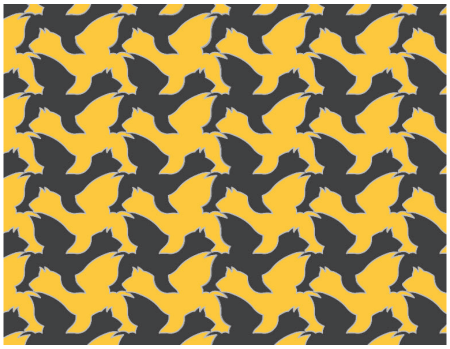
2 週期性數學模型

生活上有許多波動與函數息息相關，例如將繩子一端固定在牆壁、另一手作上下規律的振動，得到的這個規律波形是以正弦函數為基礎去變形的圖形。本單元將介紹各正弦函數的圖形，並探討它的特性。

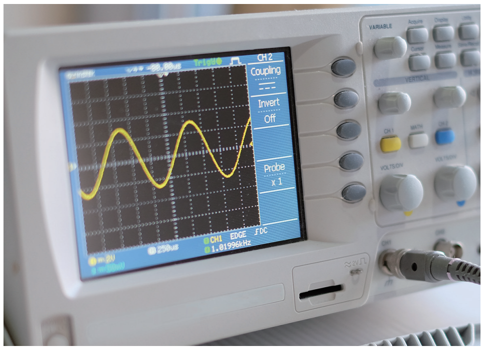
▲圖1

甲 正弦函數的圖形

生活上有許多重複出現而具有週期性的現象，例如：圖 2 為荷蘭版畫家艾薛爾利用重複出現的飛獅，不互相重疊、無空隙、反覆且連續地鋪滿的作品。



▲圖2



▲圖3

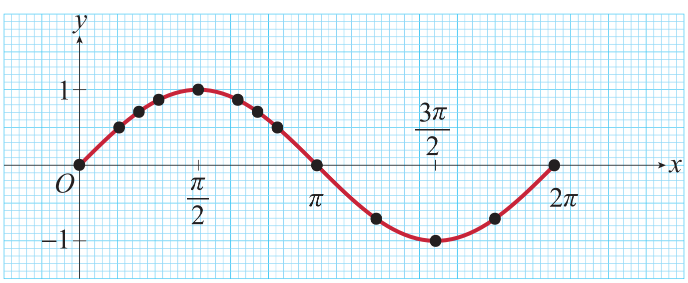
此外，聲音的波動也具有週期性的現象，例如：圖 3 是利用示波器接收震動的音叉所顯示之聲波。事實上，這個規律的波形是以正弦函數為基礎的圖形，那麼，什麼是正弦函數呢？

給定一個廣義角 x，三角比 $\sin x$ 的值即隨之唯一確定，因此它是 x 的函數，稱為**正弦函數**。接下來我們先介紹正弦函數的圖形，並藉此討論它的特性。

描繪函數圖形最直接的方法就是描點法。首先對某些特殊的 x 值（弳）求出其對應的函數值 $y=\sin x$，列表如下。

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

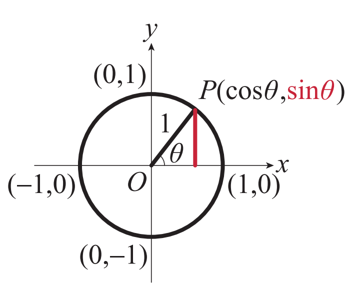
接著，利用計算機算出上表中 x, y 的（近似）值，再將點 (x, y) 逐一標示於坐標平面上。如果描點數夠多，並用平滑曲線將這些點連起來，就可得到 $y=\sin x$ 在 $0\leq x\leq 2\pi$ 上的圖形（如圖 4 所示）。



▲圖4

除此之外，也可以利用單位圓來描繪正弦函數的圖形。

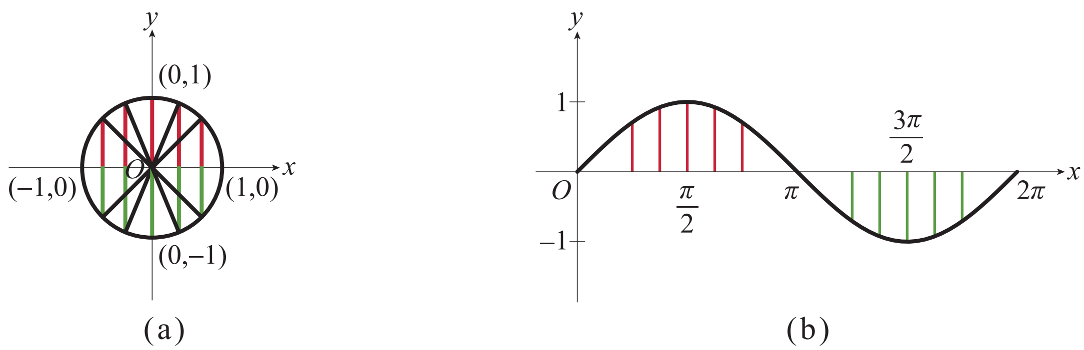
首先，在坐標平面上，以原點 O 為圓心，作一單位圓，再以 x 軸正向為始邊，作一廣義角 θ，如圖 5 所示。因為廣義角 θ 的終邊與單位圓交於 $P(\cos\theta, \sin\theta)$，所以 $\sin\theta$ 是 P 點的 y 坐標。



▲圖5

接著，當 θ 由 0 逐漸增加到 2π 時，P 點會繞單位圓一圈，此時 P 點的 y 坐標（即 $\sin\theta$ 值）的變化情形可用圖 6(a) 中的線段顏色（紅色表正，綠色表負）與長短（$\sin\theta$ 的絕對值愈大，長度愈長）來表示。

最後，利用這些 P 點的 y 坐標，就可描繪出函數 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形，如圖 6(b) 所示。



▲**圖6**

無論從描點或是用單位圓的方式，都可觀察正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形有以下的現象：

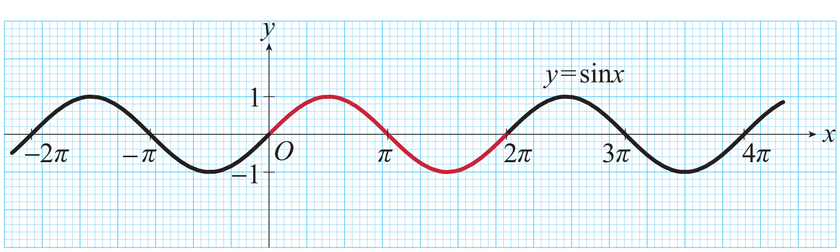
(1) 當 x 從 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時，$y=\sin x$ 的值從 0 增加到 1。

