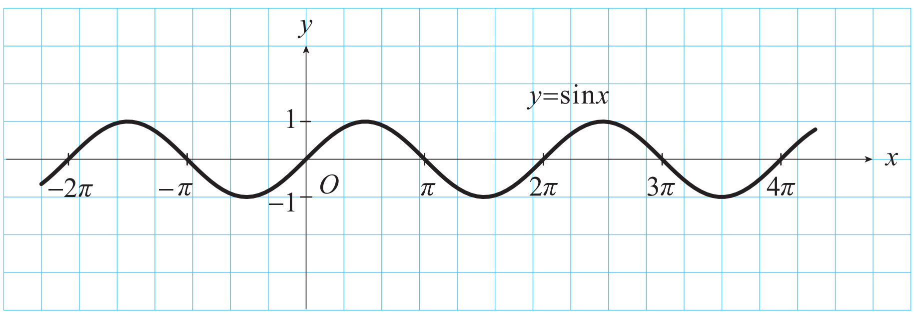
2 週期性數學模型

主題一 正弦函數的圖形 （搭配課本 P.20～P.23）

1. 三角函數：在各三角比都有定義的情形下，給定一個廣義角 x（弳），$\sin x$，$\cos x$ 與 $\tan x$ 的值都隨之唯一確定；因此它們都是 x 的函數，依序稱為**正弦函數**，**餘弦函數**與**正切函數**。
2. 正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形：

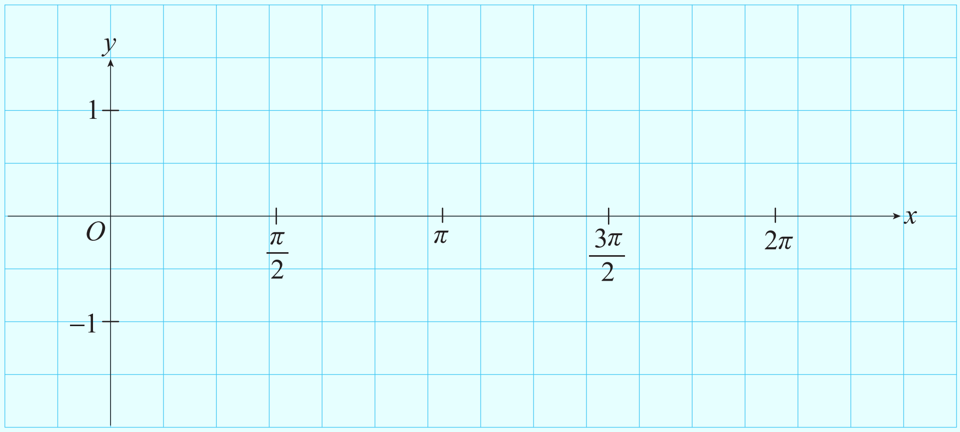


3. 週期函數：當函數 $y=f(x)$ 在 x 軸的方向每隔 p 單位就重複一段相同的圖形時（即可找到正數 p，使得 $f(x+p)=f(x)$ 恆成立），稱函數 $f(x)$ 為**週期函數**。若滿足上述性質的最小正數 p 存在，則稱此週期函數的週期為 p。
4. 在函數關係中，x 取值的範圍稱作該函數的**定義域**，而其對應值 y 的範圍稱作該函數的值域。
5. 正弦函數的特性：
   (1) 定義域：因為對任意實數 x，$\sin x$ 都有意義，所以其定義域為全體實數 $\mathbb{R}$。
   (2) 值　域：因為正弦函數的值涵蓋每個在 -1 與 1 之間的實數，所以其值域為 $\{y\in\mathbb{R}\,|\,-1\le y\le 1\}$。
   (3) 週　期：由圖形知其週期為 2π。
   (4) 振　幅：由圖形發現正弦函數圖形在 x 軸上方或下方擺動的最大距離為 1；此時稱正弦函數 $y=\sin x$ 的振幅為 1。
   (5) 對稱性：
   ① 觀察正弦函數的圖形，可得圖形對稱於通過最高點或最低點的鉛直線（例如直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $x=\dfrac{3\pi}{2}$）。
   ② 由換算公式 $\sin(-x)=-\sin x$ 知其圖形對稱於原點。

例題 1

【配合課本內文】

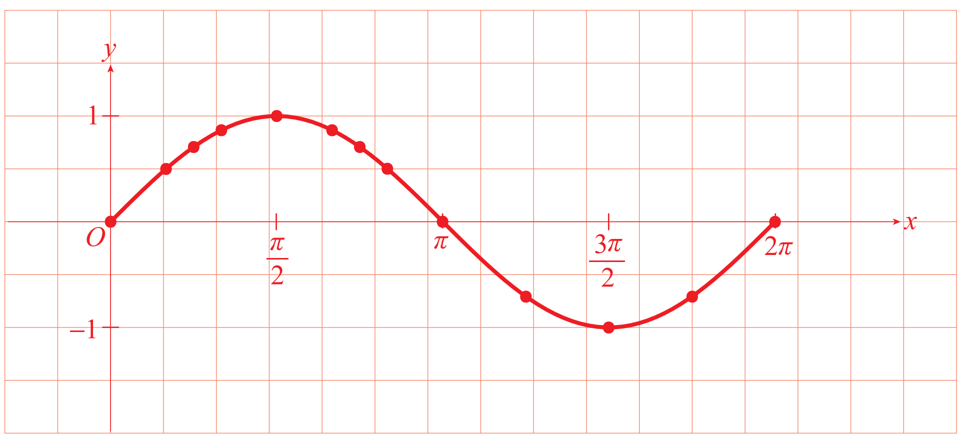
描繪正弦函數 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形。



解▸ 首先列出一些滿足 $y=\sin x$ 的點 (x,y)。

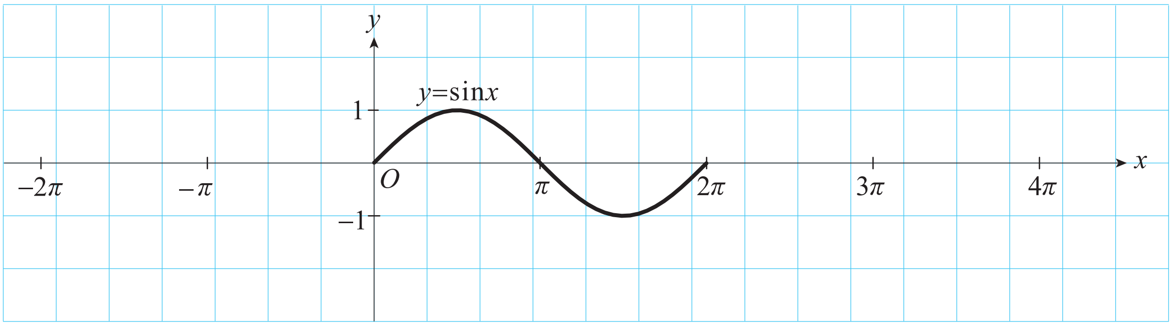
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

接著將表列所對應的點逐一畫在坐標平面上，最後再用平滑曲線把這些點連接起來，而得下圖，即為 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形。

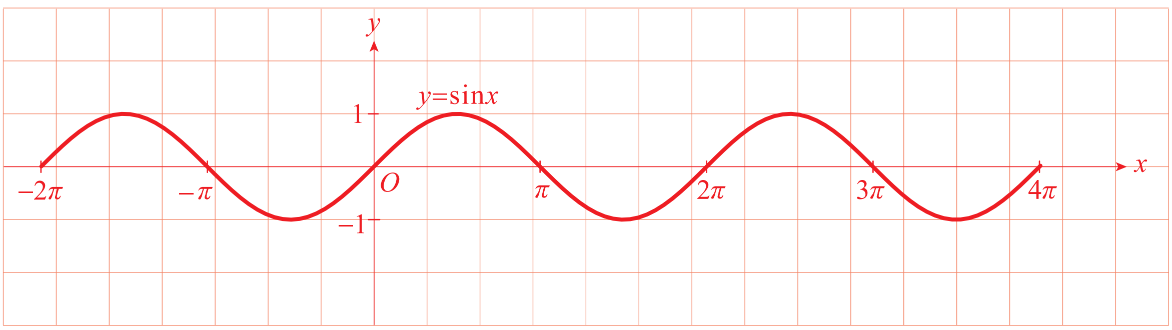


演練 1

利用 $\sin(2\pi+x)=\sin x$ 與 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形，描繪 $y=\sin x$ 在 $-2\pi\le x\le 4\pi$ 上的圖形。



解▸ 由 $\sin(2\pi+x)=\sin x$ 可知當變數 x 的值增加 2π 時，正弦函數的值會重複的出現；
因此，$y=\sin x$ 在 $2\pi\le x\le 4\pi$ 與 $-2\pi\le x\le 0$ 上的圖形與在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形完全相同。
也就是說，只要把 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上所畫的圖形複製並逐次向右及向左平移 2π 單位，就可得到 $y=\sin x$ 在 $-2\pi\le x\le 4\pi$ 上的圖形。

