

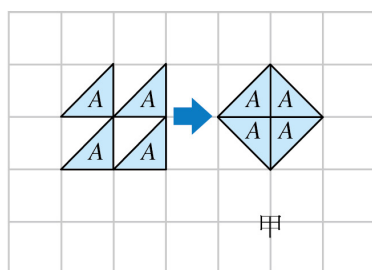
Ch 2.1 平方根與近似值

重點 1：二次方根的意義與表示法

1. 意義：設正方形的邊長為 x ，則此正方形的面積為 x^2
2. 若正方形的面積為 a ，設正方形的邊長為 x ，則此正方形的面積為 x^2
 $\Rightarrow x^2 = a$ ，則邊長 $x = \sqrt{a}$ ，其中 \sqrt{a} 讀作「二次根號 a 」，簡稱為「根號 a 」
 註：「 $\sqrt{\quad}$ 」為二次方根符號，且當 a 不為負數(即 $a \geq 0$)時， \sqrt{a} 才有意義
3. \sqrt{a} 的性質：
 - (1) 若一個正方形的面積為 a ，則它的邊長為 \sqrt{a} ，即滿足 $(\sqrt{a})^2 = a$
 即若 a 為任意的正數($a > 0$)，則 \sqrt{a} 是一個正數($\sqrt{a} > 0$)
 - (2) 若 $a > b > 0$ ，則 $\sqrt{a} > \sqrt{b} > 0$

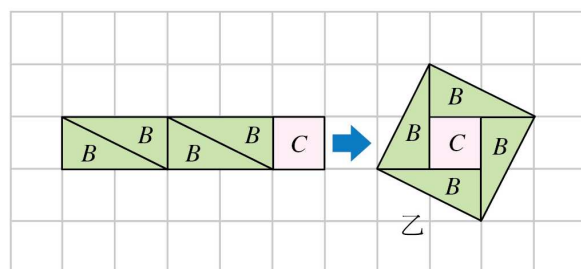
※面積與邊長

例：下列圖中，每個小方格的邊長皆為 1，則：



(1) 甲是否為正方形？答：____
理由：

(2) 甲的面積為____



乙是否為正方形？答：____
理由：

乙的面積為____

※二次方根的意義與表示法

例 1.1：試以「 $\sqrt{\quad}$ 」表示下列各正方形的邊長：

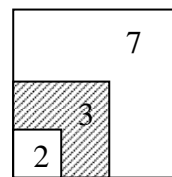
- (1) 若正方形面積為 4 平方單位時，則其邊長為____單位，關係為____
- (2) 若正方形面積為 2 平方單位時，則其邊長為____單位，關係為____

Ex1.1：試以「 $\sqrt{\quad}$ 」表示下列各正方形的邊長：

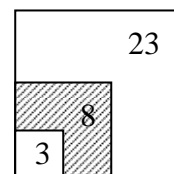
- (1) 若正方形面積為 9 平方單位時，則其邊長為____單位，關係為____
- (2) 若正方形面積為 5 平方單位時，則其邊長為____單位，關係為____

※二次方根的大小

例 1.2：(1)試分別以「 $\sqrt{\quad}$ 」表示面積為 2 平方公分、3 平方公分和 7 平方公分的正方形邊長
 (2)承(1)，試比較這三個正方形邊長的大小。

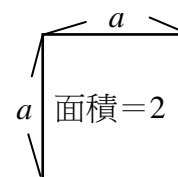


Ex1.2：(1)試分別以「 $\sqrt{\quad}$ 」表示面積為 3 平方公分、8 平方公分和 23 平方公分的正方形邊長
 (2)承(1)，試比較這三個正方形邊長的大小

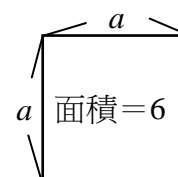


Ex1.21：(1)試分別以「 $\sqrt{\quad}$ 」表示面積為 5.2 平方公分、5.4 平方公分和 5.6 平方公分的正方形邊長
 (2)承(1)，試比較這三個正方形邊長的大小

例 1.3：如右圖，面積為 2 的正方形，假設其邊長為 a ，得知 $a^2 = 2$ ，且 $1.4^2 = 1.96$ ， $1.5^2 = 2.25$ ，則 a 可以用整數、一位小數表示嗎？



Ex1.31：如右圖，面積為 6 的正方形，假設其邊長為 a ，已知 $2 < a < 3$ ，且 $2.4^2 = 5.76$ ， $2.5^2 = 6.25$ ，則 a 可以用整數、一位小數表示嗎？



例 1.4：在下列空格中填入正確的值：

$$(1)(\sqrt{7})^2 = \underline{\quad\quad} \quad (2)\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right)^2 = \underline{\quad\quad} \quad (3)(\sqrt{7.9})^2 = \underline{\quad\quad}$$