(2) 當 x 從 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 π 時，$y=\sin x$ 的值從 1 減少到 0。

(3) 當 x 從 π 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 時，$y=\sin x$ 的值從 0 減少到 -1。

(4) 當 x 從 $\frac{3\pi}{2}$ 增加到 2π 時，$y=\sin x$ 的值從 -1 增加到 0。

由同界角的換算公式 $\sin(2\pi+x)=\sin x$ 可知：當變數 x 的值增加 2π 時，正弦函數的值會重複的出現；因此，$y=\sin x$ 在 $2\pi\le x\le 4\pi$ 上的圖形與在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形完全相同，其餘範圍以此類推。也就是說，只要把 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上所畫的圖形複製並逐次向右或向左平移 2π 單位，就可得到 $y=\sin x$ 的全部圖形（如圖 7 所示）。



▲**圖7**

像這樣圖形會重複出現的函數，我們稱函數 $y=\sin x$ 為**週期函數**。又 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍內的圖形沒有重複，且將其複製並向右及向左平移 2π 單位的倍數可得 $y=\sin x$ 的全部圖形，我們稱 2π 是函數 $y=\sin x$ 的**週期**。

在函數關係中，x 取值的範圍稱作該函數的**定義域**，而其對應值 y 的範圍稱作該函數的**值域**。由圖 7 觀察發現：正弦函數的定義域為全體實數 $\mathbb{R}$，且值域在 -1 與 1 之間（含端點）。

接著再進一步討論正弦函數 $y=\sin x$ 的特性：

(1) 定義域：因為對任意實數 x, $\sin x$ 都有定義，所以其定義域為全體實數 $\mathbb{R}$。

(2) 值　域：因為正弦函數的值涵蓋每個在 -1 與 1 之間的實數，所以其值域為

$$\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \le y \le 1\}。$$

(3) 週　期：由圖形知其週期為 2π。

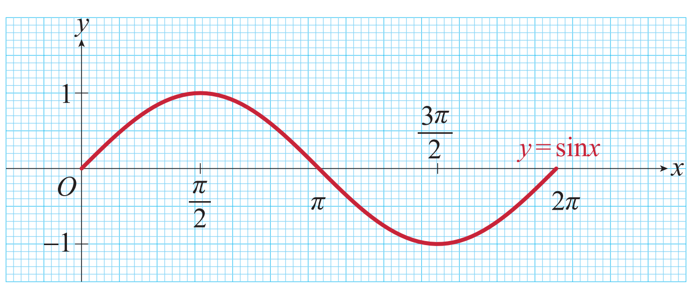
(4) 振　幅：從圖 7 中發現正弦函數圖形在 x 軸上方或下方擺動的最大距離為 1；此時稱正弦函數 $y=\sin x$ 的振幅為 1。

(5) 對稱性：由換算公式 $\sin(-x)=-\sin x$ 知其圖形對稱於原點。

例題 1

已知 $0<x\le 2\pi$，觀察 $y=\sin x$ 的圖形，求滿足 $\sin x<0$ 的 x 之範圍。

解



因為當 $\pi<x<2\pi$ 時，$y=\sin x$ 的圖形在 x 軸下方，所以可得

$$\pi<x<2\pi。$$

隨堂練習

已知 $-\pi\le x\le 3\pi$，觀察 $y=\sin x$ 的圖形，求滿足 $\sin x<0$ 的 x 之範圍。

乙 正弦函數圖形的平移

借助 $y=\sin x$ 的圖形及圖形平移的概念，可以畫出與 $y=\sin x$ 相關的函數之圖形。先來看鉛直上下平移的圖形。

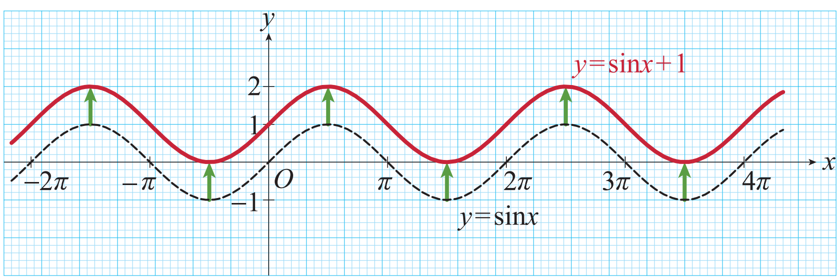
例題 2

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y=\sin x+1$。　　(2) $y=\sin x-2$。

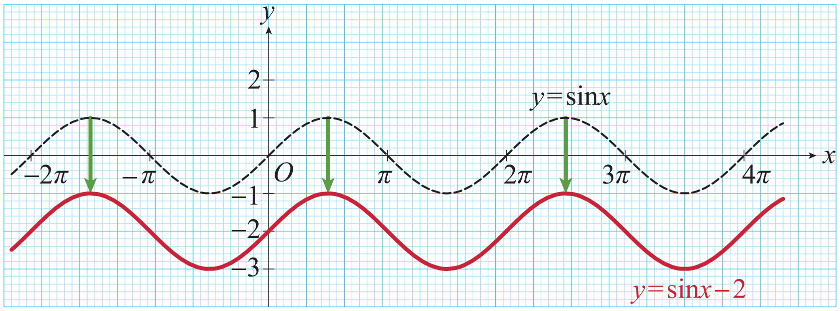
解

(1) 因為對每一個 x, $y=\sin x+1$ 的值總是比 $y=\sin x$ 多 1，所以 $y=\sin x+1$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形向上平移 1 單位得到，如下圖所示。



故函數 $y=\sin x+1$ 的週期是 2π，最大值為 2，最小值為 0。

(2) 因為對每一個 x, $y=\sin x-2$ 的值總是比 $y=\sin x$ 少 2，所以 $y=\sin x-2$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形向下平移 2 單位得到，如下圖所示。

