

# 2-1 函數與函數圖形

Are You Ready?

主題1 認識函數

主題2 函數值

主題3 函數圖形

重點整理

自我評量

一題多解



當  $y$  是  $x$  的函數時，每給定一個  $x$ ，就恰有一個  $y$  與它對應。若將此  $x$ 、 $y$  寫成數對  $(x, y)$  並當成一個坐標，然後在坐標平面上標出此坐標對應的點，將滿足此函數關係的所有點描畫出來，得到的圖形稱為此函數的圖形。



已知  $y$  是  $x$  的函數，其中  $x$  代表平年中的月分， $y$  代表該月分的天數，在坐標平面上畫出此函數圖形。

解

$x$  與  $y$  的對應關係如下表：

月分 $x$ (月)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
天數 $y$ (天)	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

將  $x$  的值當成橫坐標，其對應的函數值  $y$  當成縱坐標，則可得點坐標：

(1, 31)、(2, 28)、(3, 31)、(4, 30)、(5, 31)、(6, 30)、  
(7, 31)、(8, 31)、(9, 30)、(10, 31)、(11, 30)、(12, 31)，

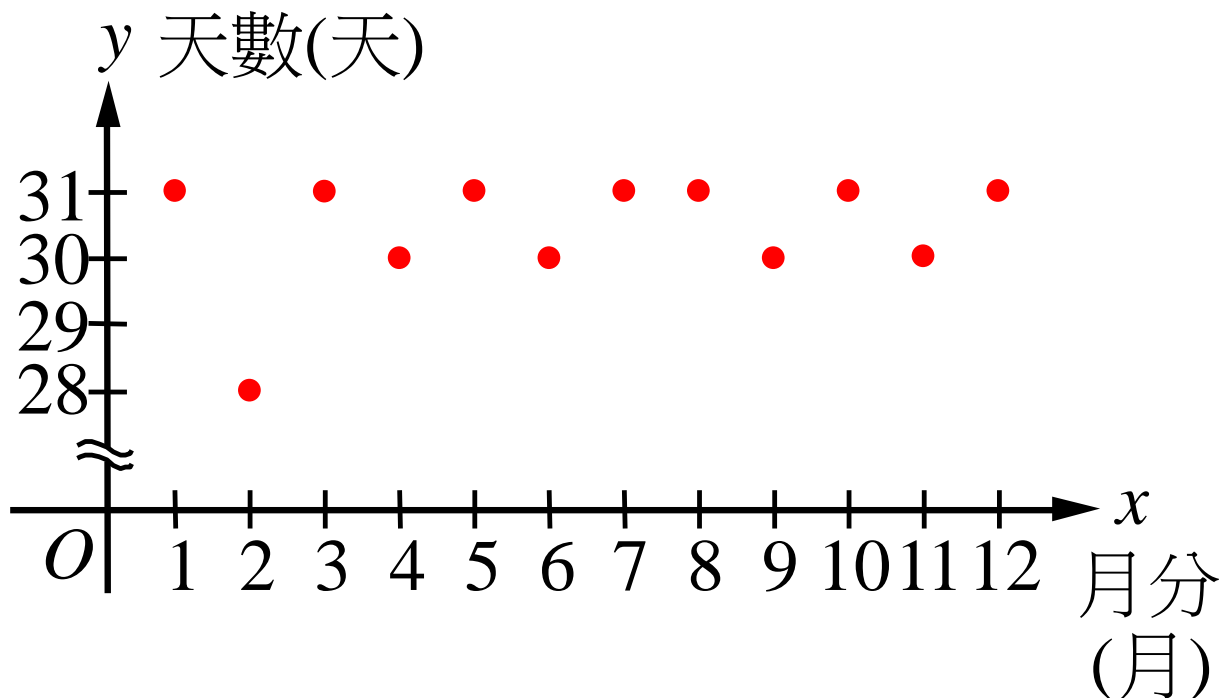


# 例 7 畫出函數圖形

搭配課本p66

已知  $y$  是  $x$  的函數，其中  $x$  代表平年中的月分， $y$  代表該月分的天數，在坐標平面上畫出此函數圖形。

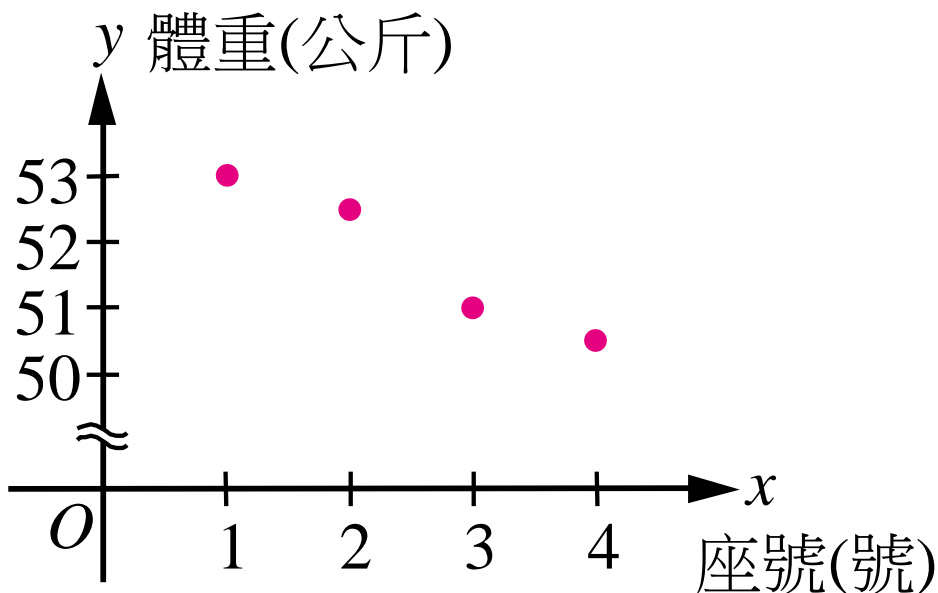
**解** 將這些點畫在坐標平面上，得到的圖形即為此函數圖形，如右圖。



下表是某班 4 位學生的體重，已知  $y$  是  $x$  的函數，其中  $x$  代表座號， $y$  代表  $x$  號學生的體重，在坐標平面上畫出此函數圖形。

