

2-2 根式的運算

根式的意義 根式的乘除運算 根式的加減運算

1. 回憶下列問題：
- 計算 $\sqrt{4} \times \sqrt{9} = \sqrt{\quad}$ 。
 - 計算 $\sqrt{4} \times \sqrt{9} = \sqrt{\quad}$ 。
2. 計算下列各式：
- $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = \sqrt{\quad}$ 。
 - $3\sqrt{5} - (-8)\sqrt{5} = \sqrt{\quad}$ 。

1 根式的意義

如圖，某學校裡有一塊正方形的土地分成四個區域，要給四個班級的學生種植蔬菜，甲、乙、丙、丁各佔了面積分別為 2 平方公尺與 3 平方公尺的正方形區域。依該班的級想要選左下角那一塊，一塊的面積是多少呢？

我們在前一節學過，當正方形面積為 a 平方公尺時，邊長為 $\sqrt{a}$ 公尺。這塊正方形土地的邊長為 $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ 公尺。我們知道像 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{2}$ 都是數，數字經過加、減、乘、除運算後可得出算式如 $2\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ 、 $\frac{3}{2} \times \sqrt{10}$ 、 $2 \times \sqrt{2}$ 等也都是數字，而這些數（或稱方根），像這樣含有根號的算式稱為**根式**。

在上面的問題中，依該班的級想要選的那一塊土地面積應該是 $(\sqrt{3} \times \sqrt{2})$ 平方公尺，要怎麼計算化簡這個根式呢？接下來，我們就按部就班地來學學怎麼化簡根式的意義與化簡。

首先，我們知道平方根也是數，多項式中的 x 也可代表方根，因此方根運算規則與代數式的規則一樣，我們知道 $2 \times x$ 或是 $2 \times (x + 3)$ 之類的代數式，其中的「 x 」可以省略，而簡記成 $2x$ 及 $2(x + 3)$ ，同時 $x + 5 = \frac{x}{1} + 5 = \frac{x}{1} + \frac{5}{1}$ ，同樣的，根式也可以利用這樣的方式將 $\times$ 或 $+$ 的記號簡記，譬如：

- $3 \times \sqrt{5}$ 可簡記成 $3\sqrt{5}$ 。
- $\frac{3}{2} \times \sqrt{6}$ 可簡記成 $\frac{3}{2}\sqrt{6}$ 或 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ 。
- $4 \times (\sqrt{2} + \sqrt{3})$ 可簡記成 $4(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ 。
- $1 \times \sqrt{2}$ 可簡記成 $\sqrt{2}$ ； $(-1) \times \sqrt{2}$ 可簡記成 $-\sqrt{2}$ 。
- $\sqrt{3} + 2 = \frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{2}{1} = \frac{\sqrt{3} + 2}{1}$ 。

簡化練習

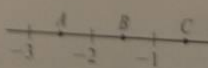
簡記下列各式：

- $3 \times \sqrt{11}$
 $3 \times \sqrt{11} = 3\sqrt{11}$
- $(-\frac{7}{2}) \times \sqrt{6}$
 $(-\frac{7}{2}) \times \sqrt{6} = -\frac{7}{2}\sqrt{6}$
- $(-1) \times \sqrt{15}$
 $(-1) \times \sqrt{15} = -\sqrt{15}$
- $\sqrt{5} + 3$
 $\sqrt{5} + 3 = \frac{\sqrt{5} + 3}{1}$

大考試題

數線上有 A、B、C、D 四點，根據圖中各點的位置，哪一點所表示的數與 $11 - 2\sqrt{39}$ 最接近？

- (A) A (B) B (C) C (D) D



例1 數與根式的乘積

計算下列各根式：

(1) $(-12) \times 5\sqrt{3}$

$$(-12) \times 5\sqrt{3} = (-12) \times 5 \times \sqrt{3} = (-60) \times \sqrt{3} = -60\sqrt{3}$$

(2) $\frac{7}{3}\sqrt{6} \times 9$

$$\frac{7}{3}\sqrt{6} \times 9 = \frac{7}{3} \times 9 \times \sqrt{6} = 21 \times \sqrt{6} = 21\sqrt{6}$$

隨堂練習

計算下列各根式：

(1) $3 \times 8\sqrt{21}$
 $3 \times 8\sqrt{21}$
 $= 24\sqrt{21}$

(3) $\frac{4}{3} \times (-6\sqrt{15})$
 $\frac{4}{3} \times (-6\sqrt{15})$
 $= -8\sqrt{15}$

(2) $2\sqrt{2} \times (-8)$
 $2\sqrt{2} \times (-8)$
 $= -16\sqrt{2}$

(4) $(-2\sqrt{6}) \times (-\frac{3}{2})$
 $(-2\sqrt{6}) \times (-\frac{3}{2})$
 $= 3\sqrt{6}$

根式的乘除運算

根式的乘法

在本節溫故啟思的問題1中，計算可得 $\sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6 = \sqrt{4 \times 9}$ 。前面問題中的 $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ 是否也會等於 $\sqrt{3 \times 2}$ 呢？

例題1

(2) $-\frac{1}{2} \times (-\sqrt{5})$
 解 $\frac{1}{2}\sqrt{5}$

(3) $2\sqrt{2} \times \frac{9}{4}$
 解 $\frac{9}{2}\sqrt{2}$

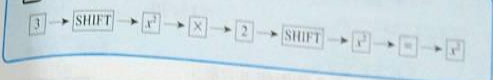
(4) $-\frac{1}{7} \times 7\sqrt{10}$
 解 $-\sqrt{10}$

探索活動

根式的乘法

請利用科學型計算機計算 $(\sqrt{3} \times \sqrt{2})^2 =$ 6。

科學型計算機



由探索活動可知 $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ 是6的正平方根，而6的正平方根就是 $\sqrt{6}$ ，即 $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6} = \sqrt{3 \times 2}$ 。一般而言，當 a, b 皆為正數或0時，
 $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) = (\sqrt{a} \times \sqrt{a}) (\sqrt{b} \times \sqrt{b}) = a \times b = ab$ 。
 $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ 是 ab 的正平方根，而 ab 的正平方根為 $\sqrt{ab}$ ，所以可得
 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} = \sqrt{a \times b}$ 。

此我們可知：

根式的乘法

若 $a \geq 0, b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 。

2 根式的乘法

計算下列各根式：

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{13}$

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{13}$
 $= \sqrt{5 \times 13}$
 $= \sqrt{65}$

(2) $-2\sqrt{3} \times 3\sqrt{7}$

(2) $-2\sqrt{3} \times 3\sqrt{7}$
 $= -2 \times \sqrt{3} \times 3 \times \sqrt{7}$
 $= (-2 \times 3) \times \sqrt{3} \times \sqrt{7}$
 $= -6 \times \sqrt{21}$
 $= -6\sqrt{21}$

題演練 配合例題2

下列各根式：

$2 \times \sqrt{7}$

(2) $-3\sqrt{5} \times 2\sqrt{11}$
 解 $-6\sqrt{55}$

(3) $-\sqrt{3} \times (-3\sqrt{7})$
 解 $3\sqrt{21}$

(4) $4\sqrt{13} \times \sqrt{5}$
 解 $4\sqrt{65}$