i 的規定

規定 $i=\sqrt{-1}$，且 i 滿足下列性質。

(1) $i^2=-1$。

(2) 當實數 $b>0$ 時，$\sqrt{-b}=\sqrt{b}\,i$。

例如：(1) $x^2=-1$ 的解為 $x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$。

(2) $x^2=-2$ 的解為 $x=\pm\sqrt{-2}=\pm\sqrt{2}i$。

(3) $x^2=-9$ 的解為 $x=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9}i=\pm 3i$。

隨堂練習

以 i 表示下列各方程式的解。

(1) $x^2=-3$。 (2) $x^2+4=0$。 (3) $x^2=-12$。

由以上的規定，可得 $x^2-14x+50=0$ 的解為

$$x=7\pm\sqrt{-1}=7\pm i,$$

像 $7\pm i$ 這種形式的數，稱為**複數**。

複數的定義

設 a, b 為實數，形如 $a+bi$ 的數稱為**複數**，其中 a 稱為 $a+bi$ 的**實部**，b 稱為 $a+bi$ 的**虛部**。

對於複數 $a+bi$（其中 a, b 為實數），我們進一步說明如下。

(1)形如 $a+(-b)i$ 的複數可以記為 $a-bi$，即 $a+(-b)i=a-bi$；形如 $a+0i$ 的複數可以記為 a，即 $a+0i=a$；形如 $0+bi$ 的複數可以記為 bi，即 $0+bi=bi$，且 $1i$ 可再簡記為 i。

(2)當虛部 $b=0$ 時，$a+bi=a+0i=a$ 相當於一個實數，也就是說，實數可視為虛部為 0 的複數。例如：$4, 0, \sqrt{2}, \pi$ 等都是實數，也是複數。

(3)當虛部 $b\neq 0$ 時，稱 $a+bi$ 為**虛數**。例如：$1+2i, 3i$ 等都是虛數，也是複數。

由此可知，實數是複數的一部分，因而我們把實數系擴張成一個較大的數系，稱為**複數系**。

複數

實數	虛數
$4, 0, \sqrt{2}, \pi, \ldots$	$1+2i, 3i, \ldots$

▲圖 2

例題 1

求下列各複數的實部與虛部。

(1) $1-2i$。　(2) 4。　(3) $3i$。

解

(1) 因為 $1-2i=1+(-2)i$，所以 $1-2i$ 的實部為 1，虛部為 -2。

(2) 因為 $4=4+0i$，所以 4 的實部為 4，虛部為 0。

(3) 因為 $3i=0+3i$，所以 $3i$ 的實部為 0，虛部為 3。

隨堂練習

求下列各複數的實部與虛部。

(1) $\sqrt{2}+3i$。　(2) $-\sqrt{5}i$。　(3) 0。

接下來，我們定義複數的相等。

複數的相等

當兩個複數的實部相等、虛部也相等時，稱這兩個複數相等。也就是說，當 a, b, c, d 為實數時，$a+bi=c+di$ 的意思是 $a=c$ 且 $b=d$。

練習一道複數相等的例題。

例題 2

已知實數 a, b 滿足 $(a-2)+4i=1+2bi$，求 a, b 的值。

解

根據複數相等的定義，得 $a-2=1$ 與 $4=2b$，解得 $a=3, b=2$。

隨堂練習

已知實數 a, b 滿足 $(a+b+4)+(a-2)i=0$，求 a, b 的值。

(二) 複數的四則運算

有了複數後，我們希望複數的運算也能和實數一樣，滿足交換律、結合律與分配律，於是規定如下。

複數的加法、減法與乘法

設 a, b, c, d 為實數。

(1) 加法：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$。

(2) 減法：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$。

(3) 乘法：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$。

上述複數的乘法運算是基於我們希望複數能如同實數一樣，具有乘法對加法的分配律，在此前提下，我們自然會得到

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=(a+bi)c+(a+bi)di\\&=ac+bci+adi+bdi^2\\&=ac+bci+adi-bd\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i\text{。}\end{aligned}$$

