋21＋27＋33＋39＋45＋51＝$\frac{(9+51)\times 8}{2}$
每一條的長度＝最長＋最短＝第二長＋第二短
總長度＝(每一條的長度×總條數)÷2

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{項數\times(首項+末項)}{2}=$ 等差中項 × 項數＝對稱於中間兩項的平均數 × 項數

7.(1)①1＋3＋5＋…＋99 的和＝？②(－7)＋(－3)＋1＋…＋29 的和＝？
(1)2500 (2)110

(2)①13＋7＋1＋…＋(－35)＝？②0.2＋0.5＋0.8＋…＋3.2＝？
①－99 ②18.7

(3)已知一個等差級數的首項為 280，末項為－220，和為 3780，則項數＝？公差＝？
① 126 ② －4

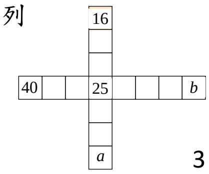
(4)已知一等差級數共有 9 項，首項為 2，第 5 項為 30，則①公差＝？②和＝？
① 7 ② 270

8.(1)已知 a_1, a_2, a_3,……, a_n 為一個等差數列，且 $a_4+a_8=-6$，則 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{11}$＝？(2)已知 $a_1-a_3+a_{10}-a_{17}+a_{19}=\sqrt{3}$，則 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19}$ 的和＝？
(1) －33 (2) $19\sqrt{3}$

(3)有一等差級數的首項為 5，公差為 3，則此等差級數第 10 項至第 30 項的和為多少？ $a_{20}=5+19\times 3=62$
a_{20} 為中央項，n＝21，$a_{10}+\cdots+a_{30}=21\times 62=1302$，

(4)有一等差級數共有 15 項，其總和為 120，則此 $a_7+a_8+a_9$＝？如果將每個數字都乘以 3 再加 6，則新數列的總和為何？
(1)24 (2)450

9.(1)在 30 和 210 之間插入 n 個數，使之成為等差數列，且這(n＋2)個數的和為 1200，求 n＝？(2)求此等差數列的公差？(3)則插入的第 4 個數是多少？
(1)8 (2)20 (3)110



10.在每個方格內都填入一個數，使得橫列方格內的數由左到右成等差數列，直列方格內的數由上到下也成等差數列。已知共同方格內的數是 25，則這些方格內的數字總和為多少？直列總和：25×7＝175，25＝40＋3d，d＝－5，b＝25＋4×(－5)＝5，
橫列總和：$\frac{(40+5)\times 8}{2}$＝180，最後總和：180＋175－25＝330

七、等差級數和的應用(將 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，$S_n=\frac{n[a_1+a_1+(n-1)d]}{2}=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$。)

1.(1)已知一個等差級數的首項為 17，公差為－3，求此等差級數前 40 項的和。$S_{40}=40[2\times17+(40-1)\times(-3)]\div2=-1660$

(2)若等差級數的首項為 25，前 16 項的和為－80，則公差為多少？$S_{16}=16[2\times25+(16-1)\times d]\div2=-80$，$d=-4$

(3)柏叡今晚背 3 個單字，接下來每天多背 2 個，經過 14 個晚上，共背了多少個單字？$S_{14}=14[2\times3+(14-1)\times2]\div2=224$

2. 求 100 至 400 的整數中，所有 3 的倍數的和。$a_1=102$，$d=3$，$a_n=399$，$399=102+3(n-1)$，$n=100$，$S_{100}=\frac{(102+399)\times100}{2}=25050$

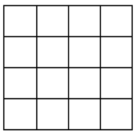
3.(1)恩語現在體重為 100 公斤，他想要用一年減重至 70 公斤，自現在起，計畫是第一個月減重 3 公斤，第二個月減重 2.8 公斤，第三個月減重 2.6 公斤，…，依此類推。請問恩語能達成目標嗎？若不行，則距離目標還有幾公斤？$a_1=3$，$d=2.8-3=-0.2$ $S_{12}=12[2\times3+11\times(-0.2)]\div2=22.8$，不行，$30-22.8=7.2$，差 7.2 公斤。