座號 $x$ (號)	1	2	3	4
體重 $y$ (公斤)	53	52.5	51	50.5

**解** 如右圖



接下來，我們來探討一次函數與常數函數的圖形。



已知一次函數  $y=2x+1$ ，回答下列問題：

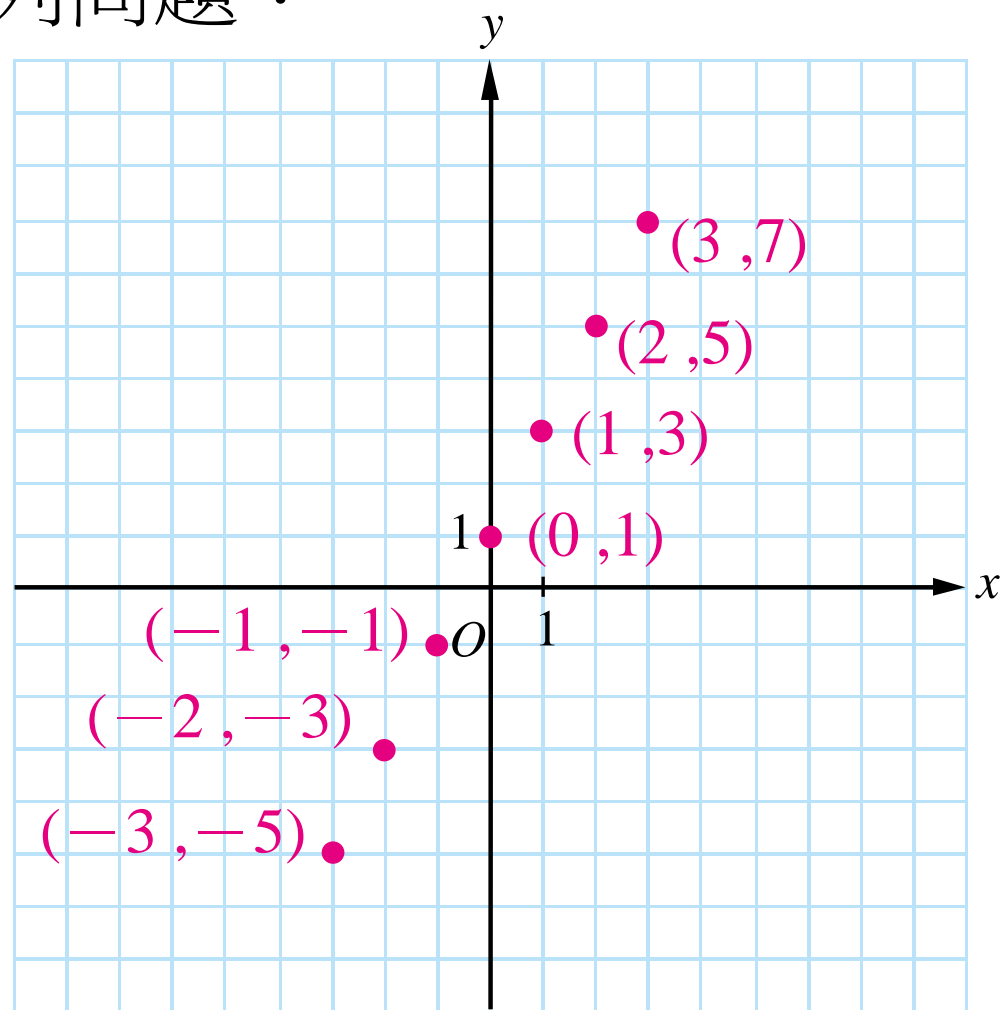
(1) 根據給定的  $x$ ，在下表的空格中填入對應的函數值  $y$ 。

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	-5	-3	-1	1	3	5	7



已知一次函數  $y=2x+1$ ，回答下列問題：

(2)承(1)，將每一組對應關係中的  $x$  當成橫坐標，其對應的函數值  $y$  當成縱坐標，並將這些  $(x, y)$  的點描到坐標平面上。