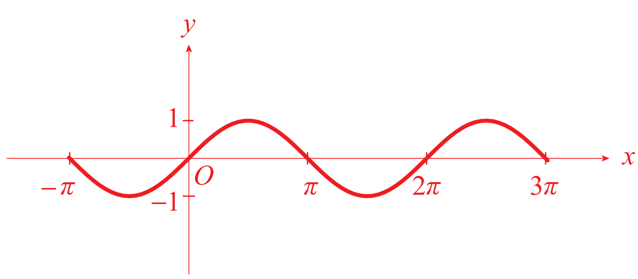


例題 2

【配合課本例 1】

已知 $-\pi\le x\le 3\pi$，觀察 $y=\sin x$ 的圖形，求滿足 $\sin x<0$ 的 x 之範圍。

解▸ 因為正弦函數在範圍 $-\pi\le x\le 3\pi$ 中的圖形如下。

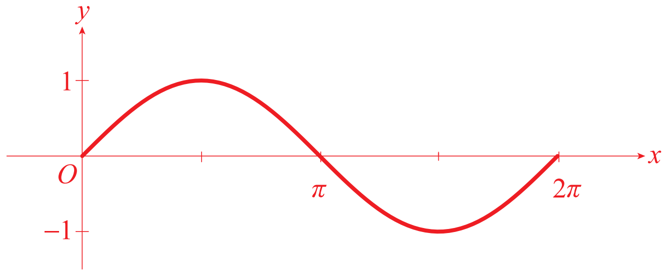


所以由圖可知，$-\pi<x<0$ 或 $\pi<x<2\pi$。

演練 2

已知 $0 \le x \le 2\pi$，觀察 $y=\sin x$ 的圖形，求滿足 $\sin x \ge 0$ 的 x 之範圍。

解▶ 因為正弦函數在範圍 $0 \le x \le 2\pi$ 中的圖形如下。



所以由圖可知，$0 \le x \le \pi$。

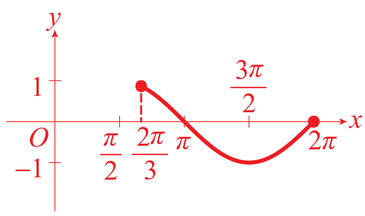
例題 3 【常考題】

(1)求 $y=\sin x$ 的最大值與最小值。

(2)已知 $\frac{2\pi}{3} \le x \le 2\pi$，觀察 $y=\sin x$ 的圖形，求 $y=\sin x$ 的最大值與最小值。

解▶ (1) 因為 $y=\sin x$ 的振幅為 1，所以最大值為 1，最小值為 -1。

(2) $y=\sin x$ 在範圍 $\frac{2\pi}{3} \le x \le 2\pi$ 中的圖形如下。

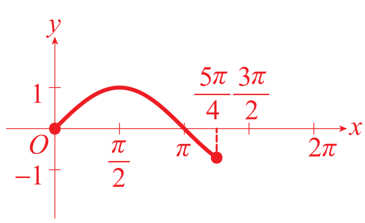


由圖可知，最大值為 $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，最小值為 -1。

演練 3 - 1

已知 $0 \le x \le \frac{5\pi}{4}$，觀察 $y=\sin x$ 的圖形，求 $y=\sin x$ 的最大值與最小值。

解▶ $y=\sin x$ 在範圍 $0 \le x \le \frac{5\pi}{4}$ 中的圖形如下。

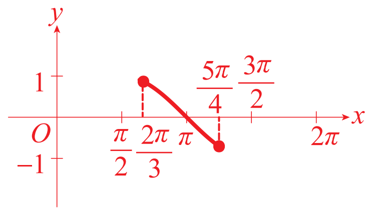


由圖可知，最大值為 1，最小值為 $\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$。

演練 3 - 2

已知 $\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{5\pi}{4}$，觀察 $y=\sin x$ 的圖形，求 $y=\sin x$ 的最大值與最小值。

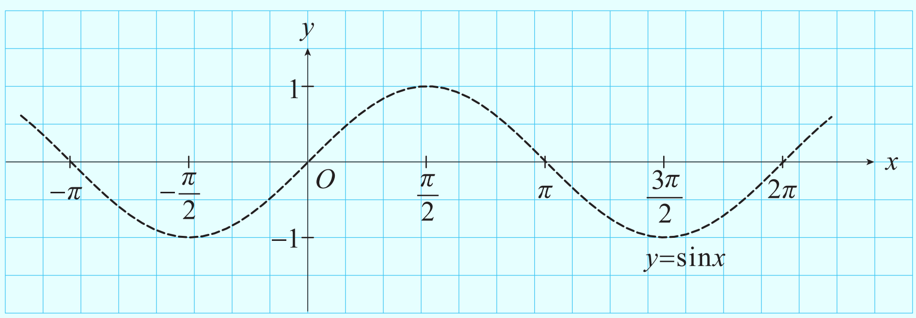
解▸ $y=\sin x$ 在範圍 $\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{5\pi}{4}$ 中的圖形如下。



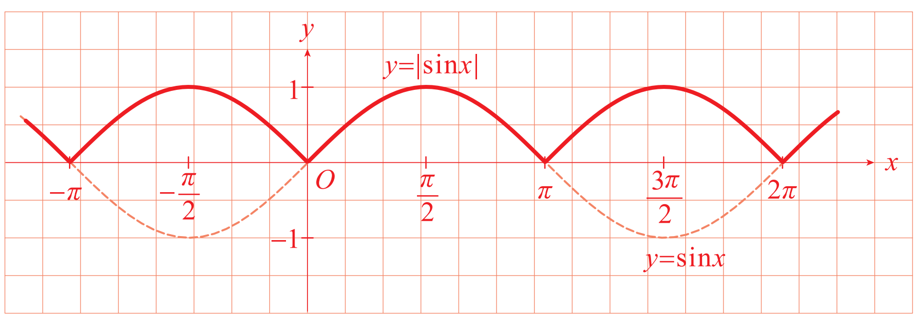
由圖可知，最大值為 $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，最小值為 $\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$。

例題 4 【常考題】

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出 $y=|\sin x|$ 的圖形，並求其週期、最大值及最小值。



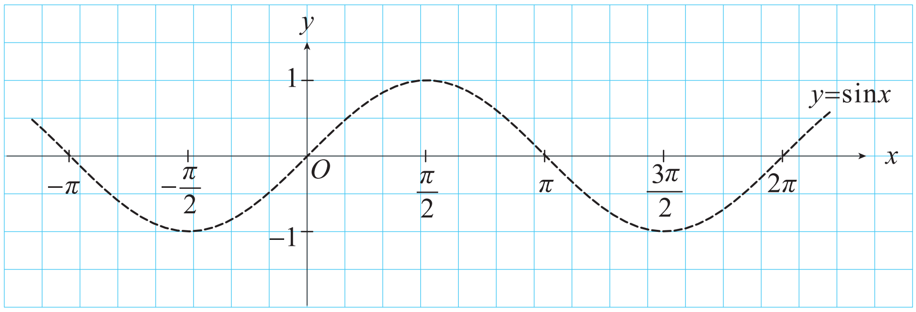
解▸ 因為 $y=|\sin x|=\begin{cases}\sin x，若 \sin x \ge 0\\ -\sin x，若 \sin x < 0\end{cases}$，所以其圖形如下。



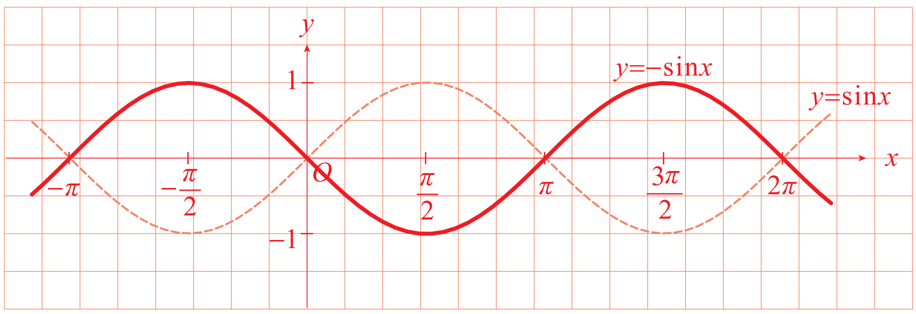
故函數 $y=|\sin x|$ 的週期是 π，最大值為 1，最小值為 0。

演練 4

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出 $y=-\sin x$ 的圖形，並求其週期、最大值及最小值。



解▶ 因為對每一個 x， $y=-\sin x$ 的值總是 $y=\sin x$ 的相反數，
所以 $y=-\sin x$ 的圖形與 $y=\sin x$ 的圖形對稱 x 軸，如下圖所示。



故函數 $y=-\sin x$ 的週期是 2π ，最大值為 1，最小值為 -1 。

特別說明： $y=-\sin x$ 的圖形與 $y=\sin x$ 的圖形除了對稱 x 軸之外，
也對稱 y 軸，也可由 $y=\sin x$ 的圖形向右平移 π 單位得到。

主題二　正弦函數圖形的平移（搭配課本 P.24～P.29）

1. 關於正弦函數圖形平移的概念，以流程圖表示如下。

$y=\sin x$ 的圖形 ⇄（往右平移 h 單位 → ／ ← 往左平移 h 單位）⇄ $y=\sin(x-h)$ 的圖形 ⇄（向上平移 k 單位 → ／ ← 向下平移 k 單位）⇄ $y=\sin(x-h)+k$ 的圖形

說例 (1) 函數 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 單位，向上平移 2 單位得到。

(2) 函數 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-3$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 單位，向下平移 3 單位得到。

2. 正弦函數圖形平移不改變圖形的週期與振幅，但可能會改變最大值與最小值。

說例 函數 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right)+1$ 的週期為 2π ，振幅為 1，最大值為 $1+1=2$ ，最小值為 $-1+1=0$ 。