(2)某電影院 E 廳共有 24 排座位，此廳每一排都比前一排多 2 個座位。若家祺坐在此廳的第 16 排時，發現此排正好有 50 個座位，則此電影院的 E 廳總共有有幾個座位？$d=2$，$a_{16}=a_1+15\times2=50$。$a_1=20$，(1)$a_{24}=20+23\times2=66$，$24\times(20+66)\div2=1032(2)S_{24}=24[2\times20+23\times2]\div2=1032$

(3)從 3 月 1 日起，爸爸每天都會傳"加油打氣圖"給女兒，而且每一天都比前一天多一個，直到女兒考完會考(5 月 16 日)總共會得到多少個"加油打氣圖"？$a_1=1$，$d=1$，共 $31+30+16=77$(天)，$n=77$，$a_{77}=a_1+(77-1)\times1=77$，$S_{77}=77(1+77)\div2=3003$(個)

4. 特務 A 到 J，共 10 人。特務 A 今天只搭計程車花了 125 元，特務 B 搭公車轉捷運共花了 530 元，他們 10 人的車資正好形成等差數列，請問車資的公差？特務 B 到 I8 人的總車資為何？
$d=(530-125)\div(10-1)=45$。
$a_1+a_{10}=a_2+a_9=(125+530)$，
總和$=8(125+530)\div2=2620$

5. 1～16 這 16 個正整數，分別填入右圖的 16 個方格內（數字不重複使用），使得每列的和及每行的和都相等，則每行（列）的和是多少？
$S_{16}=16(1+16)\div2=136$，$136\div4=34$



6. 甲、乙兩人**同時同地出發**，甲以固定速率行走，每分鐘走 80 公尺，而乙第一分鐘走 50 公尺，之後每分鐘增加 5 公尺，則多少分鐘後，乙可以追上甲。(兩人花一樣的時間，走一樣長的路。)
設 t 分鐘後追上$(t>0)$
$80t=t[2\times50+(t-1)\times5]\div2$，$t=13$ 分鐘

7.(1)求 $1-2-3+4-5-6+7-8-\cdots+100$。原式$=(1-2-3)+(4-5-6)+(7-8-9)+\cdots+(97-98-99)+100=(-4)+(-7)+(-10)+\cdots+(-100)+100$，$-100=-4+3(n-1)$，$n=33$，$33\times[(-4)+(-100)]\div2+100=-1616$

(2)求$\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5})+\cdots+(\frac{1}{61}+\frac{2}{61}+\frac{3}{61}+\cdots+\frac{60}{61})$
$\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\cdots+30=60\times(\frac{1}{2}+30)\div2=915$

8.(1)設有兩等差級數，他們的第 n 項的比是$(2n+3):(3n+2)$。是求他們前 11 項之和的比。(2)有兩個等差級數，他們的前 n 項和的比為$(4n+5):(5n-4)$，試求兩級數第 13 項的比為多少？(a_{13} 是 a_1 和___的等差中項，故 a_{13} 和 S_產生關聯)
(1)$S=11[2a_1+(11-1)d]\div2=11(a_1+5d)=11a_6$
$S_{a11}:S_{b11}=11a_6:11b_6=a_6:b_6=(2\times6+3):(3\times6+2)=3:4$
(2) $S_{25}=25a_{13}$，$a_{13}:b_{13}=105:121$ ($n=25$ 代入)

9.(1)有一個等差數列第 n 項為 a_n，若 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=240$，$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=220$，則 $a_1=$？$a_5=240\div5=48$，
$a_6=220\div5=44$，$d=-4$，
$a_1=a_5-4d=48-4(-4)$，$a_1=64$

(2)有一個等差級數，首項為 7，公差為$\frac{3}{2}$，若偶數項的和比奇數項的和大 24，則此等差級數共有幾項。
32 項

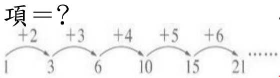
(3)已知一個等差級數 a_{13} 到 a_{53} 的和為 123，則①$a_{33}=$？②a_{20} 到 a_{46} 的和為何？
①$a_{13}+a_{14}+\cdots+a_{53}=41\times a_{33}=123$，$a_{33}=3$ ②$a_{20}+a_{21}+\cdots+a_{46}=27\times a_{33}=81$

(4)若一個公差不為 0 的等差級數，其 $S_{19}=S_{38}$，則此數列的第幾項為 0？$S_{38}-S_{19}=0$
$a_{20}+a_{21}+\cdots+a_{38}=0$，故 $a_{29}=0$