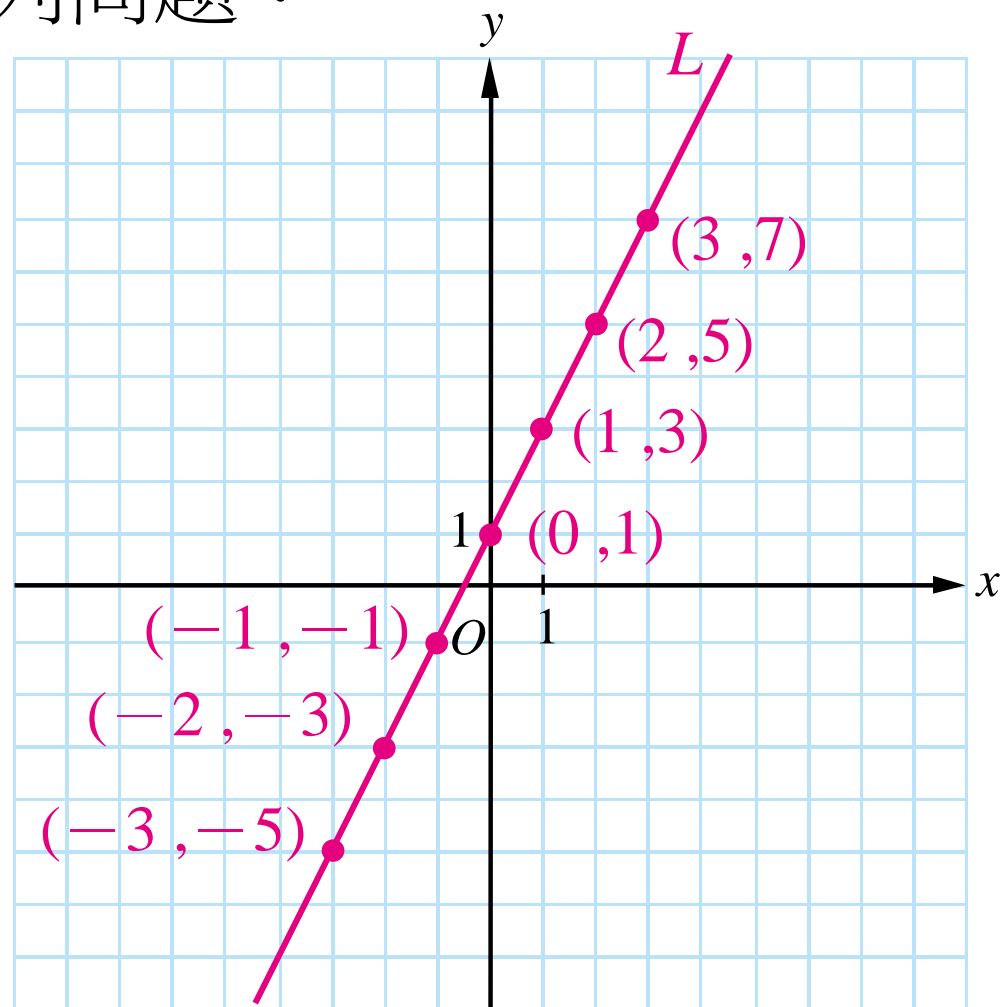




已知一次函數  $y=2x+1$ ，回答下列問題：

(3) 畫一條通過(2)中任意兩點的直線  $L$ ，並檢驗所描的點是否都落在直線  $L$  上？

如上圖，是

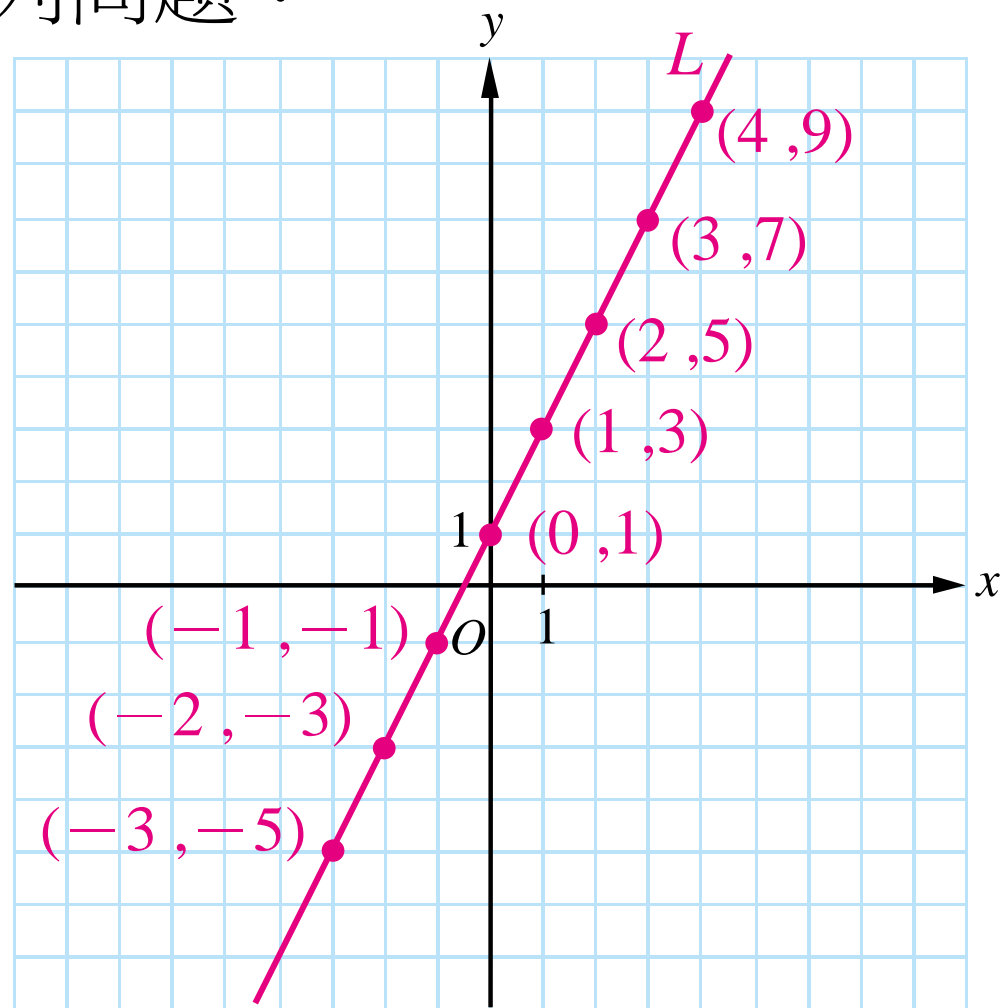


已知一次函數  $y=2x+1$ ，回答下列問題：

(4)承(3)，在直線  $L$  上再多取一點，寫出其橫坐標  $x$  和縱坐標  $y$  分別為多少？並檢驗是否滿足函數關係  $y=2x+1$ 。

$$x=4, y=9,$$

滿足  $y=2x+1$  函數關係  
(答案僅供參考)