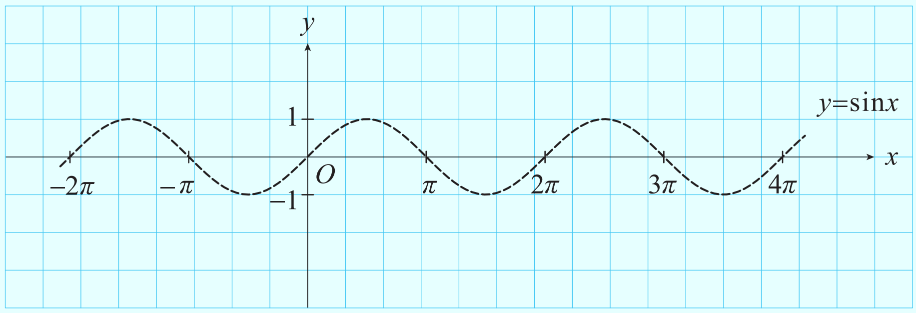
2

例題 5

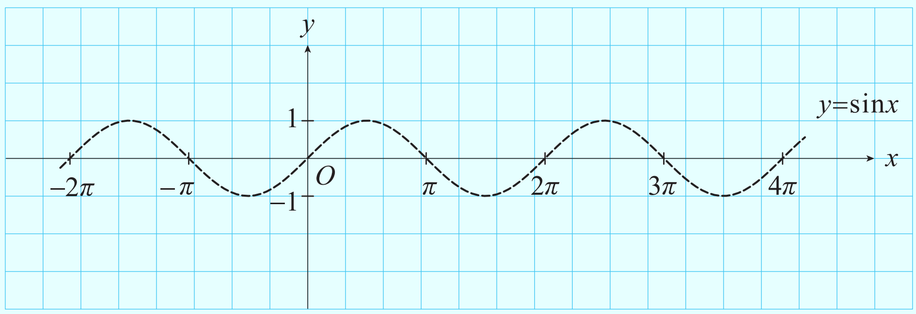
【配合課本例 2】

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

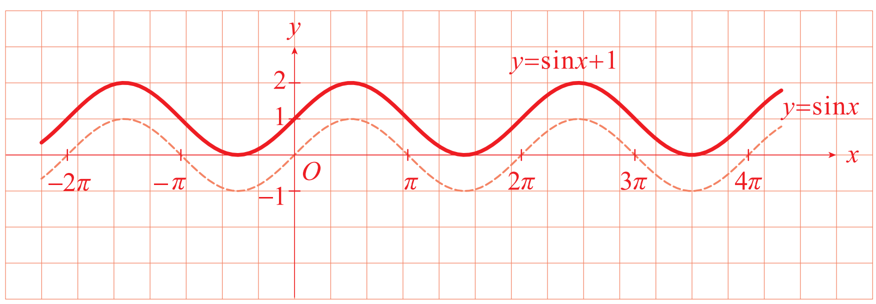
(1) $y=\sin x+1$ 。



(2) $y=\sin x-\dfrac{1}{2}$ 。

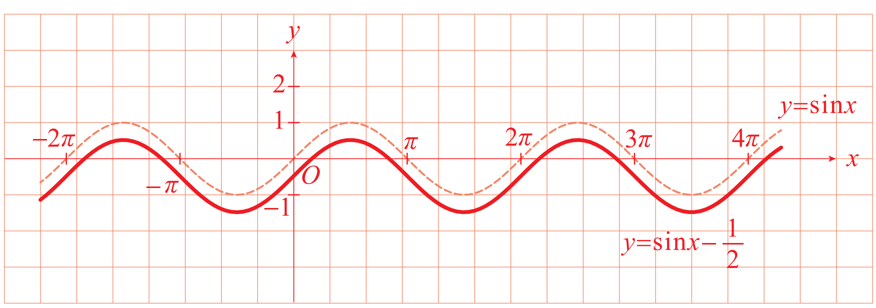


解▶ (1) 因為對每一個 x，$y=\sin x+1$ 的值總是比 $y=\sin x$ 多 1，所以 $y=\sin x+1$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形向上平移1單位得到，如下圖所示。



故函數 $y=\sin x+1$ 的週期是 2π，最大值為 2，最小值為 0。

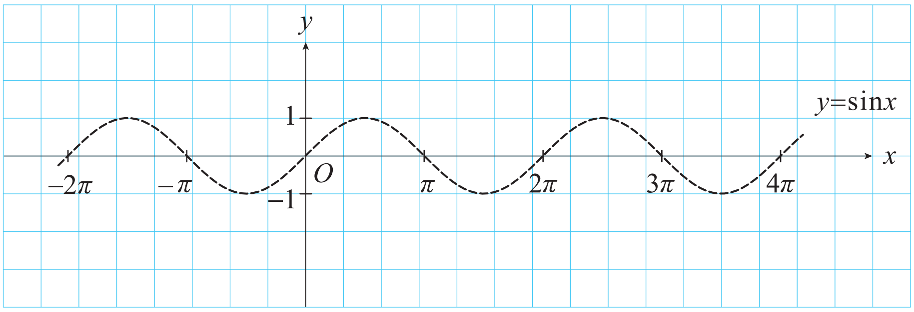
(2) 因為對每一個 x，$y=\sin x-\dfrac{1}{2}$ 的值總是比 $y=\sin x$ 少 $\dfrac{1}{2}$，所以 $y=\sin x-\dfrac{1}{2}$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形向下平移 $\dfrac{1}{2}$ 單位得到，如下圖所示。



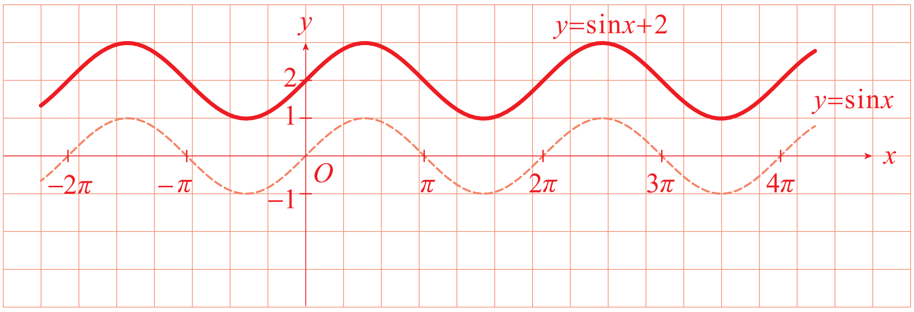
故函數 $y=\sin x-\dfrac{1}{2}$ 的週期是 2π，最大值為 $\dfrac{1}{2}$，最小值為 $-\dfrac{3}{2}$。

演練 5 - 1

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出 $y=\sin x+2$ 的圖形，並求其週期、最大值及最小值。



解▸ 將 $y=\sin x$ 的圖形向上平移 2 單位就可得到 $y=\sin x+2$ 的圖形，如下圖所示。



故函數 $y=\sin x+2$ 的週期是 2π，最大值為 3，最小值為 1。

演練 5 - 2

下列哪一個選項跟 x 軸有交點？

(1) $y=\sin x+\frac{1}{3}$　(2) $y=\sin x+3$　(3) $y=\sin x-\pi$　(4) $y=\sin x-\sqrt{2}$。

解▸ 因為各選項的最大值與最小值如下表所示。

	$y=\sin x+\frac{1}{3}$	$y=\sin x+3$	$y=\sin x-\pi$	$y=\sin x-\sqrt{2}$
最大值	$\frac{4}{3}>0$	4	$1-\pi<0$	$1-\sqrt{2}<0$
最小值	$-\frac{2}{3}<0$	$2>0$	$-1-\pi$	$-1-\sqrt{2}$

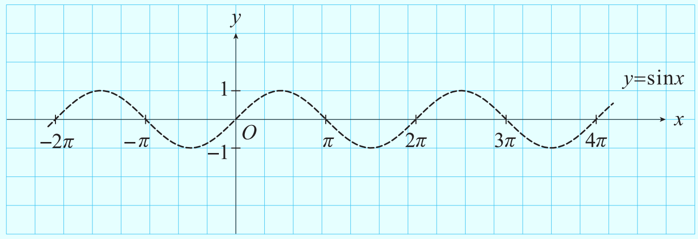
故選(1)。

例題 6

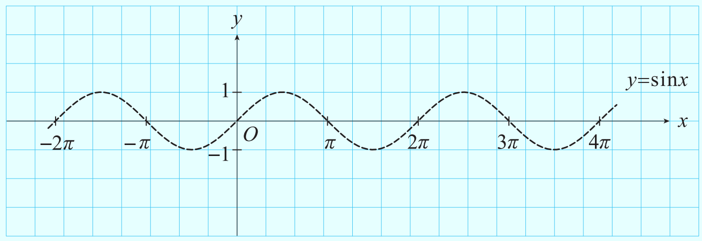
【配合課本例 3】

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$。



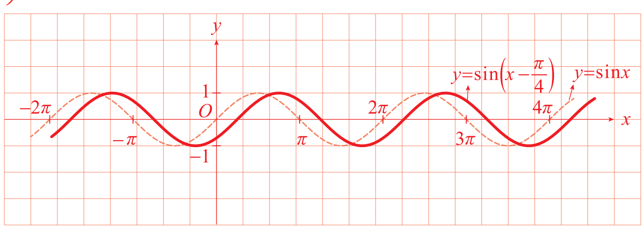
(2) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$。



解▶ (1) 觀察 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 代入 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值與 $x=0$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；

事實上，將 $x=t+\dfrac{\pi}{4}$ 代入 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值與 $x=t$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；

因此 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 單位得到，如下圖所示。

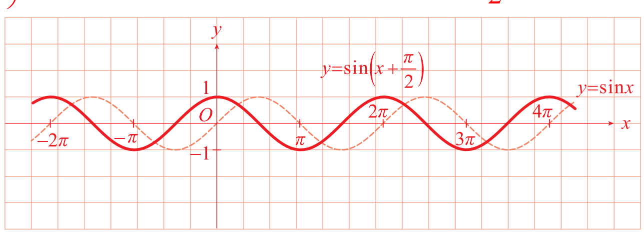


故函數 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的週期是 2π，最大值為 1，最小值為 -1。

(2) 觀察 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 代入 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的值與 $x=0$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；

事實上，將 $x=t-\dfrac{\pi}{2}$ 代入 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的值與 $x=t$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；

因此 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 單位得到，如下圖所示。



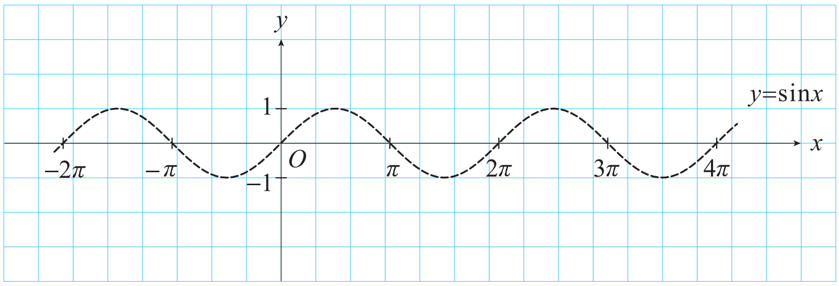
故函數 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的週期是 2π，最大值為 1，最小值為 -1。