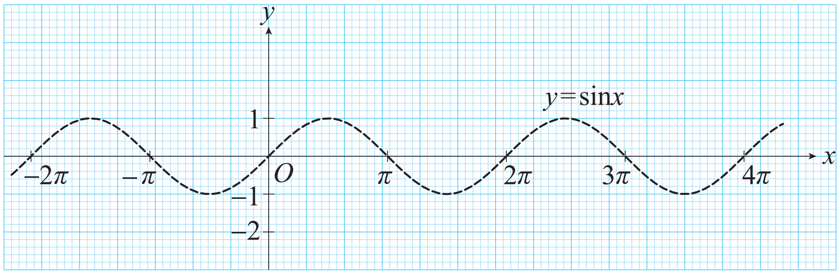


故函數 $y=\sin x-2$ 的週期是 2π，最大值為 -1，最小值為 -3。

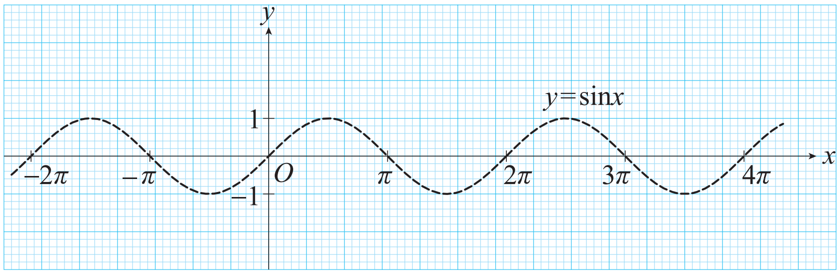
隨堂練習

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y=\sin x-1$。



(2) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}$。



接著來看水平左右平移的圖形。

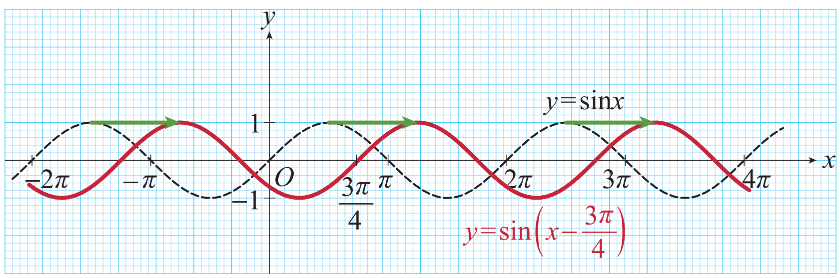
例題 3

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y=\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$。　　(2) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$。

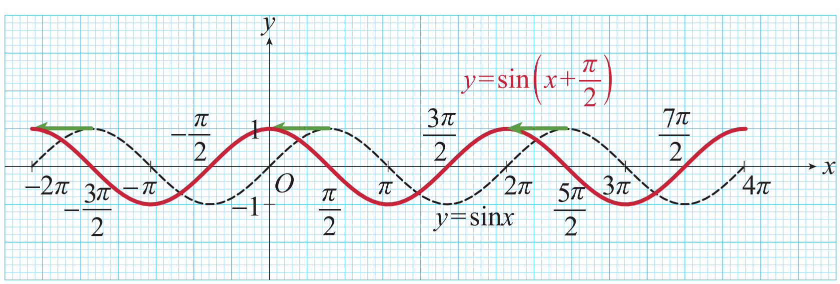
解

(1) 觀察 $x=\frac{3\pi}{4}$ 代入 $y=\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$ 的值與 $x=0$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；事實上，將 $x=t+\frac{3\pi}{4}$ 代入 $y=\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$ 的值與 $x=t$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；因此 $y=\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 單位得到，如下圖所示。



故函數 $y=\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$ 的週期是 2π，最大值為 1，最小值為 -1。

(2) 觀察 $x=-\frac{\pi}{2}$ 代入 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的值與 $x=0$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；事實上，將 $x=t-\frac{\pi}{2}$ 代入 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的值與 $x=t$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；因此 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往左平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位得到，如下圖所示。

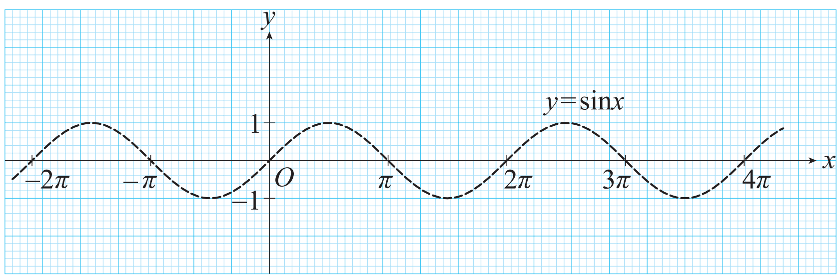


故函數 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的週期是 2π，最大值為 1，最小值為 -1。

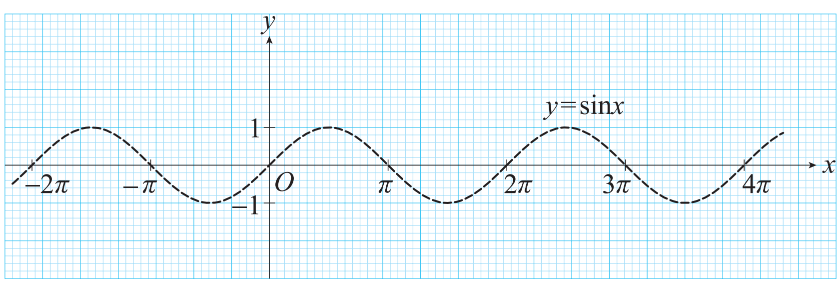
隨堂練習

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$。



(2) $y=\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$。



關於正弦函數圖形平移的概念，我們以流程圖表示如下。

$y=\sin x$ 的圖形 ⇄（往右平移 h 單位 / 往左平移 h 單位）⇄ $y=\sin(x-h)$ 的圖形 ⇄（向上平移 k 單位 / 向下平移 k 單位）⇄ $y=\sin(x-h)+k$ 的圖形

例如：函數 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 單位，向上平移 2 單位得到。

利用以上的流程圖來做一道正弦函數圖形平移的例題。

例題 4

問：$y=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$的圖形如何由 $y=\sin x$ 的圖形平移得到？

(1) 往左平移$\frac{3\pi}{4}$單位　(2) 往右平移$\frac{3\pi}{4}$單位　(3) 往左平移$\frac{5\pi}{4}$單位

(4) 往右平移$\frac{5\pi}{4}$單位 。

解

因為

$$y=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right),$$

所以 $y=\sin\left(x-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往右平移 $-\frac{3\pi}{4}$ 單位得到，也就是說，其圖形可由 $y=\sin x$

往左平移$\frac{3\pi}{4}$單位得到。

又因為同界角的三角比會相等，即

$$y=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}-2\pi\right)=\sin\left(x-\frac{5\pi}{4}\right),$$

所以 $y=\sin\left(x-\frac{5\pi}{4}\right)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形