例 1.5：試比較下列各數的大小關係：

$$(1)\sqrt{46}、\sqrt{49}、\sqrt{50} \quad (2)\sqrt{\frac{5}{4}}、\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Ex1.5：在 \square 中填入 $>$ 、 $<$ 或 $=$ ：

$$(1)\sqrt{63} \square \sqrt{56} \quad (2)\sqrt{36} \square \sqrt{33\frac{1}{3}} \quad (3)\sqrt{5} \square 5$$

$$(4)\sqrt{\frac{1}{5}} \square \frac{1}{5} \quad (6)a > 0 \text{ 時, } \sqrt{a} \square a$$

重點 2：求 \sqrt{x} 值的方法(完全平方數與標準分解)

1.意義：若 $x > 0$ ，則 $\sqrt{x} = \sqrt{a^2} = a$

2.完全平方數：一個正整數 a ，可以寫成另一正整數 x 的平方，即 $x^2 = a$ ，則：

稱 a 為 x 的**完全平方數**，或 x 為 a 的一個**平方根**

3.整數的平方 $1^2 \sim 30^2$ ：

背

整數的平方 x^2	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
完全平方數 a	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
整數的平方 x^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2	16^2	17^2	18^2	19^2	20^2
完全平方數 a	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
整數的平方 x^2	21^2	22^2	23^2	24^2	25^2	26^2	27^2	28^2	29^2	30^2
完全平方數 a	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900

4.二次根式 \sqrt{x} ($x > 0$)化簡原則：

(1)當 x 為整數時，做標準質因數分解化簡

(2)當 x 為分數時，改為完全平方數，或分子、分母分別做標準質因數分解化簡

(3)當 x 為小數時，改為完全平方數，或先化為分數再化簡

※完全平方數

例 2.1：化簡下列各數的值：

$$(1) \sqrt{144} \quad (2) \sqrt{\frac{169}{9}} \quad (3) \sqrt{1.21} \quad (4) \sqrt{0.0361}$$

Ex2.1：化簡下列各數的值：

$$(1) \sqrt{196} \quad (2) \sqrt{\frac{324}{49}} \quad (3) \sqrt{2.25} \quad (4) \sqrt{0.0036} \quad (5) \sqrt{\frac{256}{81}} \quad (6) \sqrt{361}$$

Ex2.11：化簡下列各數的值：

$$(1) -(\sqrt{3})^2 + \sqrt{324} + \sqrt{\frac{289}{25}} \quad (2) \sqrt{1.96} - \sqrt{0.0144} + \sqrt{49}$$

※標準質因數分解

例 2.2：利用標準質因數分解，求下列各數的值：

$$(1) \sqrt{576} \quad (2) \sqrt{1296} \quad (3) \sqrt{39.69}$$

Ex2.2：利用標準質因數分解，求下列各數的值：

(1) $\sqrt{784}$ (2) $\sqrt{98.01}$ (3) $\sqrt{441}$ (4) $\sqrt{729}$ (5) $\sqrt{1936}$

Ex2.21：利用標準質因數分解，求下列各數的值：

(1) $\sqrt{10.89}$ (2) $\sqrt{70.56}$ (3) $\sqrt{0.0625}$ (4) $\sqrt{544\frac{4}{9}}$

重點 3：平方根 \sqrt{x} 的近似值求法(電子計算機法)

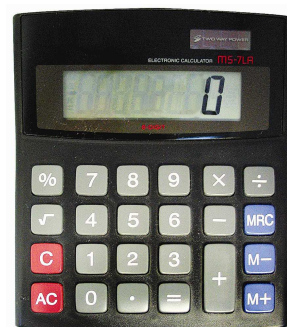
1. 意義：一般電算器上有一個「 $\sqrt{\quad}$ 」鍵。

對於正數 x ，可以用它來求 x 的值或其近似值

2. 使用電算器注意事項：

(1) 計算器種類眾多，必須詳閱使用手冊，熟悉操作方法

(2) 計算每一題時，必須先按 **AC** 將螢幕顯示的值「歸零」



例 3.1：利用計算器，求下列各數的近似值(以四捨五入法求到小數點後第 4 位)

(1) $\sqrt{7}$ (2) $\sqrt{\frac{5}{7}}$ (3) $\sqrt{0.7}$

解：(1) 依序按 **7** \Rightarrow **$\sqrt{\quad}$** ，螢幕顯示 2.6457513， $\sqrt{7} \approx 2.6458$

(2) 依序按 **5** \Rightarrow **\div** \Rightarrow **7** \Rightarrow **=** \Rightarrow **$\sqrt{\quad}$** ，螢幕顯示 0.8451542， $\sqrt{\frac{5}{7}} \approx 0.8452$