特別注意：利用換算公式，可得 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$，

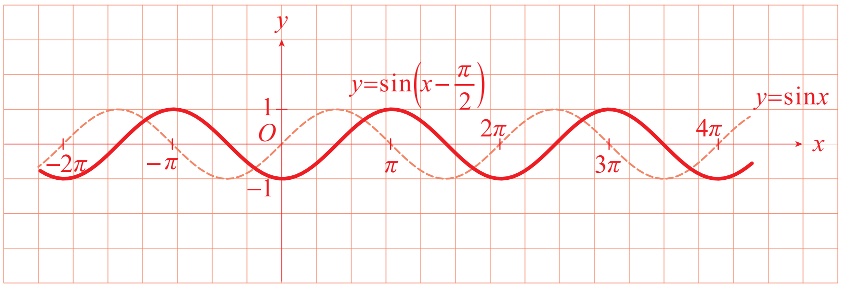
所以 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的圖形亦為 $y=\cos x$ 的圖形。

演練 6

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形，並求其週期、最大值及最小值。



解▸ 將 $y=\sin x$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位就可得到 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形，如下圖所示。



故函數 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的週期是 2π ，最大值為 1，最小值為 -1 。

例題 7 【配合課本例 4】

問： $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的圖形如何由 $y=\sin x$ 的圖形平移得到？

(1)往左平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位 (2)往右平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位 (3)往左平移 $\frac{7\pi}{4}$ 單位 (4)往右平移 $\frac{7\pi}{4}$ 單位。

解▸ 因為 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ，

所以 $y=\sin\left(x-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往右平移 $-\frac{\pi}{4}$ 單位得到，

也就是說，其圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往左平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位得到。

又因為同界角的三角比會相等，

即 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}-2\pi\right)=\sin\left(x-\frac{7\pi}{4}\right)$ ，

所以 $y=\sin\left(x-\frac{7\pi}{4}\right)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往右平移 $\frac{7\pi}{4}$ 單位得到。

故選(1)(4)。

演練 7 - 1

設函數 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往右平移 h 單位後得到，且 $0<h<2\pi$，求 h 的值。

解▶ 因為同界角的三角比會相等，即 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}-2\pi\right)=\sin\left(x-\frac{11\pi}{6}\right)$，

所以 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往右平移 $\frac{11\pi}{6}$ 單位得到。故 $h=\frac{11\pi}{6}$。

演練 7 - 2

設函數 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往左平移 h 單位後得到，且 $0<h<2\pi$，求 h 的值。

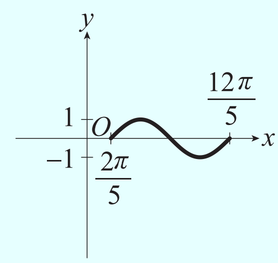
解▶ 因為同界角的三角比會相等，即 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\sin\left(x+\frac{5\pi}{3}\right)$，

所以 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往左平移 $\frac{5\pi}{3}$ 單位得到。故 $h=\frac{5\pi}{3}$。

例題 8

【配合課本例 5】

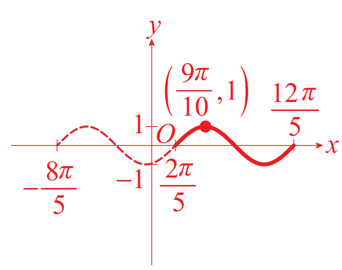
已知右圖為 $y=\sin(x+h)$ 一個週期的圖形，其中 $0<h<2\pi$，求 h 的值。



解▶ 利用正弦函數的週期性，畫圖如右。

因為 $y=\sin(x+h)$ 的圖形為 $y=\sin x$ 的圖形往左平移 h 單位，

所以由圖形可知：$h=\frac{8\pi}{5}$。



（另解）由圖可知，點 $\left(\frac{9\pi}{10},1\right)$ 過 $y=\sin(x+h)$，

將 $\left(\frac{9\pi}{10},1\right)$ 代入 $y=\sin(x+h)$，可得 $1=\sin\left(\frac{9\pi}{10}+h\right)$，

解得 h 為 $-\frac{2\pi}{5}$ 或其同界角（即 $-\frac{2\pi}{5}+2k\pi$，k 為整數）。

又因為 $0<h<2\pi$，所以 $h=-\frac{2\pi}{5}+2\pi=\frac{8\pi}{5}$。

特別注意：本題如果用點 $\left(\frac{2\pi}{5},0\right)$ 代入 $y=\sin(x+h)$，

會解得 h 為 $-\frac{2\pi}{5}+2k\pi$ 或 $\frac{3\pi}{5}+2k\pi$，k 為整數，

但是搭配圖形說明才會知道 $h=\frac{3\pi}{5}+2k\pi$ 不合。

演練 8

若例題 8 的圖為 $y=\sin(x-h)$ 一個週期的圖形，其中 $0<h<2\pi$，求 h 的值。

解▸ 因為 $y=\sin(x-h)$ 的圖形為 $y=\sin x$ 的圖形往右平移 h 單位，所以由圖形可知：$h=\frac{2\pi}{5}$。

（另解）將圖形上的點 $\left(\frac{9\pi}{10},1\right)$ 代入 $y=\sin(x-h)$，可得 $1=\sin\left(\frac{9\pi}{10}-h\right)$，

解得 h 為 $\frac{2\pi}{5}$ 或其同界角（即 $\frac{2\pi}{5}+2k\pi$，k 為整數）。

又因為 $0<h<2\pi$，所以 $h=\frac{2\pi}{5}$。

主題三　正弦函數圖形的伸縮（搭配課本 P.30～P.34）

1. 關於正弦函數圖形伸縮的概念，以流程圖表示如下。

$y=\sin x$ 的圖形 → 振幅變為 a 倍（$a>0$）→ $y=a\sin x$ 的圖形 → 週期變為 $\frac{1}{b}$ 倍（$b>0$）→ $y=a\sin bx$ 的圖形

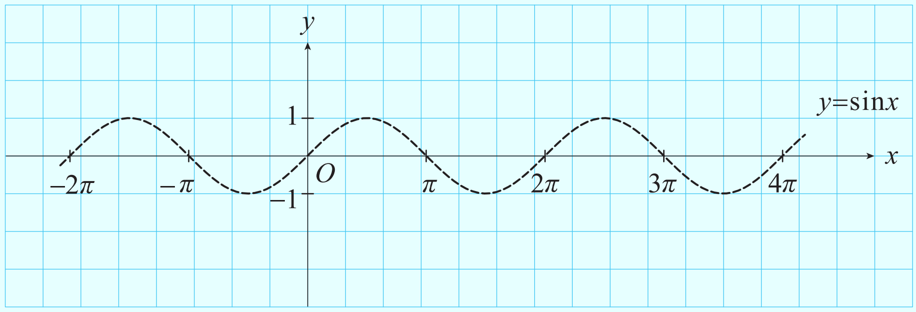
說例 函數 $y=2\sin 3x$ 的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形鉛直伸縮為原來的 2 倍(振幅變為 2)，水平伸縮為原來的 $\frac{1}{3}$ 倍（週期變為 $\frac{2\pi}{3}$）後得到。

例題 9

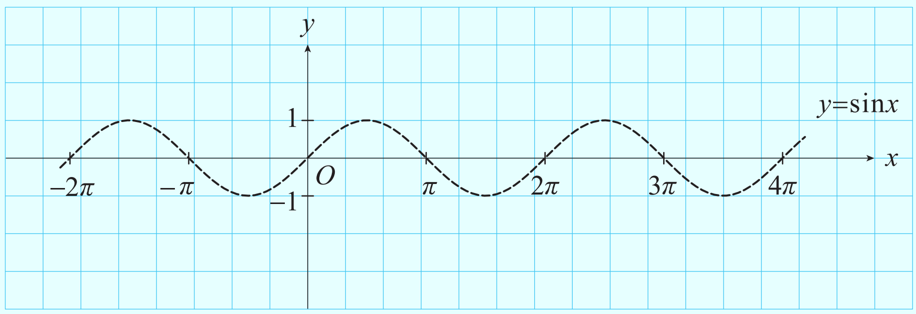
【配合課本例 6】

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

(1) $y=2\sin x$ 。

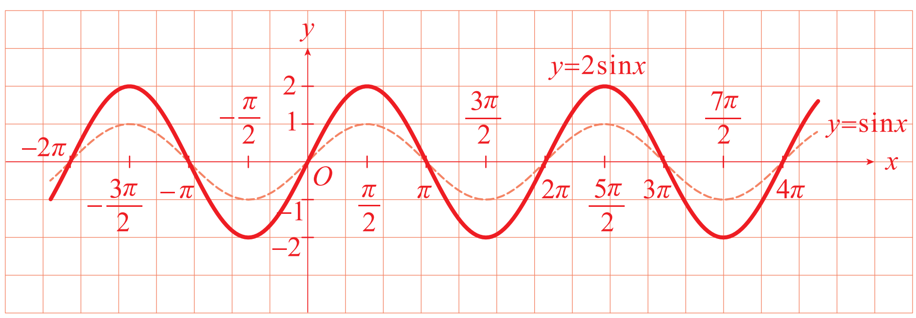


(2) $y=-2\sin x$ 。



解▸ (1) 因為對每一個 x， $y=2\sin x$ 的值總是 $y=\sin x$ 的兩倍，

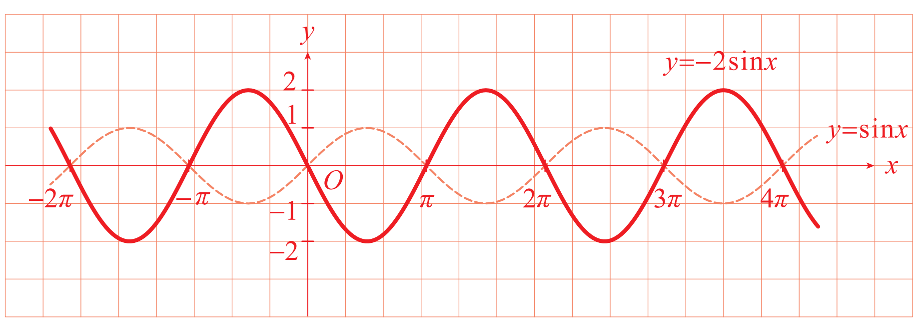
所以 $y=2\sin x$ 圖形振幅為 $y=\sin x$ 圖形振幅的兩倍，如下圖所示。