往右平移$\frac{5\pi}{4}$單位得到。

故選 (1)(4)。

隨堂練習

問：$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$的圖形如何由 $y=\sin x$ 的圖形平移得到？

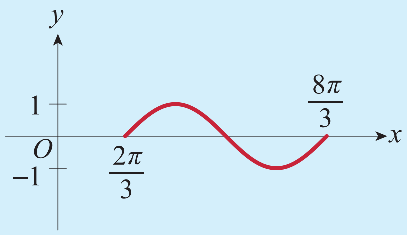
(1) 往左平移$\frac{\pi}{5}$單位　(2) 往右平移$\frac{\pi}{5}$單位　(3) 往左平移$\frac{9\pi}{5}$單位

(4) 往右平移$\frac{9\pi}{5}$單位。

來看一道從圖形判斷平移的例題。

例題 5

已知下圖為 $y=\sin(x-h)$ 一個週期的圖形，其中 $0<h<2\pi$，求 h 的值。



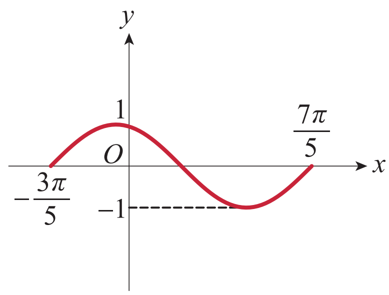
解

因為 $y=\sin(x-h)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往右平移 h 單位得到，所以從題目的圖形可知：

$$h=\frac{2\pi}{3}。$$

隨堂練習

已知下圖為 $y=\sin(x+h)$ 一個週期的圖形，其中 $0<h<2\pi$，求 h 的值。



丙 正弦函數圖形的伸縮

借助 $y=\sin x$ 的圖形及圖形伸縮的概念，來畫出與 $y=\sin x$ 相關的函數之圖形。

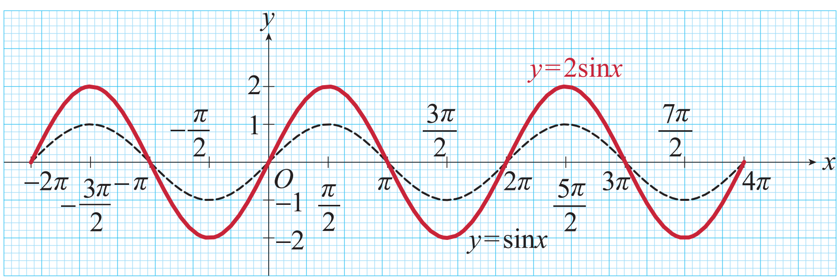
例題 6

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y=2\sin x$。　　　　(2) $y=\dfrac{1}{2}\sin x$。

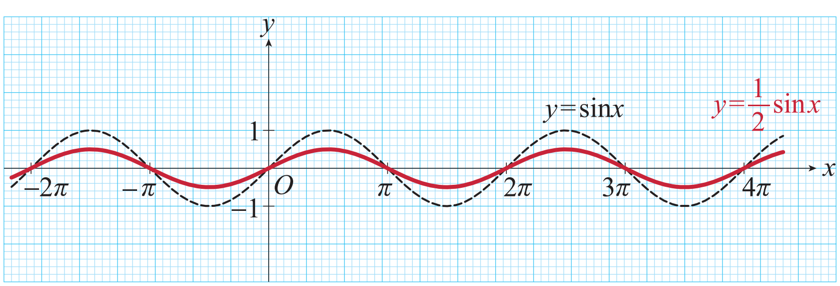
解

(1) 因為對每一個 x, $y=2\sin x$ 的值總是 $y=\sin x$ 的 2 倍，所以 $y=2\sin x$ 圖形振幅為 $y=\sin x$ 圖形振幅的 2 倍，如下圖所示。



故函數 $y=2\sin x$ 的週期是 2π，最大值為 2，最小值為 -2。

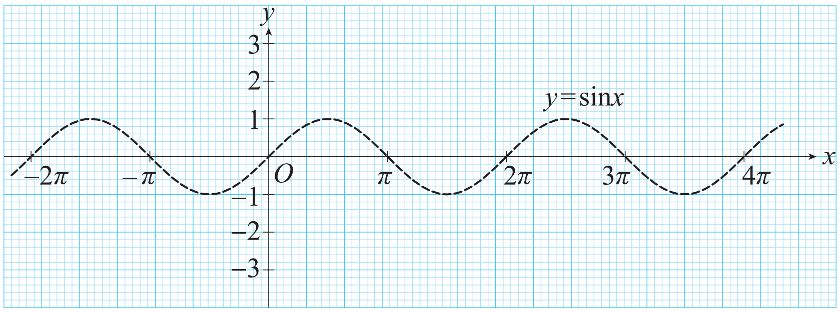
(2) 因為對每一個 x, $y=\dfrac{1}{2}\sin x$ 的值總是 $y=\sin x$ 的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，所以 $y=\dfrac{1}{2}\sin x$ 圖形振幅為 $y=\sin x$ 圖形振幅的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，如下圖所示。



故函數 $y=\dfrac{1}{2}\sin x$ 的週期是 2π，最大值為 $\dfrac{1}{2}$，最小值為 $-\dfrac{1}{2}$。

隨堂練習

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出 $y=3\sin x$ 的圖形，並求其週期、最大值及最小值。



再來看一題水平伸縮的圖形。

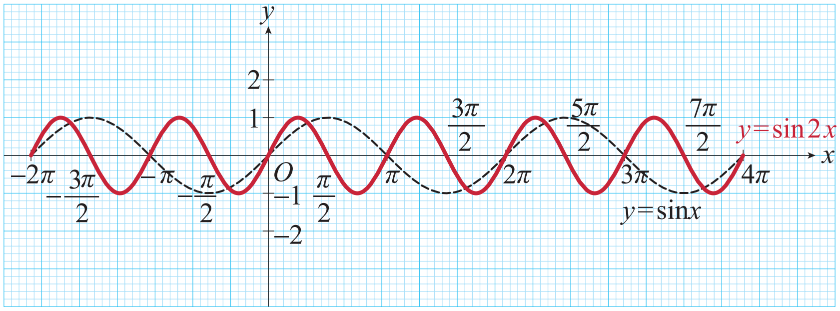
例題 7

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y=\sin 2x$。　　(2) $y=\sin\dfrac{x}{2}$。