(2) 依序按 **0** \Rightarrow **.** \Rightarrow **7** \Rightarrow **$\sqrt{\quad}$** ，螢幕顯示 0.83666， $\sqrt{0.7} \approx 0.8367$

Ex3.1：利用計算器，求下列各數的近似值(以四捨五入法求到小數點後第 4 位)

(1) $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{\frac{20}{3}}$ (3) $\sqrt{1.5}$

Ex3.11：試在一個有「 $\sqrt{\quad}$ 」鍵的計算器上操做下列各式，記錄螢幕顯示結果：

- (1)依序按 $3 \rightarrow \times \rightarrow 3 \rightarrow =$ ，螢幕顯示結果為_____
- (2)依序按 $3 \rightarrow \times \rightarrow =$ ，螢幕顯示結果為_____
- (3)依序按 $3 \rightarrow 8 \rightarrow \times \rightarrow =$ ，則螢幕顯示結果與下列哪一個算式相同？
(A) 3^2 (B) 8^2 (C) 38^2 (D) 83^2

重點 4：平方根 \sqrt{x} 的近似值求法(直式開方法)

意義：利用 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 原理，求 \sqrt{x} 的近似值方法，稱為直式開方法

例 4.1：試利用直式開方法，求下列各值(以四捨五入法求到小數點後第 2 位)：

- (1) $\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{14}$ (3) $\sqrt{148}$ (4) $\sqrt{1.26}$ (5) $\sqrt{21.5}$

Ex4.1：試利用直式開方法，求下列各值：

- (1) $\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{17}$ (3) $\sqrt{241}$ (4) $\sqrt{2.51}$ (5) $\sqrt{312.5}$

重點 5：平方根 \sqrt{x} 的近似值求法(十分逼近法)

1.意義：利用每十分位逼近 x 值一次的方法，稱為十分逼近法

2.步驟：以計算 $\sqrt{2}$ 為例

(1) $\because (\sqrt{2})^2 = 2$ ，即 $1 < \sqrt{2} < 2$

\therefore 在 1 和 2 之間分成 10 等分，並求出各等分點之值，如下表：

等分點 a	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
平方 a^2	1.21	1.44	1.69	1.96	2.25	2.56	2.89	3.24	3.61

$\Rightarrow 1.4^2 < (\sqrt{2})^2 < 1.5^2$ ，即 $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ ，得知 $\sqrt{2} \approx 1.4\dots$

(2) $\because 1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ ，在 1.4 和 1.5 之間分成 10 等分，並求出各等分點之值，如下表：

等分點 a	1.41	1.42	1.43	1.44	1.45	1.46	1.47	1.48	1.49
平方 a^2	1.9881	2.0164	2.0449	2.0736	2.1025	2.1316	2.1609	2.1904	2.2201

$\Rightarrow 1.41^2 < (\sqrt{2})^2 < 1.42^2$ ，即 $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ ，得知 $\sqrt{2} \approx 1.41\dots$

(3)同理： $1.414^2 < (\sqrt{2})^2 < 1.415^2$ ，即 $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$ ，得知 $\sqrt{2} \approx 1.414\dots$

依此方式進行，可求出 $\sqrt{2}$ 的近似值，此方法稱為十分逼近法

例 5.1：試以十分逼近法，求 $\sqrt{5}$ 的近似值(以四捨五入法求到小數點後第 1 位)：

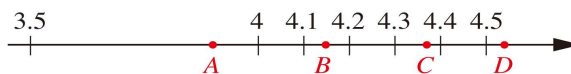
Ex5.1：試以十分逼近法，求 $\sqrt{13}$ 的近似值(以四捨五入法求到小數點後第 1 位)：

例 5.2：試估算 $\sqrt{120}$ 的整數部分為何？

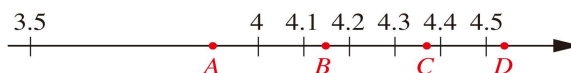
Ex5.2：試估算 $\sqrt{456}$ 的整數部分為何？

Ex5.21：若 $\sqrt{348}$ 、 $\sqrt{630}$ 的整數部分分別為 a 、 b ，試求數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$

例 5.3：下圖的數線上有 A、B、C、D、E 五點，其中哪個點所表示的數最接近 $\sqrt{19}$ ？



Ex5.3：下圖的數線上有 A、B、C、D 四點，其中哪個點所表示的數最接近 $\sqrt{11}$ ？



重點 6：平方根 \sqrt{x} 的近似值求法(查表法)