10.(1)契約內容是：今天 3 月 1 日我給你 80 元，明天給你 76 元，後天給你 72 元，依此類推。請問你要不要跟我簽約？①何時開始為負數？②哪一天終止契約獲利最大？獲利多少？③簽約後哪天開始賠錢(和為負數)？
(1) 3/22 (2) 3/20 或 3/21，最大和為 840。
$21\times(80+0)\div2$ 或 $20\times(80+4)\div2$
(3) $S_n=n[2\times80+(n-1)\times(-4)]\div2<0$，因為 $n>0$
故 $n>41$，$n=42$，4/11

(2)已知一個等差級數的首項為－82，第 10 項為－55，則:①公差為何？②第幾項開始為正數？③此級數的和最小為多少？④此等差級數自第 1 項加到第幾項時，其和開始為正數？
(1) $a_{10}=a_1+9d$，$-55=-82+9d$，$d=3$
(2) $a_n>0$，$-82+3(n-1)>0$，$n>85/3$，$n=29$
(3) $S_{28}=28[2\times(-82)+27\times3]\div2=-1162$
(4) $S_n=n[2\times(-82)+(n-1)\times3]\div2>0$，$n>167/3$
$n>55.\cdots$，$n=56$

11.(1)求數列 1，3，6，10，15，21，……中，第 100 項＝?



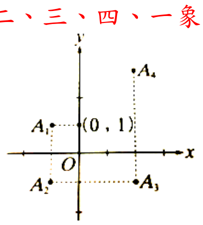
$a_3=1+2+3=S_3$，
$a_4=1+2+3+4=S_4$，
$a_{100}=1+2+3+4+\cdots+100=S_{100}$
$100\times(1+100)\div2=5050$

(2)數列 1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，……的第 500 項為？共有 $1+2+3+4+\cdots\cdots+n=S_n$ 個數字
$n=1+2+3+\cdots+n=S_n<500$，則 $n(1+n)<1000$，n 取最大整數值 $n=31$，
故 $a_{500}=32$

(3)如圖，第十區內的數之和為多少？
$1+2+\cdots+9+1=46$，$a_{46}=2+45\times2=92$
$a_{55}=2+54\times2=110$
③ $S_{10}=10[92+110]\div2=1010$

2	4、6	8、10、12	……

12. 妍溱設計了一個機器人，被設計為每次啟動會先向左轉，再往前行走一段距離後停止。每次啟動後，都會比前一次多走 1 個單位長。右圖是機器人由(0,1)的位置，面向 y 軸正方向，連續啟動 4 次所走的路線圖。第一次停在 $A_1(-1,1)$，第二次停在 A_2 $(-1,-1)$，第三次停在 A_3 $(2,-1)$，第四次停在 A_4 $(2,3)$，依此規律。請問：(1)第 101 次啟動機器人後，它走到的位置 A_{101} 在哪一個象限？(2)A_{101} 的坐標為何？(1)依第二、三、四、一象限，$101\div4=25$ 餘 1，A_{101} 在第二象限。
(2)向左為 1、5、9、…向下為 2、6、10、..
象限內各點的坐標依序為$(-1,1)$、$(-3,3)$、$(-5,5)$，A_{101} 為第 26 個點，x 坐標為
$-1+(26-1)\times(-2)=-51$，$A_{101}(-51,51)$



13.(1)某三數成等差數列，由小到大排列，其和為 24，若首項減 3，第二項不變，第三項加 21，且新的三數成等比數列，則此三數為何？(2)設三數成等比數列，其和為 42，將此三數依序減去 1、3、11，且新的三數成等差數列，則此三數為何？
(1)$3a=24$，$a=8$，此三數為 $8-d,8,8+d$ $(d>0)$新的三數為 $5-d,8,29+d$ 三數成等比，$64=(5-d)(29+d)$，$d^2+24d-81=0$，$(d-3)(d+27)=0$，$d=3$ 或-27(不合)，故此三數為 5, 8, 11
(2)設新的三數成等差為 $a-d,a,a+d$，
$(a-d+1)+(a+3)+(a+d+11)=42$，$3a=27$，$a=9$
$10-d,12,20+d$ 三數成等比，$12^2=(10-d)(20+d)$
$d^2+10d-56=0$，$(d-4)(d+14)=0$，$d=4$ 或 $d=-14$
故 $d=4$，此三數為 6, 12, 24 或 $d=-14$，此三數為 24, 12, 6