故函數 $y=2\sin x$ 的週期是 2π ，最大值為 2，最小值為 -2 。

(2) 因為對每一個 x， $y=-2\sin x$ 的值總是 $y=\sin x$ 的 -2 倍，

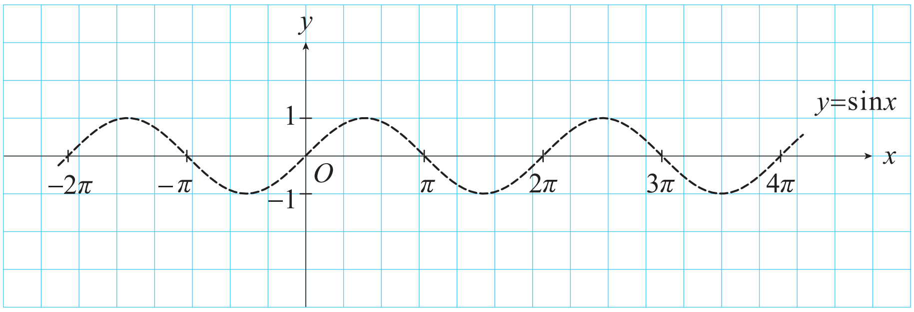
所以 $y=-2\sin x$ 的圖形與 $y=2\sin x$ 的圖形對稱 x 軸，如下圖所示。



故函數 $y=-2\sin x$ 的週期是 2π ，最大值為 2，最小值為 -2 。

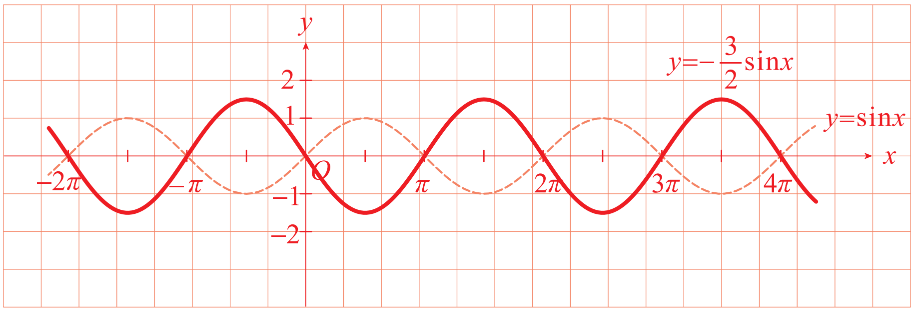
演練 9 - 1

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出 $y=-\dfrac{3}{2}\sin x$ 的圖形，並求其週期、最大值及最小值。



解▶　因為對每一個 x，$y=-\dfrac{3}{2}\sin x$ 的值總是 $y=\sin x$ 的 $-\dfrac{3}{2}$ 倍，

所以 $y=-\dfrac{3}{2}\sin x$ 的圖形如下圖所示。



故函數 $y=-\dfrac{3}{2}\sin x$ 的週期是 2π，最大值為 $\dfrac{3}{2}$，最小值為 $-\dfrac{3}{2}$。

演練 9 - 2

求 $y=\dfrac{1}{2}\sin x$ 的週期、最大值及最小值。

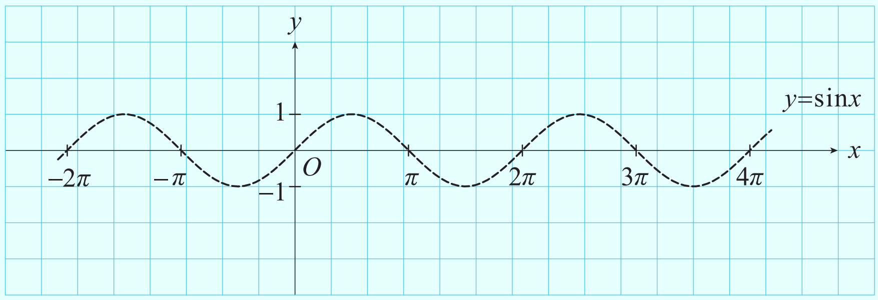
解▶　因為 $y=\dfrac{1}{2}\sin x$ 的振幅為 $y=\sin x$ 的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，

所以函數 $y=\dfrac{1}{2}\sin x$ 的週期是 2π，最大值為 $\dfrac{1}{2}$，最小值為 $-\dfrac{1}{2}$。

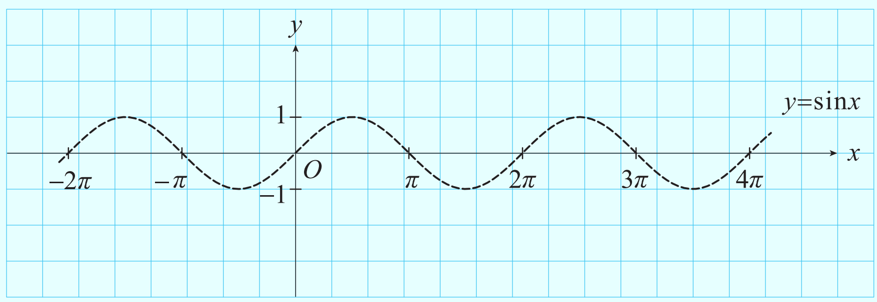
例題 10 【配合課本例 7】

利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

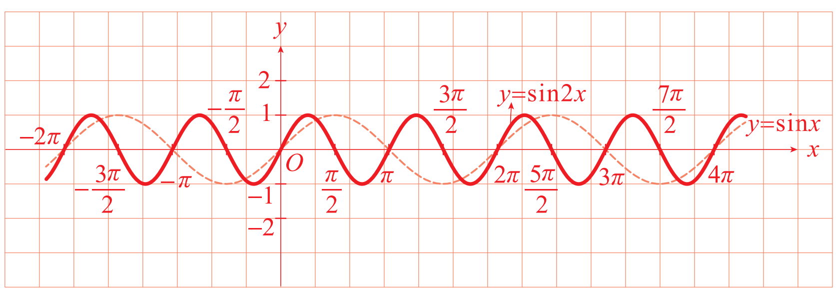
(1) $y=\sin 2x$。



(2) $y=\sin\dfrac{x}{2}$。

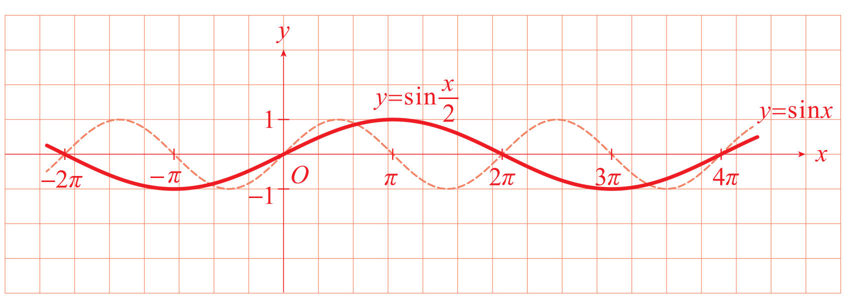


解▸ (1) 觀察 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 代入 $y=\sin 2x$ 的值與 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；事實上，將 $x=\dfrac{t}{2}$ 代入 $y=\sin 2x$ 的值與 $x=t$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；因此 $y=\sin 2x$ 的週期只有 $y=\sin x$ 的 $\dfrac{1}{2}$，如下圖所示。



故函數 $y=\sin 2x$ 的週期是 π，最大值為 1，最小值為 -1。

(2) 觀察 $x=2\pi$ 代入 $y=\sin\dfrac{x}{2}$ 的值與 $x=\pi$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；事實上，將 $x=2t$ 代入 $y=\sin\dfrac{x}{2}$ 的值與 $x=t$ 代入 $y=\sin x$ 的值相等；因此 $y=\sin\dfrac{x}{2}$ 的週期為 $y=\sin x$ 的兩倍，如下圖所示。



故函數 $y=\sin\dfrac{x}{2}$ 的週期是 4π，最大值為 1，最小值為 -1。

演練 10 - 1

求 $y=\sin 3x$ 的週期、最大值及最小值。

解▸　函數 $y=\sin 3x$ 的週期是 $\frac{2\pi}{3}$，最大值為 1，最小值為 -1。

演練 10 - 2

求 $y=\sin\frac{x}{3}$ 的週期、最大值及最小值。

解▸　函數 $y=\sin\frac{x}{3}$ 的週期是 $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$，最大值為 1，最小值為 -1。

例題 11

【配合課本例 8】

求 $y=3\sin\left(-\frac{x}{4}\right)$ 的週期、最大值及最小值。

解▸　根據圖形伸縮的概念，得函數 $y=3\sin\left(-\frac{x}{4}\right)$ 的振幅為 3，週期為 $\frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{4}\right|}=8\pi$。

故最大值為 3，最小值為 -3。

演練 11

求 $y=-2\sin(-3x)$ 的週期、最大值及最小值。

解▸　根據圖形伸縮的概念，得函數 $y=-2\sin(-3x)$ 的振幅為 $|-2|=2$，週期為 $\frac{2\pi}{|-3|}=\frac{2\pi}{3}$。