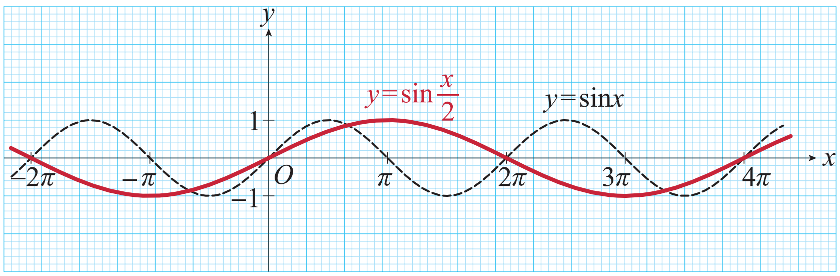
解

(1) 觀察 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 代入 $y=\sin 2x$ 的值與 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；事實上，將 $x=\dfrac{t}{2}$ 代入 $y=\sin 2x$ 的值與 $x=t$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；因此 $y=\sin 2x$ 的週期只有 $y=\sin x$ 的 $\dfrac{1}{2}$，如下圖所示。



故函數 $y=\sin 2x$ 的週期是 π，最大值為 1，最小值為 -1。

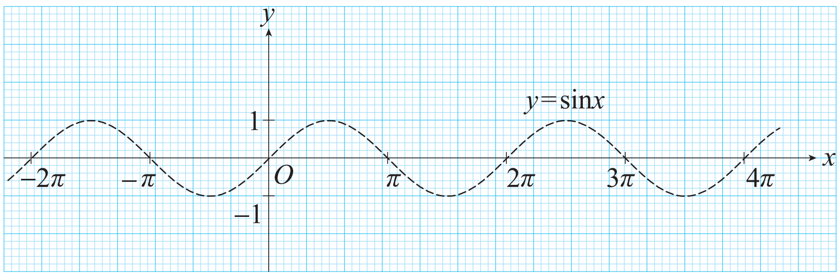
(2) 觀察 $x=\frac{\pi}{2}$ 代入 $y=\sin\frac{x}{2}$ 的值與 $x=\frac{\pi}{4}$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；事實上，將 $x=2t$ 代入 $y=\sin\frac{x}{2}$ 的值與 $x=t$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；因此 $y=\sin\frac{x}{2}$ 的週期為 $y=\sin x$ 的兩倍，如下圖所示。



故函數 $y=\sin\frac{x}{2}$ 的週期是 4π，最大值為 1，最小值為 -1。

隨堂練習

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出 $y=\sin 4x$ 的圖形，並求其週期、最大值及最小值。



關於正弦函數圖形伸縮的概念，我們以流程圖表示如下：

$y=\sin x$ 的圖形 → 振幅變為 a 倍 $(a>0)$ → $y=a\sin x$ 的圖形 → 週期變為 $\frac{1}{b}$ 倍 $(b>0)$ → $y=a\sin bx$ 的圖形

例如：函數 $y=3\sin 2x$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形鉛直伸縮為原來的 3 倍（振幅變為 3），水平伸縮為原來的 $\frac{1}{2}$ 倍（週期變為 $\frac{2\pi}{2}=\pi$）後得到。

利用以上的流程圖來做一道正弦函數圖形伸縮的例題。

例題 8

求 $y=4\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ 的週期、最大值及最小值。

解

根據圖形伸縮的概念，得函數 $y=4\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ 的

振幅為 4，週期為 $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$。

故最大值為 4，最小值為 -4。

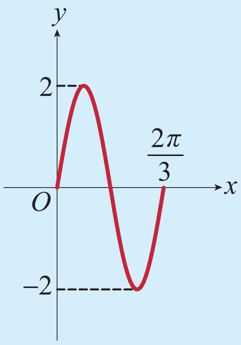
隨堂練習

已知 $y=\sin bx$ 的週期為 3π，其中 $b>0$，求 b 的值。

來看一道從圖形判斷伸縮的例題。

例題 9

已知右圖為 $y=a\sin bx$ 一個週期的圖形，其中 $a>0,b>0$，求 a 與 b 的值。



解

根據圖形伸縮的概念，得函數 $y=a\sin bx$ 的

$$\text{振幅為 } a\text{，週期為 } \frac{2\pi}{b}\text{；}$$

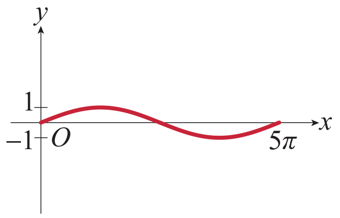
又由圖形可知：函數 $y=a\sin bx$ 的

$$\text{振幅為 } 2\text{，週期為 } \frac{2\pi}{3}\text{。}$$

故得 $a=2,b=3$。

隨堂練習

已知右圖為 $y=\sin bx$ 一個週期的圖形，其中 $b>0$，求 b 的值。



形如 $y=a\sin(bx+c)+d$（其中 a,b,c,d 均為常數）的函數圖形可經由 $y=\sin x$ 的圖形平移與伸縮得到；又因為伸縮可能會改變圖形的振幅與週期，所以在實際操作上，我們會先處理伸縮再進行平移。

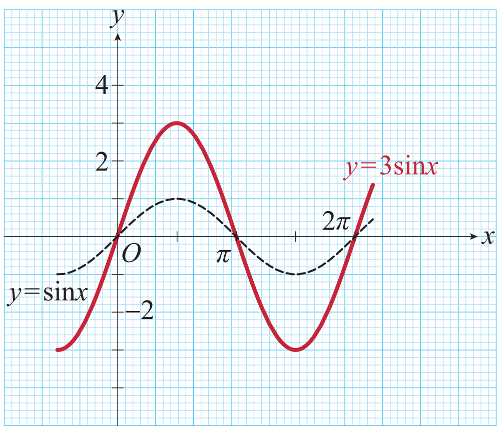
例題 10

(1) 利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出 $y=3\sin 2x$ 的圖形。

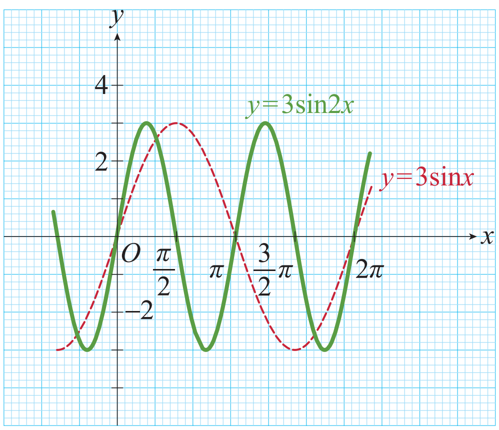
(2) 利用 (1)，畫出函數 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+1$ 的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