由問題探索可知，一次函數  $y = 2x + 1$  的圖形是一條直線。



已知常數函數  $y=5$ ，回答下列問題：

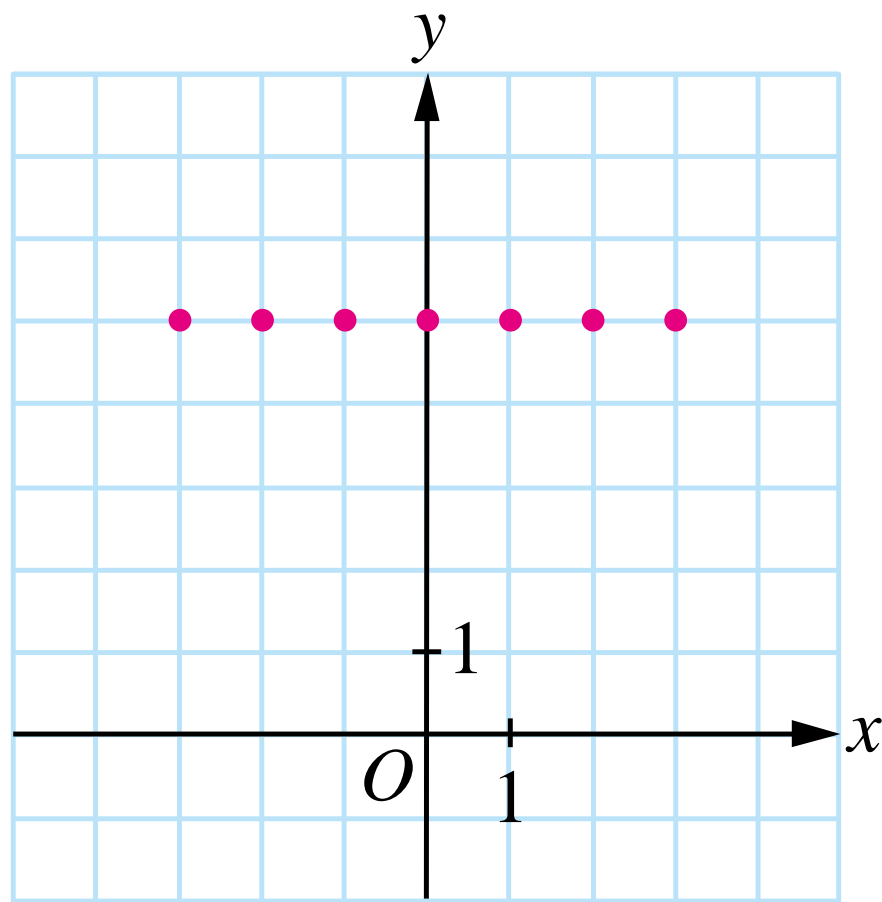
(1) 根據給定的  $x$ ，在下表的空格中填入對應的函數值  $y$ 。

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	5	5	5	5	5	5	5



已知常數函數  $y=5$ ，回答下列問題：

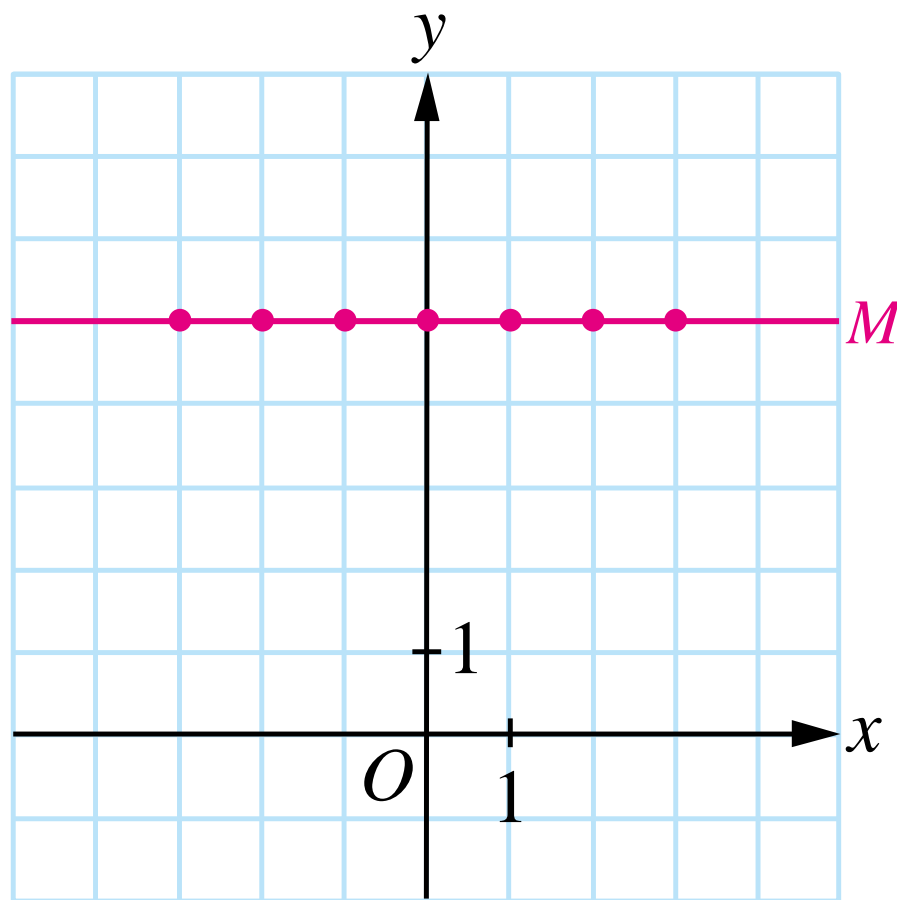
(2)承(1)，將每一組對應關係中的  $x$  當成橫坐標，其對應的函數值  $y$  當成縱坐標，並將這些  $(x, y)$  的點描到坐標平面上。