故最大值為 2，最小值為 -2。

例題 12 【常考題】

已知 $y=a\sin bx$ 的週期為 3π，求 b 的值。

解▸ 根據圖形伸縮的概念，得函數 $y=a\sin bx$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{|b|}=3\pi$。

解得 $b=\pm\dfrac{2}{3}$。

演練 12

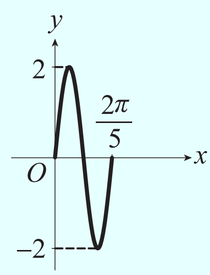
已知 $y=a\sin bx$ 的振幅為 7，求 a 的值。

解▸ 根據圖形伸縮的概念，得函數 $y=a\sin bx$ 的振幅為 $|a|=7$。

解得 $a=\pm 7$。

例題 13 【配合課本例 9】

已知右圖為 $y=a\sin bx$ 一個週期的圖形，其中 $a>0$，$b>0$，求 a 與 b 的值。



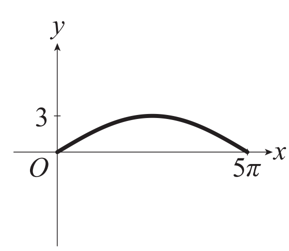
解▸ 根據圖形伸縮的概念，得函數 $y=a\sin bx$ 的振幅為 a，週期為 $\dfrac{2\pi}{b}$；

又由圖形可知：函數 $y=a\sin bx$ 的振幅為 2，週期為 $\dfrac{2\pi}{5}$。

故得 $a=2$，$b=5$。

演練 13

已知右圖為 $y=a\sin bx$ 半個週期的圖形，其中 $a>0$，$b>0$，求 a 與 b 的值。



解▸ 根據圖形伸縮的概念，得函數 $y=a\sin bx$ 的振幅為 a，週期為 $\dfrac{2\pi}{b}$；

又由圖形可知：函數 $y=a\sin bx$ 的振幅為 3，週期為 $5\pi\times 2=10\pi$。

故得 $a=3$，$b=\dfrac{1}{5}$。

主題四 正弦函數圖形的綜合應用（搭配課本 P.34～P.42）

1. 形如 $y=a\sin(bx+c)+d$（其中 a，b，c，d 均為常數）的函數圖形可經由 $y=\sin x$ 的圖形平移與伸縮得到；又因為伸縮可能會改變圖形的振幅與週期，所以在實際操作上，我們會先處理伸縮再進行平移。
2. 函數 $y=a\sin(bx+c)+d$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{|b|}$，振幅為 $|a|$。

   說例 函數 $y=-3\sin\left(-5x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{|-5|}=\dfrac{2\pi}{5}$，振幅為 $|-3|=3$。
3. 「方程式 $\sin x=k$ 的解個數」與「$y=\sin x$ 與 $y=k$ 兩圖形的交點數」相等。

例題 14 【配合課本例 10】

求函數 $y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1$ 的週期、最大值及最小值。

解▸ 函數 $y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1$ 的週期是 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，

最大值為 $3\times1-1=2$，最小值為 $3\times(-1)-1=-4$。

演練 14 - 1

求函數 $y=-2\sin 3x+4$ 的週期、最大值及最小值。

解▸ 函數 $y=-2\sin 3x+4$ 的週期是 $\dfrac{2\pi}{3}$，

最大值為 $(-2)\times(-1)+4=6$，最小值為 $(-2)\times1+4=2$。

演練 14 - 2

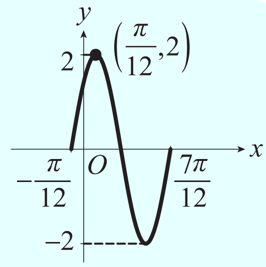
求函數 $y=4\sin\left(-3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2$ 的週期、最大值及最小值。

解▸ 函數 $y=4\sin\left(-3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2$ 的週期是 $\dfrac{2\pi}{|-3|}=\dfrac{2\pi}{3}$，

最大值為 $4\times1+2=6$，最小值為 $4\times(-1)+2=-2$。

例題 15 【常考題】

右圖是函數 $y=a\sin(bx+c)$（$a>0$，$b>0$，$0<c<\pi$）一個週期的圖形，求實數 a，b，c 的值。



解▸ ① 先考慮伸縮：

根據圖形伸縮的概念，得 $y=a\sin(bx+c)$ 的

振幅為 a，週期為 $\frac{2\pi}{b}$；

又由圖形可知：$y=a\sin(bx+c)$ 的振幅為 2，週期為 $\frac{7\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{8\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}$。

故得 $a=2$，$b=3$。

② 接著考慮平移：

因為 $y=2\sin(3x+c)=2\sin\left(3\left(x+\frac{c}{3}\right)\right)$ 的圖形為 $y=2\sin 3x$ 的圖形往左平移 $\frac{c}{3}$ 單位，

所以由圖形可知：$\frac{c}{3}=\frac{\pi}{12}$，解得 $c=\frac{\pi}{4}$。

故 $a=2$，$b=3$，$c=\frac{\pi}{4}$。

（另解）

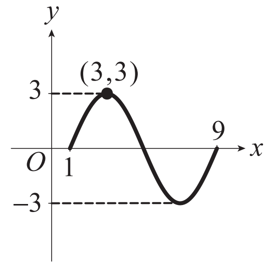
將圖形上的點 $\left(\frac{\pi}{12},2\right)$ 代入 $y=2\sin(3x+c)$，可得 $2=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+c\right)$，

解得 c 為 $\frac{\pi}{4}$ 或其同界角（即 $\frac{\pi}{4}+2k\pi$，k 為整數）。

又因為 $0<c<\pi$，所以 $c=\frac{\pi}{4}$。

演練 15

右圖是函數 $y=a\sin(bx+c)$（$a>0$，$b>0$，$|c|<\pi$）一個週期的圖形，求實數 a，b，c 的值。



解▸ ① 先考慮伸縮：

根據圖形伸縮的概念，得 $y=a\sin(bx+c)$ 的振幅為 a，週期為 $\frac{2\pi}{b}$；

又由圖形可知：$y=a\sin(bx+c)$ 的振幅為 3，週期為 $9-1=8$。

故得 $a=3$，$b=\frac{\pi}{4}$。

② 接著考慮平移：

因為 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{4}x+c\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(x+\frac{4c}{\pi}\right)\right)$ 的圖形為 $y=3\sin\frac{\pi}{4}x$ 的圖形往右平移 $-\frac{4c}{\pi}$ 單位，

所以由圖形可知：$-\frac{4c}{\pi}=1$，解得 $c=-\frac{\pi}{4}$。

故 $a=3$，$b=\frac{\pi}{4}$，$c=-\frac{\pi}{4}$。

（另解）

將圖形上的點 $(3,3)$ 代入 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{4}x+c\right)$，可得 $3=3\sin\left(\frac{3\pi}{4}+c\right)$，

解得 c 為 $-\frac{\pi}{4}$ 或其同界角（即 $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$，k 為整數）。

又因為 $|c|<\pi$，所以 $c=-\frac{\pi}{4}$。

【配合課本例 11】

例題 16

設 $a=\sin 3$，選出正確的選項。

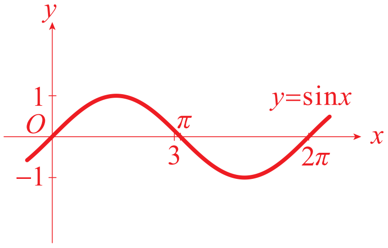
(1) $0<a<\frac{1}{2}$　(2) $\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$　(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$　(4) $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$。

解▸ 因為 $\pi\approx 3.14$，所以 $\frac{5\pi}{6}<3<\pi$。

觀察 $y=\sin x$ 的圖形，發現當 $\frac{5\pi}{6}<x<\pi$ 時，$y=\sin x$ 為遞減函數，

因此可得 $0<\sin 3<\frac{1}{2}$。

故選(1)。

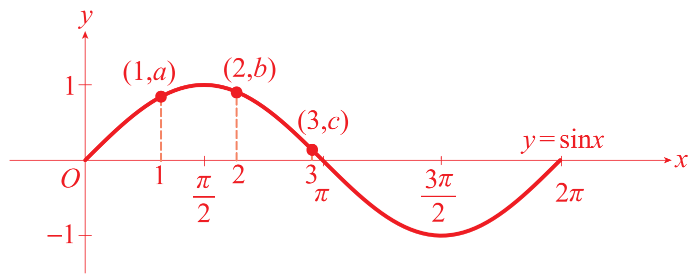


演練 16

比較 $a=\sin 1$、$b=\sin 2$、$c=\sin 3$ 的大小。

解▸ 由 $a=\sin 1$、$b=\sin 2$、$c=\sin 3$ 可知 $(1,a)$、$(2,b)$ 與 $(3,c)$ 三點分別落在 $y=\sin x$ 的圖形上。

因為 $\frac{\pi}{2}\approx 1.57$，$\pi\approx 3.14$，所以三點的約略位置如下圖所示。



又因為 $\frac{\pi}{2}\approx 1.57$，可知 2 比 1 更接近 $\frac{\pi}{2}$，

所以點 $(2,b)$ 比點 $(1,a)$ 高，即 $b>a$。

綜合可得 $b>a>c$。

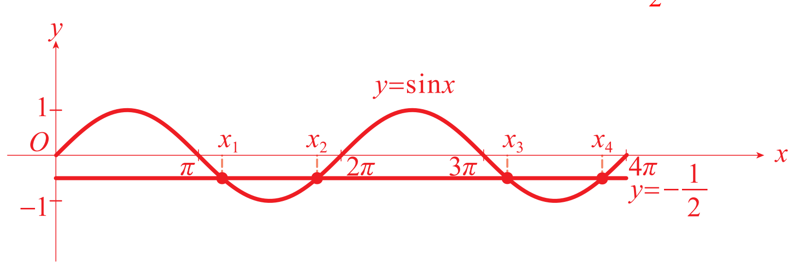
例題 17

【配合課本例 12】

在 $0\le x\le 4\pi$ 範圍內，求方程式 $\sin x=-\frac{1}{2}$ 的解。

解▸ 首先，因為「方程式 $\sin x=-\frac{1}{2}$ 的解個數」與「$y=\sin x$ 與 $y=-\frac{1}{2}$ 兩圖形的交點數」相等，