綜合演練

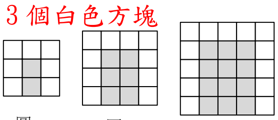
1. 下列各數列皆為等差數列，在空格中填入適當的數。
(1) <u>3</u>, 5, <u>7</u>, <u>9</u>, 11，公差＝<u>2</u>
(2) 12, <u>5</u>, −2, <u>−9</u>, −16，公差＝<u>2</u>。
(3) 5, x, <u>52</u>, y, 99，求 $x-y$。-47

2. 下列各數列皆為等比數列，在空格中填入適當的數。
(1) $\frac{x}{4}$, <u>±x</u>, 4x。(x≠0)，公比為<u>±4</u>。
(2) $\pm\frac{8}{3}$, 4, ±6, 9, $\pm\frac{27}{2}$，公比為 $\pm\frac{3}{2}$。
(3) 256, <u>−128</u>, <u>64</u>, −32, <u>16</u>，公比為$-\frac{1}{2}$。

3. 若 a，b，c 三數成等差數列，判別下列何者不是等差數列。(A) 2a，2b，2c (B) ad，bd，cd (C) $\frac{a}{d}$，$\frac{b}{d}$，$\frac{c}{d}$ (d≠0) (D) a^2，b^2，c^2 (E) $2a+3$，$2b+3$，$2c+3$ (F) $a+b$，$b+c$，$c+d$ D

4. 若 a，b，c，d 四個數成等比數列，判別下列何者不是等比數列。(A) $5a$，$5b$，$5c$，$5d$ (B) ab，bc，cd (C) a^2，b^2，c^2，d^2 (D) $a+2$，$b+2$，$c+2$，$d+2$ (E) $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$，$\frac{1}{d}$ (F) $\frac{a}{e}$，$\frac{b}{e}$，$\frac{c}{e}$，$\frac{d}{e}$ (e≠0) D

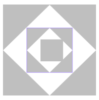
5. (1)如下圖，將白色方塊與灰色方塊按照規律拼成若干個正方形圖案。其中的灰色方塊構成一個長方形，且長方形各邊的方塊數每次都會增加一個。設 a_n 為圖 n 中ㄇ字型白色方塊的總數，以 n 的式子表示 a_n。依序會增加 3 個白色方塊，其首項為 7，公差為 3，所以 $a_n=3n+4$。


圖一　圖二　圖三

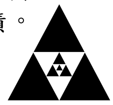
(2)泉鋐用等長的吸管，依圖 1~圖 4 的規律排出相連的正六邊形。①以 n 的式子表示 a_n。②是否剛好可用 266 根吸管排出若干個相連且完整的正六邊形？
①$a_n=6+(n-1)\times5=5n+1$
②$266=5n+1$，得 n＝53，故 OK


圖 1　圖 2　圖 3　圖 4

6. (1)積為 16 的正方形，取各邊中點連成第 2 個正方形，再將第 2 個正方形各邊中點連成第 3 個正方形，依此方法，則第 5 個正方形的面積為何？$a_1=16$，$r=\frac{1}{2}$ $a_5=16\times(\frac{1}{2})^4=1$

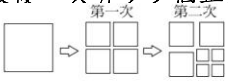


(2)個正三角形取其各邊中點連成一個正三角形，稱為第 2 層三角形，再取第 2 層三角形各邊中點連成一個正三角形，此為第 3 層三角形。依此方法，求第 6 層三角形的面積。
$a_1=256\sqrt{3}$，$r=\frac{1}{4}$，$a_6=a_1\times r^{6-1}=256\sqrt{3}\times(\frac{1}{4})^5=\frac{\sqrt{3}}{4}$



3. 阿榮將上課筆記邊頁碼，第一頁寫 1，第二頁寫 2，第三頁寫 3……以此類推，已知編到最後一頁時，共寫了 2019 個數字，則：(1)編完第 99 頁時，共寫了幾個數字？(2)筆記共有幾頁？
(1)1~9 共 9 個編號，10~99 共 90 個編號 9＋90×2＝189 個
(2)2019－189＝1830，1830÷3＝610 頁