已知常數函數  $y=5$ ，回答下列問題：

(3) 畫一條通過(2)中任意兩點的直線  $M$ ，並檢驗所描的點是否都落在直線  $M$  上？

如上圖，是



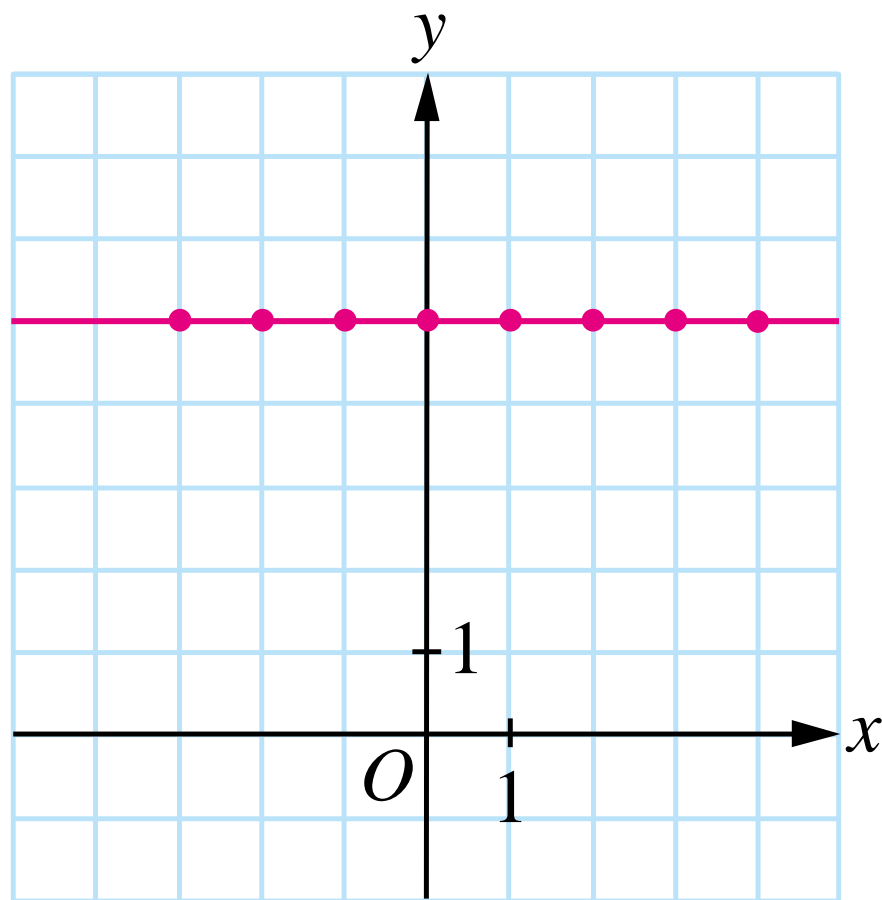
已知常數函數  $y=5$ ，回答下列問題：

(4)承(3)，在直線  $M$  上再多取一點，寫出其橫坐標  $x$  和縱坐標  $y$  分別為多少？並檢驗是否滿足函數關係  $y=5$ 。

$$x=4, y=5,$$

滿足  $y=5$  函數關係

(答案僅供參考)



由問題探索可知，常數函數  $y=5$  的圖形為一條平行  $x$  軸的直線。

事實上，形如  $y=ax+b$  的函數，在坐標平面上的圖形都是一條直線，我們可以利用在七年級學過的二元一次方程式圖形繪製的方法，只要找出兩組滿足  $y=ax+b$  的點  $(x, y)$ ，把它們描在坐標平面上，並將兩點用直線連起來，即為函數  $y=ax+b$  的圖形。