所以在同一坐標平面上的 $0\le x\le 4\pi$ 範圍內，描繪 $y=\sin x$ 與 $y=-\frac{1}{2}$ 的圖形，如下圖所示。



接著，由上圖可知：在 $0\le x\le 4\pi$ 範圍內，$y=\sin x$ 與 $y=-\frac{1}{2}$ 的圖形恰有四個交點，即方程式

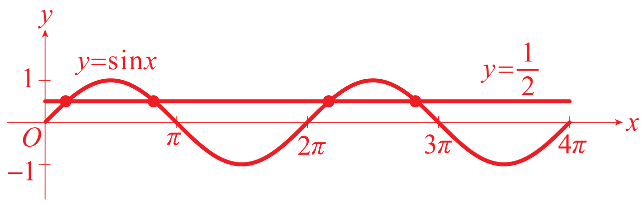
$\sin x=-\frac{1}{2}$ 恰有四個解。最後，因為 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，所以搭配圖形並利用換算公式可得 4 個解分別為

$x_1=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，$x_2=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$，$x_3=2\pi+x_1=\frac{19\pi}{6}$，$x_4=2\pi+x_2=\frac{23\pi}{6}$。

演練 17

在 $0 \le x \le 4\pi$ 範圍內，求方程式 $\sin x = \dfrac{1}{2}$ 的解。

解▶ 首先，因為「方程式 $\sin x = \dfrac{1}{2}$ 的解個數」與「$y = \sin x$ 與 $y = \dfrac{1}{2}$ 兩圖形的交點數」相等，所以在同一坐標平面上的 $0 \le x \le 4\pi$ 範圍內，描繪 $y = \sin x$ 與 $y = \dfrac{1}{2}$ 的圖形，如下圖所示。



接著，由上圖可知：在 $0 \le x \le 2\pi$ 範圍內，$y = \sin x$ 與 $y = \dfrac{1}{2}$ 的圖形恰有兩個交點，即方程式 $\sin x = \dfrac{1}{2}$ 恰有兩個解。又因為 $\sin \dfrac{\pi}{6} = \sin \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$，所以這兩個解即為 $\dfrac{\pi}{6}$ 與 $\dfrac{5\pi}{6}$。

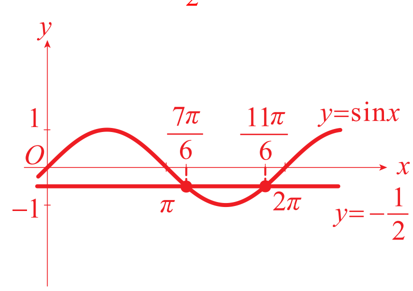
最後，利用同界角的概念可推得在 $2\pi \le x \le 4\pi$ 範圍內的解為 $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{13\pi}{6}$ 與 $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{17\pi}{6}$。

故在 $0 \le x \le 4\pi$ 範圍內，方程式 $\sin x = \dfrac{1}{2}$ 有 4 個解，分別為 $x = \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{6}$，$\dfrac{13\pi}{6}$，$\dfrac{17\pi}{6}$。

例題 18 【常考題】

在 $0 \le x \le 2\pi$ 範圍內，求滿足不等式 $\sin x \le -\dfrac{1}{2}$ 的解。

解▶ 由 $\sin \dfrac{7\pi}{6} = \sin \dfrac{11\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$ 描繪 $y = \sin x$ 與 $y = -\dfrac{1}{2}$ 的圖形，如下圖所示。

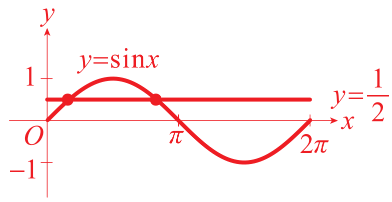


由上圖可知：$\dfrac{7\pi}{6} \le x \le \dfrac{11\pi}{6}$。

演練 18

在 $0 \le x \le 2\pi$ 範圍內，求滿足不等式 $\sin x \le \frac{1}{2}$ 的解。

解▸ 由 $\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 描繪 $y=\sin x$ 與 $y=\frac{1}{2}$ 的圖形，如下圖所示。

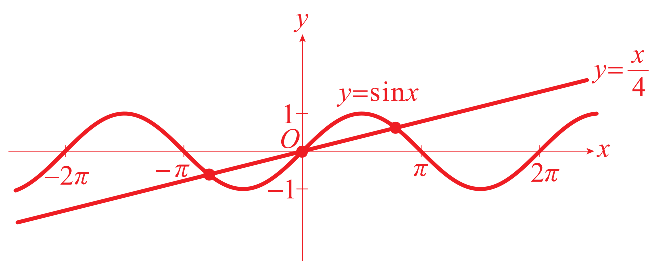


由上圖可知：$0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6} \le x \le 2\pi$。

例題 19 【配合課本例 13】

求方程式 $\sin x=\frac{x}{4}$ 解的個數。

解▸ 在同一坐標平面上，描繪 $y=\sin x$ 與 $y=\frac{x}{4}$ 的圖形，如下圖所示。

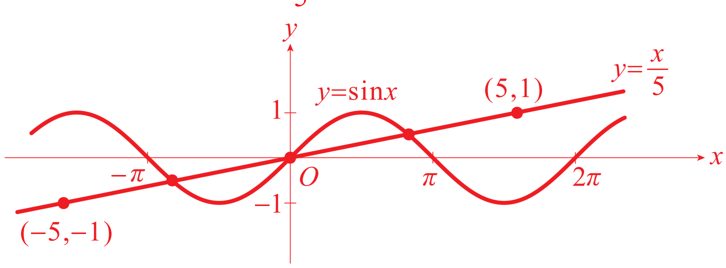


因為兩圖形有 3 個交點，所以方程式 $\sin x=\frac{x}{4}$ 有 3 個實數解。

演練 19

求方程式 $\sin x=\frac{x}{5}$ 解的個數。

解▸ 在同一坐標平面上，描繪 $y=\sin x$ 與 $y=\frac{x}{5}$ 的圖形，如下圖所示。

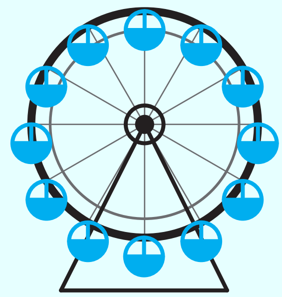


因為兩圖形有 3 個交點，所以方程式 $\sin x=\frac{x}{5}$ 有 3 個實數解。

例題 20

【配合課本例 14】

有一圓形摩天輪，當摩天輪開始運轉時，小龍恰坐在離地最近的位置上，x 分鐘後，小龍離地的高度 y（公尺）可表為 $y=20\sin\left(\dfrac{2\pi}{15}x-\dfrac{\pi}{2}\right)+22$。問：



(1)小龍離地最高為多少公尺？

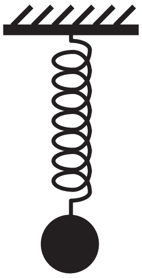
(2)摩天輪轉一圈需幾分鐘？

解▶ (1) 因為函數 $y=20\sin\left(\dfrac{2\pi}{15}x-\dfrac{\pi}{2}\right)+22$ 的最大值為 $20\times1+22=42$，所以小龍離地最高為 42 公尺。

(2) 因為週期為 $\dfrac{2\pi}{\frac{2\pi}{15}}=15$，所以摩天輪轉一圈需 15 分鐘。

演練 20

一物體以彈簧懸掛。已知該物體離平衡點的位移 y（公分）與時間 x（秒）可用函數 $y=3\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 表示，求



(1)彈簧最大的伸長量（位移）。

(2)往返完成一次振動所需要的時間。

解▶ (1) 因為函數的振幅為 3，所以最大的伸長量為 3 公分。

(2) 因為函數的週期為 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，所以振動一次需 4 秒。

例題 21 【配合課本例 15】

觀察某交流電在 0 秒到 $\frac{1}{30}$ 秒之間變化的情形如下：在 $\frac{1}{300}$ 秒與 $\frac{7}{300}$ 秒時，有最大電流為 10 安培；而這期間最小電流發生兩次，皆為 -10 安培。已知電流強度 I（安培）與時間 t（秒）的關係為 $I(t)=a\sin(bt+c)$，其中 a 與 b 皆為正數，且 $0\le c<\pi$，求 a，b，c 的值。

解▸ 因為電流最大為 10 安培與最小為 -10 安培，
所以此函數的振幅為 10，可得 $a=10$。

因為最大電流僅發生在 $\frac{1}{300}$ 秒與 $\frac{7}{300}$ 秒，所以此函數的週期為 $\frac{7}{300}-\frac{1}{300}=\frac{1}{50}$，

可得 $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{1}{50}$，又 b 為正數，解得 $b=100\pi$。

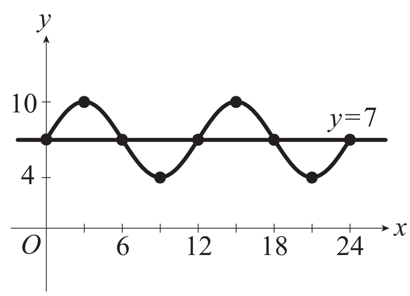
因為 $I(t)=a\sin(bt+c)$ 通過 $\left(\frac{1}{300},10\right)$，所以 $10=10\times\sin\left(100\pi\times\frac{1}{300}+c\right)$，

化簡得 $1=\sin\left(\frac{\pi}{3}+c\right)$，又 $0\le c<\pi$，解得 $\frac{\pi}{3}+c=\frac{\pi}{2}$，即 $c=\frac{\pi}{6}$。