解

(1) 根據圖形伸縮的概念，依以下步驟畫出 $y=3\sin 2x$。



步驟 1：振幅變為 3 倍

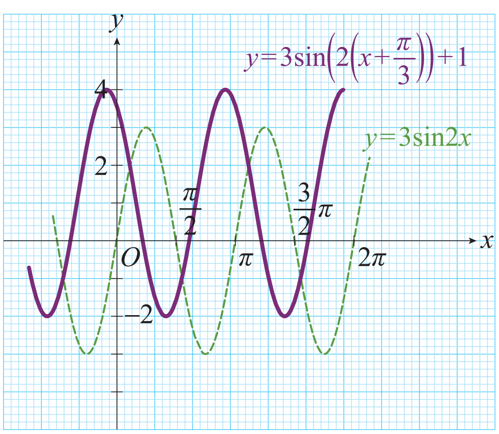


步驟 2：週期變為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(2) 將函數 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+1$ 改寫為

$$y=3\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)+1,$$

依據先伸縮再平移的步驟，可得函數 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+1$ 的圖形是由 $y=\sin x$ 先伸縮至 $y=3\sin 2x$ 後，再平移得到，如右圖所示。

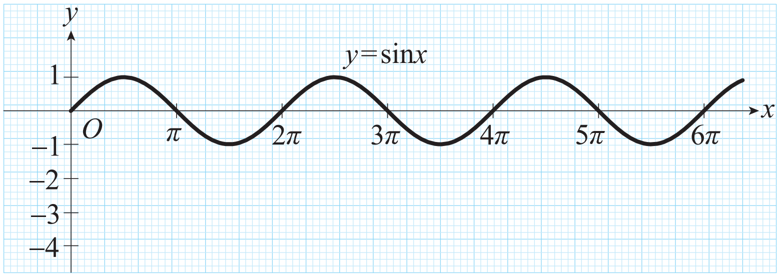


往左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 單位，向上平移 1 單位

故根據以上的圖形可知，函數 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+1$ 的週期是 π，最大值為 4，最小值為 -2。

隨堂練習

模仿例題 10 的做法，在下圖畫出函數 $y=2\sin\frac{x}{2}-2$ 的圖形，並求其週期、最大值及最小值。



接著介紹三角函數圖形的應用，先介紹應用函數圖形比較函數值的大小。

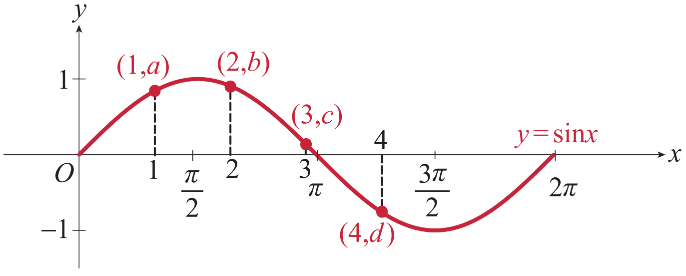
例題 11

利用 $y=\sin x$ 的圖形比較 $a=\sin 1$, $b=\sin 2$, $c=\sin 3$, $d=\sin 4$ 的大小。

解

由 $a=\sin 1$, $b=\sin 2$, $c=\sin 3$, $d=\sin 4$ 可知 $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$ 與 $(4, d)$ 四點分別落在 $y=\sin x$ 的圖形上。

因為 $\frac{\pi}{2}\approx 1.57$, $\pi\approx 3.14$, $\frac{3\pi}{2}\approx 4.71$，所以四點的約略位置如下圖所示。



又因為 $\frac{\pi}{2}\approx 1.57$，可知 2 比 1 更接近 $\frac{\pi}{2}$，所以點 $(2, b)$ 比點 $(1, a)$ 高，即 $b>a$。綜合可得

$$b>a>c>d。$$

隨堂練習

利用 $y=\sin x$ 的圖形比較 $a=\sin\dfrac{2\pi}{5}$, $b=\sin\dfrac{9\pi}{8}$, $c=\sin\dfrac{11\pi}{5}$ 的大小。

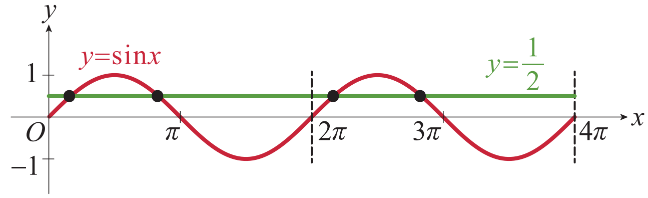
因為 $y=\sin x$ 為週期 2π 的週期函數，所以求方程式 $\sin x=k$（其中 k 為實數）所有的解，只要先求出在 $0\leq x\leq 2\pi$ 範圍內的解，再利用同界角的概念，即可得到所有的解。我們以底下例題來做說明。

例題 12

在 $0\leq x\leq 4\pi$ 的範圍內，求方程式 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 的解。

解

首先，因為「方程式 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 的解個數」與「$y=\sin x$ 與 $y=\dfrac{1}{2}$ 兩圖形的交點數」相等，所以在同一坐標平面上的 $0\leq x\leq 4\pi$ 範圍內，描繪 $y=\sin x$ 與 $y=\dfrac{1}{2}$ 的圖形，如下圖所示。



接著，由上圖可知：在 $0 \le x \le 2\pi$ 範圍內，$y=\sin x$ 與 $y=\frac{1}{2}$ 的圖形恰有兩個交點，即方程式 $\sin x=\frac{1}{2}$ 恰有兩個解。又因為 $\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$，所以這兩解即為 $\frac{\pi}{6}$ 與 $\frac{5\pi}{6}$。

最後，利用同界角的概念可推得在 $2\pi \le x \le 4\pi$ 範圍內的解為

$$\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6} \text{ 與 } \frac{5\pi}{6}+2\pi=\frac{17\pi}{6} \text{。}$$