4. 如圖，將一片大正方形的紙張剪成四個大小相同的正方形後，再將其中一個小正方形的紙張剪成四個大小也相同的更小的正方形，若重覆這樣的動作十次，則：(1)最後一共有多少個正方形？(2)此時最小的正方形其邊長為剪完第一次的正方形(非原始正方形)邊長的幾倍？



(1) 31 張
(2) $(\frac{1}{2})^9=\frac{1}{512}$

3. 等差數列 $\langle a_n\rangle$ 中，已知 $a_5+a_6+a_7=-15$，$a_5\times a_6\times a_7=120$，則 $a_{20}=$?。
$a_6=-5$，$(-5+d)\times(-5)\times(-5-d)=120$，$d=\pm7$
$a_{20}=a_6+14d$，$a_{20}=93$ 或 -103

4. 已知等差數列 $\langle a_n\rangle$ 與 $\langle b_n\rangle$ 各有 300 項，其中 $\langle a_n\rangle=\langle 2, 5, 8, 11, 14, \cdots\rangle$ $\langle b_n\rangle=\langle 5, 10, 15, 20, 25, \cdots\rangle$ 則兩數列的共同項共有幾項？$a_{300}=2+299\times3=899$。$C_1=5$，$d=15$，
$5+(n-1)\times15=890$，n＝60 項。

5. 等差數列的公差 d 為整數，且 $1<d<10$，前五項的和為 30。每一項都是整數，且末三項的和為 459。其項數為何？$a_3=6$，$a_{n-1}=153$，公差為 147 的因數，
(1)$d=3$，n＝53 (2)$d=7$，n＝25

5. 設 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$ 均為等差數列，且 $a_1=5$，$b_1=7$，$a_{101}+b_{101}=152$，則 $a_{60}+b_{60}-a_{10}-b_{10}=$？
$\langle a_n\rangle$ 的公差為 c，$\langle b_n\rangle$ 的公差為 d
則由$(a_{101}+b_{101})-(a_1+b_1)=152-(5+7)$
$\Rightarrow 100c+100d=140$，
$a_{60}+b_{60}-a_{10}-b_{10}=50c+50d=70$

6. 一個等差數列中，已知 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_9+a_{10}=30$，$a_{11}+a_{12}+\cdots\cdots+a_{19}+a_{20}=40$，則公差＝？$a_{81}+a_{82}+\cdots\cdots+a_{89}+a_{90}=$？
(1)$d=\frac{1}{10}$，110

編號	3	n-1
數列	6	153

9.(1)若一等比數列的第 1 項與第 2 項的和為 16，第 4 項與第 5 項的和為 432 求公比為多少？第 3 項為多少？

$a_1+a_1r=16$， $a_1r^3+a_1r^4=432$，

$r^3(a_1+a_1r)\times r^3=432$，

$16r^3=432$，$r^3=27$，$r=3$，$4a_1=16$，$a_1=4$，$a_3=4\times3^2=36$

(2)已知四個**整數** a, b, c, d 成等比數列，且 $a-b=-24$，$c-d=-384$，則此數列的公比為何？(A) -2 (B) 4 (C) ±2 (D) ±4

$a-b=a-ar=a(1-r)=-24$ ①

$c-d=ar^2-ar^3=ar^2(1-r)=-384$ ②

把①式代入②式得-24，$r^2=-384$, $r^2=16$, $r=4$ 或-4(不合)當$=-4$ 時:$a(1+4)=-24$，a＝分數，故不合。

(3)一等比數列共有 8 項，已知奇數項的和為 17，偶數項的和為 34，則此數列的公比為何？

$a_2+a_4+a_6+a_8=a_1r+a_3r+a_5r+a_7r=(a_1+a_3+a_5+a_7)r$ $r=34\div17=2$

10.(1)已知三數成等比數列，其和為 21，其積為 216，且公比大於 1，求此三數。

設此三數為$\frac{a}{r}$，a，ar(r>1)，$\begin{cases}\frac{a}{r}+a+ar=21 & ①\\ \frac{a}{r}\times a\times ar=216 & ②\end{cases}$