故 $a=10$，$b=100\pi$，$c=\frac{\pi}{6}$。

演練 21

海水受到月球引力的影響會發生漲落的潮汐現象。假設右圖是某港口在一天 24 小時海水漲落的記錄圖。
經過長期的觀測得知，右圖的水深 y（公尺）與時間 x（小時）的關係可表為 $y=a\sin bx+c$，其中 a，b，c 都是正數。根據右圖求 a，b，c 的值。



解▸ 根據圖形平移與伸縮的概念，

函數 $y=a\sin bx+c$ 的圖形之振幅為 a，週期為 $\frac{2\pi}{b}$，且向上平移 c 單位。

又由圖形可知：振幅為 3，週期為 12，且向上平移 7 單位。

故解得 $a=3$，$b=\frac{\pi}{6}$，$c=7$。

重要精選考題

（主：代表本單元對應的主題）

基礎題

1. 選出所有正確的選項。
(1)函數 $y=\sin x$ 的圖形對稱於原點
(2)函數 $y=\sin x$ 與 $y=-\sin x$ 的圖形對稱於 y 軸
(3)函數 $y=|\sin x|$ 的週期是 2π
(4) $-1\le \sin x\le 1$ 。

主一

解▶ (1)(2)(4)

2. 下列哪些函數的圖形可由 $y=\sin x$ 的圖形往右平移 $\dfrac{3\pi}{5}$ 單位得到？
(1) $y=\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{5}\right)$　(2) $y=\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{5}\right)$　(3) $y=\sin\left(x+\dfrac{7\pi}{5}\right)$　(4) $y=\sin\left(x-\dfrac{7\pi}{5}\right)$ 。

主二

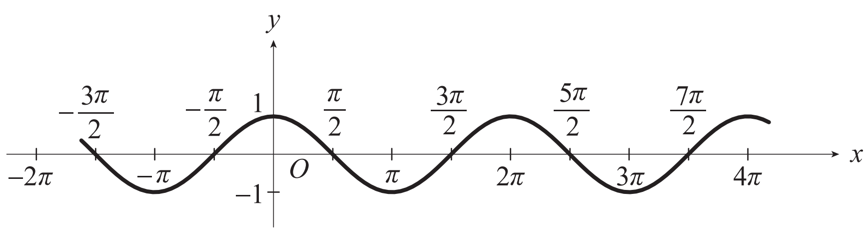
解▶ (1)(3)

3. 求下列各函數的最大值及最小值。
(1) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 。　(2) $y=\sin x-3$ 。　(3) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+2$ 。

主二

解▶ (1)最大值 1，最小值 -1
(2)最大值 -2 ，最小值 -4
(3)最大值 3，最小值 1

4. 下圖是哪些函數的圖形？



(1) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$　(2) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$　(3) $y=\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)$　(4) $y=\sin x+1$ 。

主二

解▶ (2)(3)

5. 下列哪些函數的圖形可由 $y=2\sin x$ 經左右或上下平移得到？

(1) $y=2\sin(x+3)$ (2) $y=\sin x+2$ (3) $y=-2\sin x$ (4) $y=2\sin x+3$。 主二

解▸ (1)(3)(4)

6. 下列哪些三角函數的週期為 π？

(1) $y=\sin 2x$ (2) $y=\sin\frac{1}{2}x$ (3) $y=\frac{1}{2}\sin x$ (4) $y=-\frac{1}{2}\sin 2x$。 主三

解▸ (1)(4)

7. 求下列各函數的週期、最大值及最小值。

(1) $y=\sin(-3x)$。 (2) $y=\sin\frac{x}{4}$。 (3) $y=3\sin\frac{x}{5}$。 主三

解▸ (1)週期 $\frac{2\pi}{3}$，最大值 1，最小值 -1

(2)週期 8π，最大值 1，最小值 -1

(3)週期 10π，最大值 3，最小值 -3

8. 下列哪些函數與 $y=\sin 5x$ 有相同週期？

(1) $y=5\sin x$ (2) $y=\sin 5x-1$ (3) $y=\sin(-5x+2)$ (4) $y=-5\sin x-3$。 主四

解▸ (2)(3)

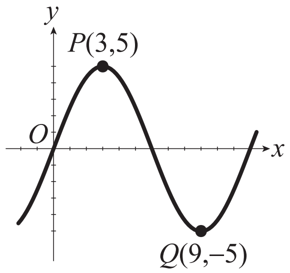
9. 某交流電的電流強度 I（安培）與時間 t（秒）的關係可用函數 $I=100\sin\left(100\pi t+\frac{5\pi}{6}\right)$ 表示，求

(1)初始（$t=0$）電流。 (2)最大電流。 (3)電流強度變化的週期。 主四

解▸ (1)50（安培） (2)100（安培）

(3) $\frac{1}{50}$（秒）

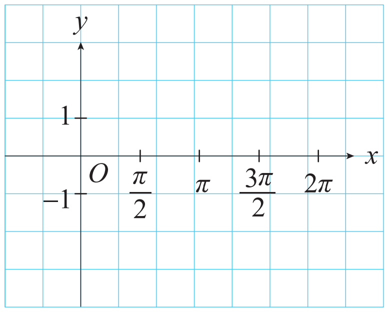
10. 已知 $a>0$，$b>0$，函數 $y=a\sin bx$ 的圖形通過最高點 $P(3,5)$ 及最低點 $Q(9,-5)$，如右圖所示，求 a，b 的值。



主四

解▶ $a=5$，$b=\dfrac{\pi}{6}$

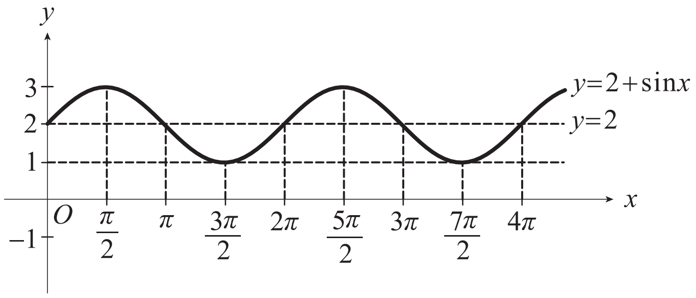
11. 在 $0\le x<2\pi$ 範圍內，畫出函數 $y=\sin 2x$ 與 $y=\sin x$ 的圖形，並求兩者的交點個數。



主四

解▶ 見解析，4 個

12. 設 $a>0$，令 $A(a)$表示 x 軸、y 軸、直線 $x=a$ 與函數 $y=2+\sin x$ 的圖形所圍成的面積，如下圖所示。



選出所有正確的選項。

(1) $A(a+2\pi)=A(a)$　(2) $A(2\pi)=2A(\pi)$　(3) $A(4\pi)=2A(2\pi)$

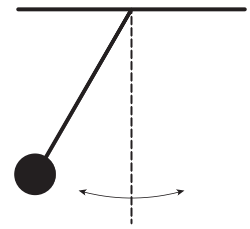
(4) $A(3\pi)-A(2\pi)=A(2\pi)-A(\pi)$　(5) $A(4\pi)-A(3\pi)=A(2\pi)-A(\pi)$。

主四

解▶ (3)(5)

進階題

1. 將長為 a 公分的細繩之一端固定，另一端懸掛一球。當小球來回擺動時，相對於平衡點的位移 y（公分）與時間 x（秒）的關係可用函數 $y=3\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\sqrt{\dfrac{9.8}{a}}x\right)$ 表示。已知小球擺動的週期為 2 秒，求繩長 a 的近似值。（四捨五入到整數位）



解▸ 1（公分）

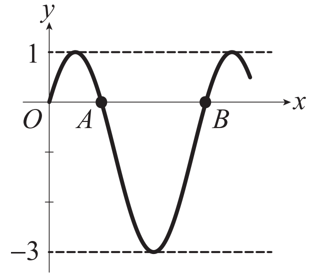
2. 選出所有正確的選項。
(1)$\sin 1>\sin 1^\circ$　(2)$\sin 10>\sin 10^\circ$　(3)$\sin 3>0$　(4)$\sin 4<0$。

解▸ (1)(3)(4)

3. 利用函數 $y=\sin x$ 的圖形，在 $0\le x<2\pi$ 範圍內，求滿足不等式 $\sin x\ge -\dfrac{1}{2}$ 的 x 之範圍。

解▸ $0\le x\le\dfrac{7\pi}{6}$ 或 $\dfrac{11\pi}{6}\le x<2\pi$

4. 右圖為函數 $y=a\sin(bx+c)+d$ 的部分圖形，其中 $a>0$，$b>0$，$-\frac{\pi}{2}\le c\le\frac{\pi}{2}$，$A\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，$B(\pi,0)$，求常數 a，b，c，d 的值。



解▶ $a=2$，$b=2$，$c=\frac{\pi}{6}$，$d=-1$

5. 求函數 $f(x)=\cos^2 x+\frac{1}{2}\sin x-1$ 的最大值。【聯招】

解▶ $\frac{1}{16}$

歷屆大考觀摩

1. 試問在 $0 \le x \le 2\pi$ 的範圍中，$y = 3\sin x$ 的函數圖形與 $y = 2\sin 2x$ 的函數圖形有幾個交點？
(1)2 個交點 (2)3 個交點 (3)4 個交點 (4)5 個交點 (5)6 個交點。

【106 指甲】【答對率 25%】

解▶ (4)

2. 令 $a = \sin\left(\pi^2\right)$，試問下列哪一個選項是對的？
(1)$a = -1$ (2)$-1 < a < -\frac{1}{2}$ (3)$-\frac{1}{2} < a < 0$ (4)$0 < a < \frac{1}{2}$ 。 【學測（修）】

解▶ (3)

3. 已知 $0 < x < \pi$ ，求函數 $f(x) = \sin x + \dfrac{4}{\sin x}$ 的最大值及最小值。 【參考題】

解▶ 無最大值，最小值 5