# 例 8 畫出 $y = ax + b$ 的函數圖形

搭配課本 p69

在坐標平面上畫出下列各函數的圖形。

(1)  $y = 3x - 1$

(2)  $y = 3$

**解**

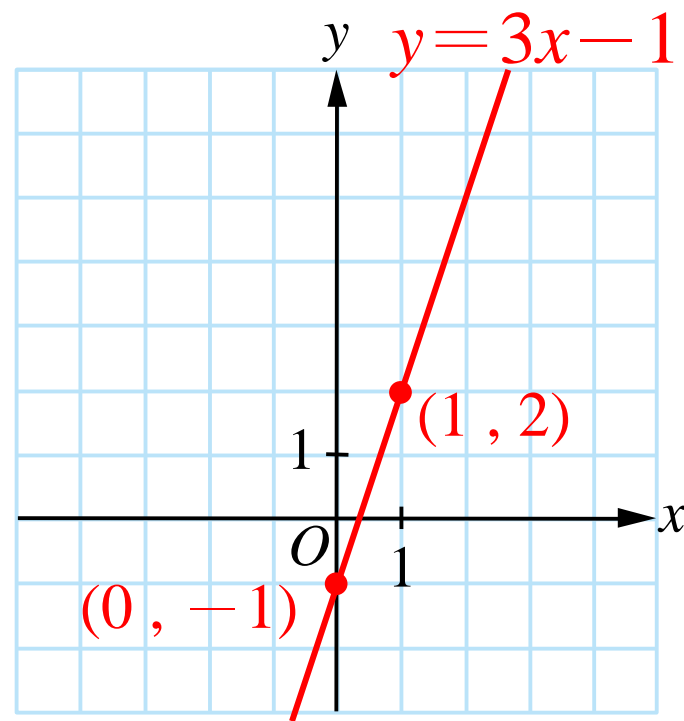
(1) 找出函數  $y = 3x - 1$  的兩組對應值，

$x$	0	1
$y$	-1	2

將  $(0, -1)$ 、 $(1, 2)$  描到坐標平面上，

並將兩點用直線連起來，

此直線即為函數  $y = 3x - 1$  的圖形。



# 例 8 畫出 $y = ax + b$ 的函數圖形

搭配課本 p69

在坐標平面上畫出下列各函數的圖形。

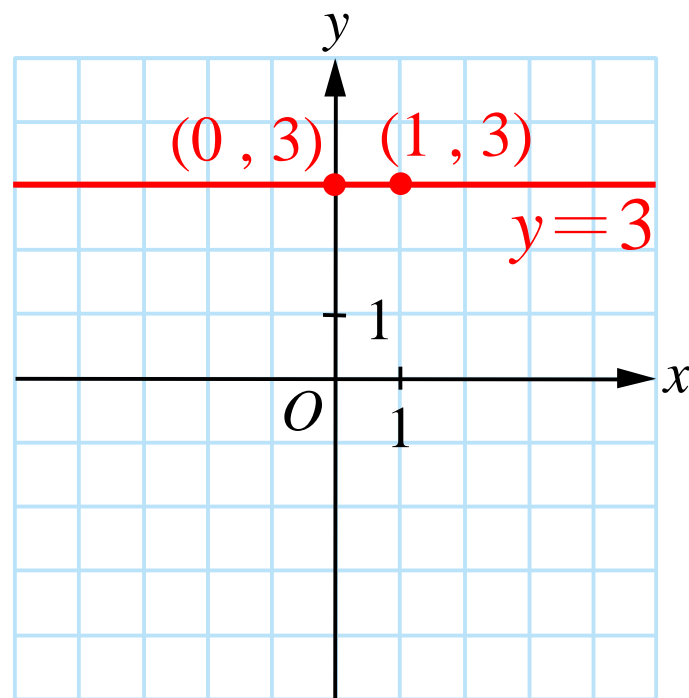
(1)  $y = 3x - 1$

(2)  $y = 3$

**解** (2) 找出函數  $y = 3$  的兩組對應值，

$x$	0	1
$y$	3	3

將  $(0, 3)$ 、 $(1, 3)$  描到坐標平面上，  
並將兩點用直線連起來，  
此直線即為函數  $y = 3$  的圖形。

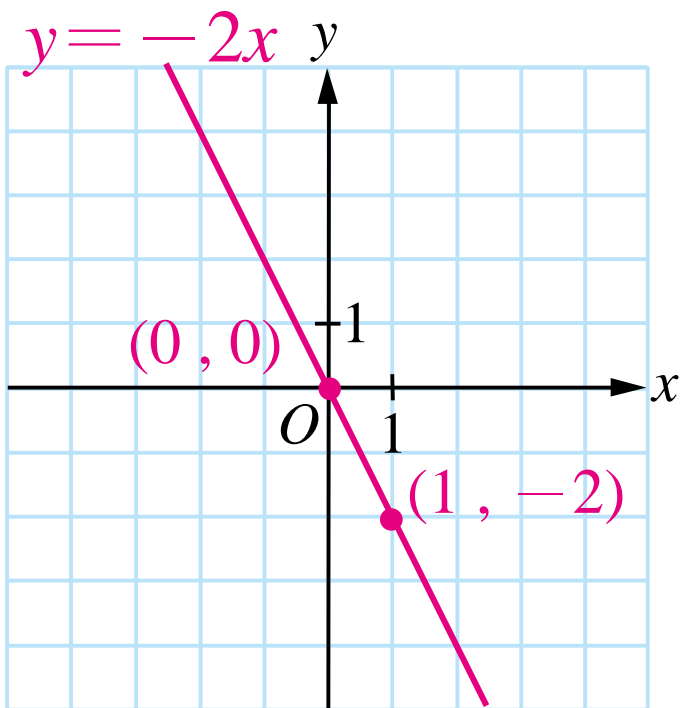




在坐標平面上畫出下列各函數的圖形。

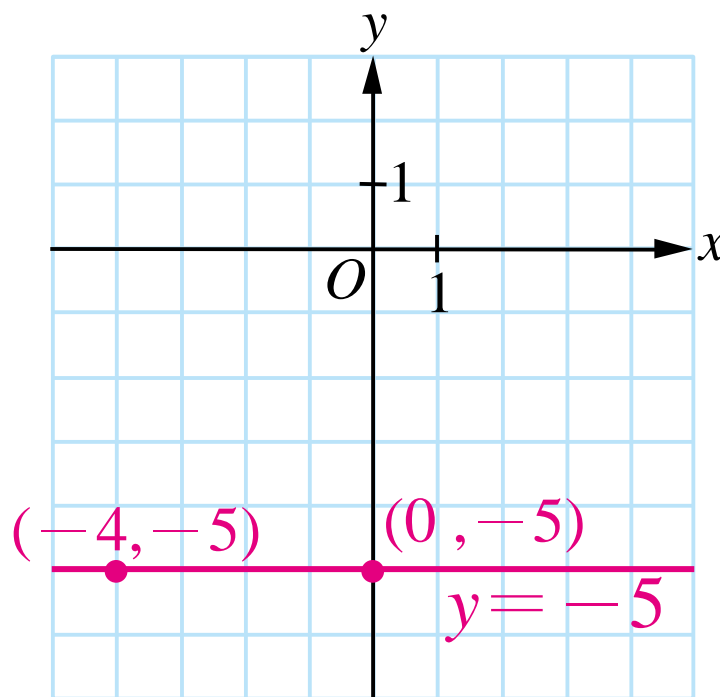
(1)  $y = -2x$