由②$a^3=216$，$a=6$，代入①，$2r^2-5r+2=0$，

$(r-2)(2r-1)=0$，$r=2$ 或$\frac{1}{2}$ (不合)，三數為 3，6，12

(2)若一等比數列的第 7 項為 2，第 13 項為 4，則此數列的第 43 項為何？128

(3)市每年的人口數逐年成長，且成一等比數列。已知該城市 10 年前有 35 萬人，現在有 42 萬人，求 20 年後該城市有多少萬人？

$a_1=35$，$a_2=42$

$r=\frac{42}{35}=\frac{6}{5}$，所求為$=35\times(\frac{6}{5})^3=60.48$(萬人)

11. 設等差級數 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=n^2$，則 $a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots\cdots+a_{49}-a_{50}=$? $a_1=S_1=1^2=1$，$a_2=S_2-S_1=2^2-1^2=3$，$a_3=S_3-S_2=3^2-2^2=5$，故公差 $d=2$。

$(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{49}-a_{50})=(-d)+(-d)+\cdots\cdots+(-d)=25\times(-d)=-50$

12. 若 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$與 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$皆為等差數列，且 $a_1=10$、$b_1=30$、$a_{10}+b_{10}=40$，則 $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots\cdots+(a_{20}+b_{20})=$？$\langle a_n\rangle$的公差為 c，$\langle b_n\rangle$的公差為 d， $c+d=0$

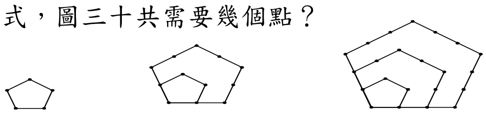
$S_{20}=20[2\times40+19\times0]\div2=800$

13. 等差數列$\langle a_n\rangle$中，設 $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{24}+a_{25}=m$，$a_4+a_5+\cdots\cdots+a_{31}+a_{32}=$?

(以 $m=150$ 思考)$15a_{18}=m$，故 $a_{18}=\frac{m}{15}$，

原式$=29a_{18}=29\times\frac{m}{15}=\frac{29}{15}m$

14. 依下圖排列方式，圖三十共需要幾個點？

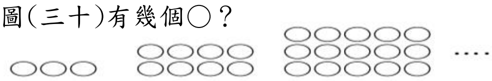


圖(一) 圖(二) 圖(三)

圖三$=1+4+7+10=a_1+a_2+a_3+a_4=S_4$

圖三十表示 $a_1+a_2+\cdots+a_{31}=S_{31}=31(2\times1+30\times3)\div2=1426$

15. 觀察下列各圖的規律：若圖(n)比圖$(n-1)$多了 19 個○，則 n=? 圖(三十)有幾個○？



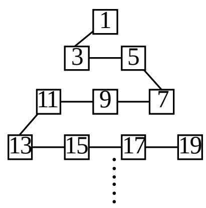
圖(一) 圖(二) 圖(三)

圖三$=3+5+7=a_1+a_2+a_3=S_3$，圖 $n=3+5+7+\cdots+19$，$a_n=19$，$n=9$。圖三十$=3+5+7+\cdots+a_{30}=S_{30}$，$a_{30}=3+29\times2=61$，$10\times(3+61)\div2=320$

16. 如下圖，有一蛇形紙牌，數字 1 出現在第一列，數字 3、5 出現在第二列，數字 11、9、7 出現在第三列，數字 13、15、17、19 出現在第四列。試問第 85 列，由左而右算第 62 個數字為何？

$1+2+3+\cdots+84=84\times(1+84)\div2=85\times42=3570$∴第 1~84 列共有 3570 個數，且由左而右第 62 個數$=$由右而左第 24 個數∴$3570+24=3594$

$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$ $a_{3594}=2\times3594-1=7187$



17.(1)已知一個等差級數前10項的和是80，前20項的和是360，則(1)首項？(2)公差？(3)前 30 項之和？($S_{10}=80$，$S_{20}=360$，則 $S_{30}=$?)(1) -1 (2) 2 (3) 840

18. 已知等差級數 $36+32+28+\cdots$中，到第 n 項的和為 168，則 n=？(2)若 $S_n=1+3+5+\cdots\cdots+x=729$，則 x=？$S_{30}-S_{29}$=？(1) 7 或 12 (2) **53，59**