來看一道複數加法、減法與乘法的例題。

例題 3

已知複數 $z_1=3+4i, z_2=5-3i$，求下列各式的值。

(1) z_1+z_2。　　(2) z_1-z_2。　　(3) z_1z_2。

解

(1) $z_1+z_2=(3+4i)+(5-3i)=(3+5)+(4-3)i=8+i$。

(2) $z_1-z_2=(3+4i)-(5-3i)=(3-5)+(4-(-3))i=-2+7i$。

(3) $z_1z_2=(3+4i)(5-3i)=(3+4i)\times 5+(3+4i)(-3i)=15+20i-9i-12i^2$

$=27+11i$。

隨堂練習

已知複數 $z_1=2+\sqrt{3}i, z_2=2-\sqrt{3}i$，求下列各式的值。

(1) z_1+z_2。　　(2) z_1-z_2。　　(3) z_1z_2。

由複數的加法與乘法規定，可以驗證下列運算性質皆成立。

基本性質

若 z_1, z_2, z_3 為三個任意的複數，則下列各性質成立。

(1) 交換律：$z_1+z_2=z_2+z_1$；

$z_1z_2=z_2z_1$。

(2) 結合律：$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$；

$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$。

(3) 分配律：$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$。

根據以上的基本性質，可得

$$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=(\sqrt{2}i)(\sqrt{3}i)=\sqrt{2}\times i\times\sqrt{3}\times i=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times i\times i$$
$$=(\sqrt{2}\times\sqrt{3})(i\times i)=-\sqrt{6}。$$

設 z 為複數，規定 $z^2=zz, z^3=z^2z, \ldots$。一般而言，設 n 為大於 1 的正整數，規定

$$z^n=z^{n-1}z。$$

例題 4

(1) 求 $i^1, i^2, \ldots, i^8$ 的值。

(2) 求 $i^1+i^2+\cdots+i^8$ 的值。

解

(1)

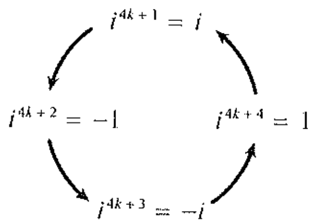
$i^1=i$。	$i^5=i^4\times i=1\times i=i$。
$i^2=-1$。	$i^6=i^4\times i^2=1\times(-1)=-1$。
$i^3=i^2\times i=(-1)\times i=-i$。	$i^7=i^4\times i^3=1\times(-i)=-i$。
$i^4=i^3\times i=(-i)\times i=-i^2=1$。	$i^8=i^4\times i^4=1\times 1=1$。

(2) $i^1+i^2+\cdots+i^8=i+(-1)+(-i)+1+i+(-1)+(-i)+1=0$。

一般而言，當 n 為正整數時，i^n 只有 $i, -1, -i$ 與 1 四個可能的值，而且它們是依序循環不息的，如圖 3 所示，即

$$i^{4k+1}=i, i^{4k+2}=-1, i^{4k+3}=-i, i^{4k+4}=1，$$

其中 k 為非負整數。



▲圖 3

隨堂練習

求下列各式的值。

(1) i^{50}。

(2) $i^{10}+i^{11}+i^{12}+i^{13}+i^{14}+i^{15}$。

在定義複數的除法 $\frac{a+bi}{c+di}$（其中 $c+di\neq 0$）時，我們類比實數的分式有理化運算，希望將 $\frac{a+bi}{c+di}$ 中原本為複數的分母化為實數，並說明如下。

首先，由於 $(c+di)(c-di)=c^2+d^2$ 是一個實數，此時我們稱 $c+di$ 與 $c-di$ 互為**共軛複數**；於是，我們將 $\frac{a+bi}{c+di}$ 的分子與分母同乘 $c-di$，可得

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}。$$

最後，將 $\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$ 寫成複數的形式 $\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$。

複數的除法

設 a, b, c, d 為實數，且 c, d 不同時為 0。

$$\frac{a+bi}{c+di}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i。$$

練習複數的除法。

例題 5

將下列各複數表示成 $a+bi$（其中 a, b 為實數）的形式。

(1) $\frac{1}{3+4i}$。　　(2) $\frac{2+i}{1-i}$。

解

(1) $\frac{1}{3+4i}=\frac{1\times(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{3-4i}{3^2+4^2}=\frac{3-4i}{25}=\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$。

(2) $\frac{2+i}{1-i}=\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+2i+i-1}{1^2-i^2}=\frac{1+3i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$。

事實上，複數的除法是乘法的反運算，以例題 5 (2) 為例，將所得的結果 $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ 與原分式的分母 $1-i$ 相乘即可得到原分式的分子 $2+i$，也就是說，

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)(1-i)=\left(\frac{1}{2}\times 1-\frac{3}{2}(-1)\right)+\left(\frac{1}{2}(-1)+\frac{3}{2}\times 1\right)i=2+i。$$