意義：利用乘方開方表，如右表

求 \sqrt{x} 的值或近似值方法，稱為查表法

例如：

當 $N=12$ 時，則在同一列中，可查得：

$$N^2 = 12^2 = \underline{144}$$

$$\sqrt{N} = \sqrt{12} \doteq \underline{3.464102}$$

$$\sqrt{10N} = \sqrt{120} \doteq \underline{10.95445}$$

同一列

N	N^2	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$
11	121	3.316 625	10.48809
12	144	3.464 102	10.95445
13	169	3.605 551	11.40175
14	196	3.741 657	11.83216
15	225	3.872 983	12.24745
16	256	4.000 000	12.64911
17	289	4.123 106	13.03840
18	324	4.242 641	13.41641
19	361	4.358 899	13.78405
20	400	4.472 136	14.14214

例 6.1：請利用上表查出下列各數的值或近似值(以四捨五入法求到小數點後第 4 位)：

(1) $\sqrt{180}$

(2) $\sqrt{225}$

Ex6.1：請利用上表查出下列各數的值或近似值(以四捨五入法求到小數點後第 4 位)：

(1) $\sqrt{19}$

(2) $\sqrt{130}$

(3) $\sqrt{14}$

(4) $\sqrt{150}$

例 6.2：請利用乘方開方表，查出下列各數的值或近似值(以四捨五入法求到小數點後第 2 位)：

(1) $\sqrt{45}$

(2) $\sqrt{450}$

(3) $\sqrt{2025}$

N	N^2	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$
41	1681	6.403124	20.24846
42	1764	6.480741	20.49390
43	1849	6.557439	20.73644
44	1936	6.633250	20.97618
45	2025	6.708204	21.21320
46	2116	6.782330	21.44761
47	2209	6.855655	21.67948
48	2304	6.928203	21.90890
49	2401	7.000000	22.13594
50	2500	7.071068	22.36068

Ex6.2：請利用乘方開方表，查出下列各數的值或近似值(以四捨五入法求到小數點後第 2 位)：

(1) $\sqrt{48}$ (2) $\sqrt{410}$ (3) $\sqrt{1764}$

N	N^2	\sqrt{N}	$\sqrt{10N}$
41	1681	6.403124	20.24846
42	1764	6.480741	20.49390
43	1849	6.557439	20.73644
44	1936	6.633250	20.97618
45	2025	6.708204	21.21320
46	2116	6.782330	21.44761
47	2209	6.855655	21.67948
48	2304	6.928203	21.90890
49	2401	7.000000	22.13594
50	2500	7.071068	22.36068

重點 7：平方根的意義

1. 意義：若一個數 x 的平方等於 a ，即 $x^2 = a$ ，則稱 x 為 a 的平方根(又稱為二次方根)

2. 性質：

(1) 每個正數 a 都有兩個平方根，一正一負，即若 $x^2 = a$ ，則 $x = \sqrt{a}$ 或 $-\sqrt{a}$ (或合併記為 $\pm\sqrt{a}$)

註： $\because (\sqrt{a})^2 = a, (-\sqrt{a})^2 = a, \therefore \sqrt{a}, -\sqrt{a}$ 都是 a 的平方根

(2) 0 是 0 的平方根，即 $x^2 = 0, \sqrt{0} = 0$

(3) 當 $a > 0$ 時， $\sqrt{a} > 0$ ，且 $-\sqrt{a}$ 是 \sqrt{a} 的相反數

例 7.1：寫出下列各數的相反數：

(1) $\sqrt{5}$ 的相反數為_____

(2) $\sqrt{16}$ 的相反數為_____

Ex7.1：寫出下列各數的相反數：

(1) $\sqrt{26}$ 的相反數為_____

(2) $-\sqrt{13}$ 的相反數為_____

(3) $-(-\sqrt{10})$ 的相反數為_____

例 7.2：寫出下列各數的平方根：

(1) 23

(2) 100

(3) $\frac{9}{25}$

(4) 0.04

Ex7.2：寫出下列各數的平方根：

(1) 51

(2) 196

(3) $\frac{1}{16}$

(4) 1.44

Ex7.21：寫出下列各數的平方根：

(1) $2\frac{14}{25}$

(2) $10\frac{39}{49}$

(3) $28\frac{9}{4}$

(4) $8\frac{28}{81}$

例 7.3：在下列空格中，填入適當的數：

(1) 1 的平方根為_____

(2) 0 的平方根為_____

(3) 29 的正平方根為_____、負平方根為_____

(4) 負數有沒有平方根？為什麼？

Ex7.3：介於 200 與 300 之間的正整數中，請列出有哪些數的平方根是整數。

例 7.4：若 -5 是 $2x-1$ 的平方根，試求 x 的值，並檢驗是否正確。

Ex7.4：若 5 是 $3x+2$ 的平方根，試求 x 的值。

Ex7.41：已知 $2a-1$ 的平方根是 ± 3 ， $3a+b-1$ 的平方根是 ± 4 ，試求 $a+2b$ 的平方根

例 7.5：求 56 的負平方根的值介於哪兩個連續整數之間？

Ex7.5：求 99 的負平方根的值介於哪兩個連續整數之間？