19. 有一個等差數列，若奇數項的和 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=240$，偶數項的和 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=220$，則 a_1=？公差？

$5d=-20$，$d=-4$，$a_5=240\div5=48$，

$a_1=a_5-4d=48-4(-4)$，$a_1=64$

20. 有 10 個等差數列(一)、(二)、(三)、……、(十)，每個數列的公差都是 5，末項都是 100，而且這 10 個等差數列的首項也形成等差數列，情形如圖，求：(1)等差數列(一)有幾項？

(2)等差數列(六)首項為多少？又其和為多少？

(3)這 10 個等差數列共有多少項？

(4)此 10 個等差數列全部的總和為多少？

(一)	5 , 10 , 15 , 20 , …… , 100
(二)	10 , 15 , 20 , …… , 100
(三)	15 , 20 , …… , 100
⋮	⋮
(十)	50 , …… , 100

《答案》(1)20 項 (2)首項$=30$，和$=975$ (3)155 項 (4)9675

詳解：(1)$a_1=5$，$d=5$ $a_n=100=5+(n-1)\times5$，∴$n=20$

(2)$5+(6-1)\times5=30$，$S_{15}=\frac{15}{2}\times(30+100)=975$

(3)設數列(十)有 m 項，則：$50+(m-1)\times5=100$，$m=11$ ∴$S=20+19+18+\cdots\cdots+11=\frac{10}{2}\times(20+11)=155$

(4)數列(一)和為$\frac{20}{2}\times(5+100)=1050$ 數列(二)較數列(一)的和少 5

而數列(三)較數列(一)的和少 10……依此類推可得 總和

$=1050+(1050-5)+(1050-5-10)+(1050-5-10-15)+\cdots\cdots+(1050-5-10-\cdots\cdots-45)$

$=1050\times10-5\times9-10\times8-15\times7-20\times6-25\times5-30\times4-35\times3-40\times2-45\times1$
$=10500-(45+80+105+120+125+120+105+80+45)=10500-825=9675$

21. 將連續正整數 1 到 1000 依下圖方式排列，再用一個長方形方框，框住 24 個數，下圖為框住 24 個數的一個圖例。回答下列問題：
(1)所框住的 24 個數，總和是否可為 994？若不可能，請寫出理由；若可能，請寫出框內的最小數。
(2)所框住的 24 個數，總和是否可為 6156？若不可能，請寫出理由；若可能，請寫出框內的最大數。
(3)所框住的 24 個數，總和是否可為 9084？若不可能，請寫出理由；若可能，請寫出框內的最小數。

設框住的最小數為 a，∴第一列剩餘的五數為 $a+1$、$a+2$、$a+3$、$a+4$、$a+5$，總和為 $6a+15$
第二列六個數的和為 $6a+15+48=6a+63$
第三列六個數的和為 $6a+63+48=6a+111$
第四列六個數的和為 $6a+111+48=6a+159$
∴二十四個數的總和 $6a+15+6a+63+6a+111+6a+159=24a+348$

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	……						

(1)　$24a+348=994$，$24a=646$，$a=26\frac{11}{12}$，不是整數，∴不可能為 994。
(2)　$24a+348=6156$，$24a=5808$，$a=242$，與 2 在同一行，∴框內最大數為 $242+5+24=271$。
(3)　$24a+348=9084$，$24a=8736$，$a=364$，與 4 在同一行，自 4 開始向右只有五個數，∴不可能框出 24 個數。

22.「虹」劇場規畫建置 888 個座位，依序每一排比前一排多一個座位，且排數要大於 20 且少於 50，請問有幾種設計方案？
設第一排有 x 個座位，共有 y 排。
$\frac{y}{2}(x+x+y-1)=888$，$y(2x+y-1)=1776=2^4\times3\times37$
因排數大於 20、少於 50，且為 $2^4\times3\times37$ 之因數，
① 若 $y=2^3\times3=24$，$2x+y-1=74$，$2x+24-1=74$，$x=25.5$ 不合題意
② 若 $y=2^4\times3=48$，$2x+y-1=37$，$2x+48-1=37$，$x=-5$ 不合題意
③ 若 $y=37$，$2x+y-1=48$，$2x+37-1=48$，$x=6$
只有一種方案，第一排 6 個座位，有 37 排。