故在 $0 \le x \le 4\pi$ 的範圍內，方程式 $\sin x=\frac{1}{2}$ 有 4 個解，分別為

$$x=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6} \text{。}$$

隨堂練習

在 $0 \le x \le 4\pi$ 範圍內，求方程式 $\sin x=-\frac{1}{2}$ 的解。

由例題 12 可知，利用函數的圖形可以判斷方程式解的個數；我們再來看一個較複雜的方程式例子。

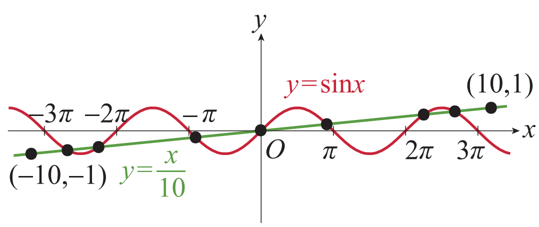
例題 13

(1) 在同一坐標平面上，於 $-10\leq x\leq 10$ 的範圍內，描繪 $y=\sin x$ 與 $y=\dfrac{x}{10}$ 的圖形。

(2) 利用 (1)，求方程式 $\sin x=\dfrac{x}{10}$ 解的個數。

解

(1) 在同一坐標平面上，描繪 $y=\sin x$ 與 $y=\dfrac{x}{10}$ 的圖形，如下圖所示。

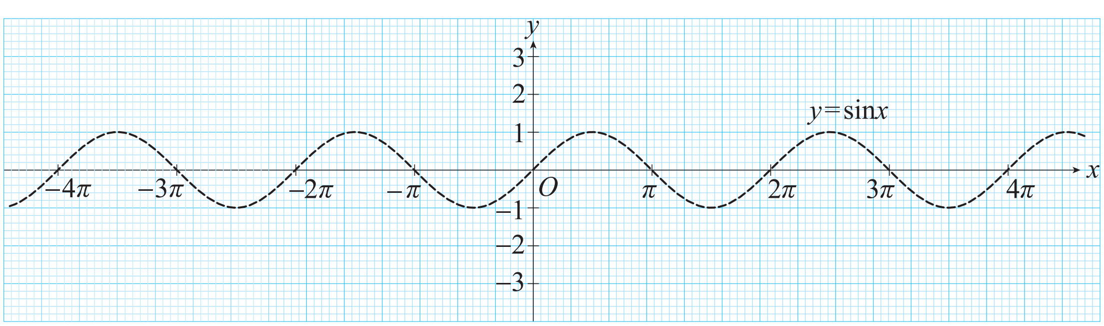


(2) 因為 $y=\sin x$ 的振幅為 1，所以只須考慮直線 $y=\dfrac{x}{10}$ 在 $-10\leq x\leq 10$ 範圍內的圖形即可；也就是說，$y=\sin x$ 與 $y=\dfrac{x}{10}$ 的交點僅會落在連接 $(-10,-1)$, $(10,1)$ 兩點的線段上。因此由圖形可知，$y=\sin x$ 與 $y=\dfrac{x}{10}$ 有 7 個交點。

故方程式 $\sin x=\dfrac{x}{10}$ 有 7 個解。

隨堂練習

利用 $y=\sin x$ 的圖形，求方程式 $12\sin x=x$ 解的個數。

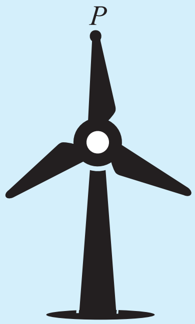


最後，來看一題有關風力發電機的實際例子。

例題 14

風力發電機某葉片的頂端為 P 點，開始運轉時，P 點恰在離地最高的位置上，x 秒後，P 點離地的高度 y（公尺）可表為

$$y=40\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)+67。$$



問：

(1) P 點離地最高與最接近地面分別為多少公尺？

(2) 此發電機的葉片轉一圈需幾秒？

解

(1) 因為當 $x=0$ 時，$y=40\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)+67$ 有最大值

$$40\sin\frac{\pi}{2}+67=107，$$

所以 P 點離地最高為 107 公尺。

因為當 $x=2$ 時，$y=40\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)+67$ 有最小值

$$40\sin\frac{3\pi}{2}+67=-40+67=27，$$

所以 P 點最接近地面為 27 公尺。

(2) 根據圖形平移與伸縮的概念，$y=40\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)+67$ 之週期為

$$2\pi\div\frac{\pi}{2}=2\pi\times\frac{2}{\pi}=4。$$

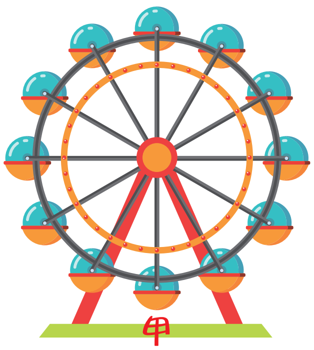
故此發電機的葉片轉一圈需 4 秒。

隨堂練習

遊樂區中有一圓形摩天輪，逆時針方向運轉一圈需時 15 分鐘。當摩天輪開始運轉時，甲車廂恰在離地最近的位置上，x 分鐘後，甲車廂離地的高度 y（公尺）可表為

$$y=20\sin\left(bx-\frac{\pi}{2}\right)+22,$$

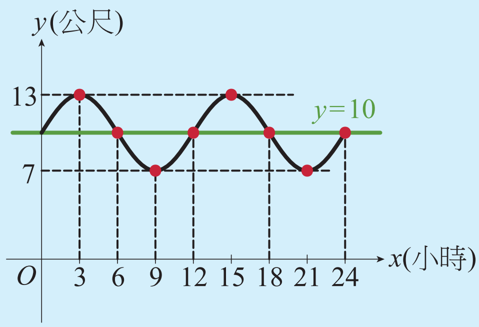
其中 b 是正數。試求 b 的值。



最後，來看一題生活實例。

例題 15

海水受到月球引力的影響會發生漲落的潮汐現象。假設下圖是某港口在一天 24 小時海水漲落的水深記錄圖。



經過長期的觀測得知，上圖的水深 y（公尺）與時間 x（小時）的關係可表為

$$y=a\sin bx+c,$$

其中 a, b, c 都是正數。根據上圖求 a, b, c 的值。

解

根據圖形平移與伸縮的概念，函數 $y=a\sin bx+c$ 的圖形

之振幅為 a，週期為 $\frac{2\pi}{b}$，且向上平移 c 單位。

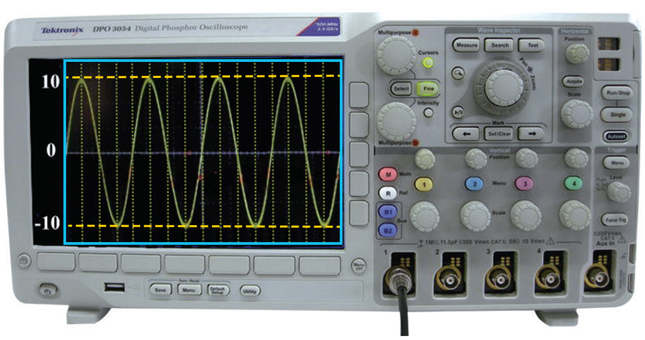
又由圖形可知：

振幅為 3，週期為 12，且向上平移 10 單位。

故解得 $a=3,\ b=\frac{\pi}{6},\ c=10$。

隨堂練習

下圖是使用示波器觀測某交流電發電機的電壓 v（伏特）與時間 t（秒）所形成的波形，其中橫軸每格為 0.025 秒。



上圖的電壓 v 與時間 t 的關係可表為

$$v=a\sin bt,$$

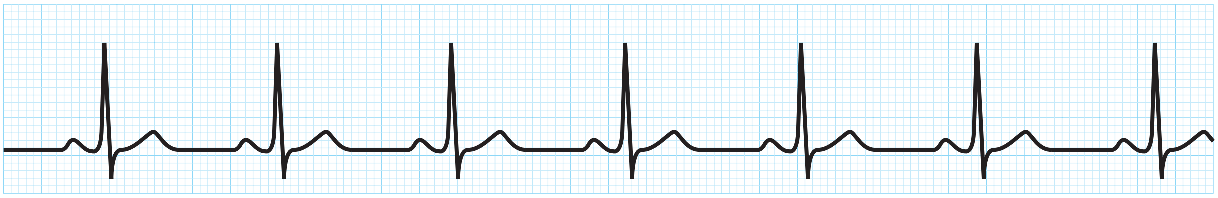
其中 a 與 b 都是正數。

(1) 求 a 與 b 的值。

(2) 已知每一週期發電機的線圈會轉一圈，問：每秒鐘線圈轉的圈數為多少？

看見數學

除了本單元介紹的正弦函數之外，在生活中可以常常見到週期性的圖形，例如圖 8 的心電圖，從重複的圖形中，可以反映出心臟跳動的規律，是醫療上常見的診療技術。



▲圖8

週期性圖形也常常應用於藝術作品，例如原住民的圖騰，不僅在頭飾或服裝上常看見（如圖 9(a) 所示）；在陶藝或工藝的作品上（如圖 9(b)(c) 所示），也可以看到其蹤跡。

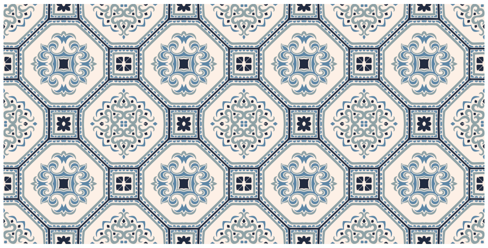
(a)

(b)

(c)

▲圖9

早年臺灣的房子也會在馬賽克磁磚或窗花上看見週期性的圖形，如圖 10(a)(b) 所示。



(a)

(b)

▲圖10

2 習題

觀念澄清

關於函數 $y=2\sin 3x$，下列敘述對的打「✓」

□ (1) 最大值為 2。

□ (2) 週期為 $\dfrac{2\pi}{3}$。

□ (3) 圖形對稱於直線 $x=\dfrac{\pi}{6}$。

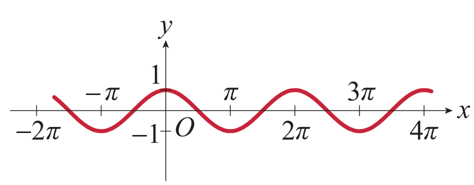
□ (4) 圖形對稱於原點。

□ (5) 與 $y=1$ 的圖形有無限多個交點。

一、基礎題

1 下圖可以是哪個函數的圖形？(多選)

(1) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$　(2) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$　(3) $y=\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)$　(4) $y=\sin x+1$。



2 求下列各函數的週期、最大值及最小值：

(1) $y=3\sin x$。 (2) $y=\sin\frac{x}{3}$。 (3) $y=5\sin 3x$。

3 下列哪些函數經過左右或上下平移後會與 $y=\sin x$ 的圖形重合

(1) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ (2) $y=\sin 2x$ (3) $y=5\sin x$ (4) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$。

4 設函數 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往右平移 h 單位後得到。

選出所有 h 可能的值。

(1) $-\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{9\pi}{4}$ (4) $-\frac{7\pi}{4}$。

5 求下列各函數的週期、最大值及最小值：

(1) $y=4\sin x+2$。 (2) $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$。 (3) $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1$。

6 利用 $y=\sin x$ 的圖形比較 $a=\sin\frac{\pi}{5}$，$b=\sin\frac{3\pi}{5}$，$c=\sin\frac{7\pi}{5}$ 的大小。

7 在 $-2\pi\leq x\leq 2\pi$ 範圍內，求方程式 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解。

8 求方程式 $\sin x=-\frac{x}{12}$ 解的個數。

9 已知電流強度 I（安培）與時間 t（秒）的關係可表為

$$I=10\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{6}\right)。$$

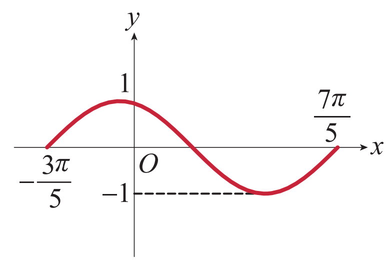
(1) 求電流強度 I 的週期。

(2) 求電流強度 I 的最大值與最小值。

(3) 當 $t=\frac{1}{40}$ 秒時，電流強度 I 為多少安培？

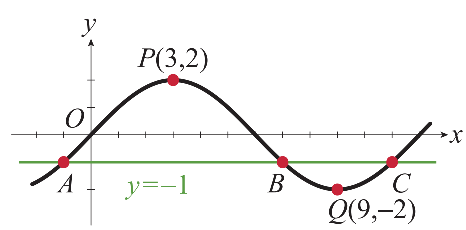
二、進階題

10 已知右圖為 $y=\sin(x-h)$ 一個週期的圖形，其中 $0<h<2\pi$，求 h 的值。



11 在 $0\leq x\leq 2\pi$ 範圍內，方程式 $\sin x=-\frac{1}{3}$ 有多少個解？又這些解的總和為何？

12 已知 $a>0$, $b>0$，函數 $y=a\sin bx$ 的圖形通過最高點 $P(3, 2)$ 及最低點 $Q(9, -2)$，且與直線 $y=-1$ 交於 A, B, C 三點，如右圖所示，求



(1) a, b 的值。

(2) $\overline{AB}$ 的長度。

(3) $\overline{BC}$ 的長度。