$x$	0	1
$y$	0	-2



(2)  $y = -5$

$x$	0	-4
$y$	-5	-5



若一個函數在坐標平面上的圖形是一條直線，就稱此函數為**線型函數**，因此由例 8 可知，一次函數與常數函數都是線型函數。

事實上，若函數在坐標平面上的圖形是一條直線，則此函數必為一次函數或常數函數。



Key point

線型函數

在函數  $y = ax + b$  中，

- (1) 當  $a \neq 0$  時， $y = ax + b$  為一次函數，其圖形是一條直線；而當  $b = 0$  時， $y = ax$  的圖形會通過原點。
- (2) 當  $a = 0$  時， $y = b$  為常數函數，其圖形是一條水平直線。

當知道函數  $y = ax + b$  圖形上的兩點，即可求出此函數。我們來看下面的例題。



# 例 9 由圖形求一次函數 $y = ax + b$

搭配課本 p70

已知函數  $y = ax + b$  的圖形為通過  $(0, -4)$ 、 $(-1, -1)$  兩點的直線，則此函數為何？

**解**

因為函數  $y = ax + b$  的圖形通過  $(0, -4)$ 、 $(-1, -1)$  兩點，將  $(0, -4)$ 、 $(-1, -1)$  分別代入  $y = ax + b$ ，

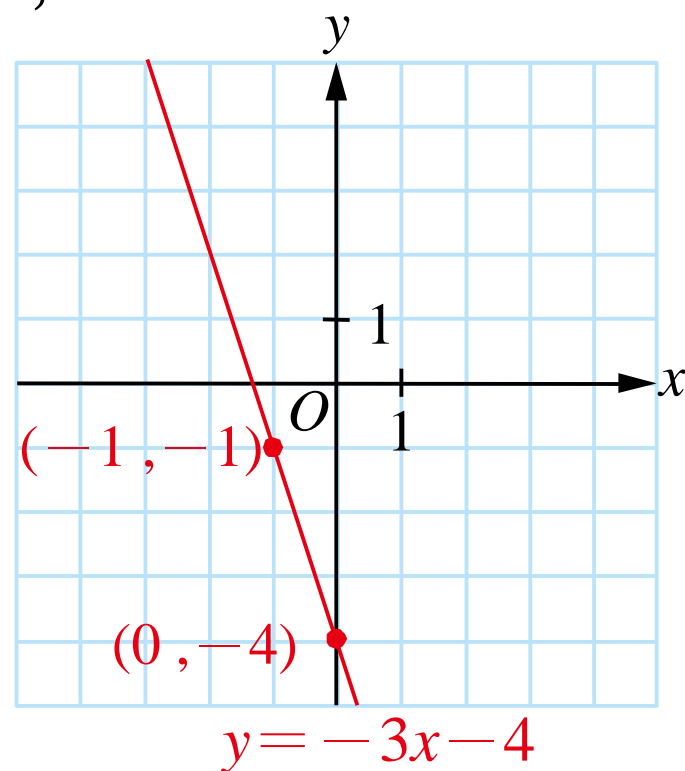
$$\text{得到} \begin{cases} -4 = 0 \times a + b \cdots \cdots \textcircled{1} \\ -1 = -a + b \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases},$$

由  $\textcircled{1}$  得  $b = -4$ ，

代入  $\textcircled{2}$  式得  $-1 = -a - 4$ ，

$$a = -3,$$

所以此函數為  $y = -3x - 4$ 。





已知函數 $y = ax + b$ 的圖形為通過 $(-2, 4)$ 、 $(2, 0)$ 兩點的直線，則此函數為何？

因為函數 $y = ax + b$ 的圖形通過 $(-2, 4)$ 、 $(2, 0)$ 兩點  
將 $(-2, 4)$ 、 $(2, 0)$ 分別代入 $y = ax + b$

$$\text{得到} \begin{cases} 4 = -2a + b \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 0 = 2a + b \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

解得 $a = -1$ 、 $b = 2$

所以此函數為 $y = -x + 2$



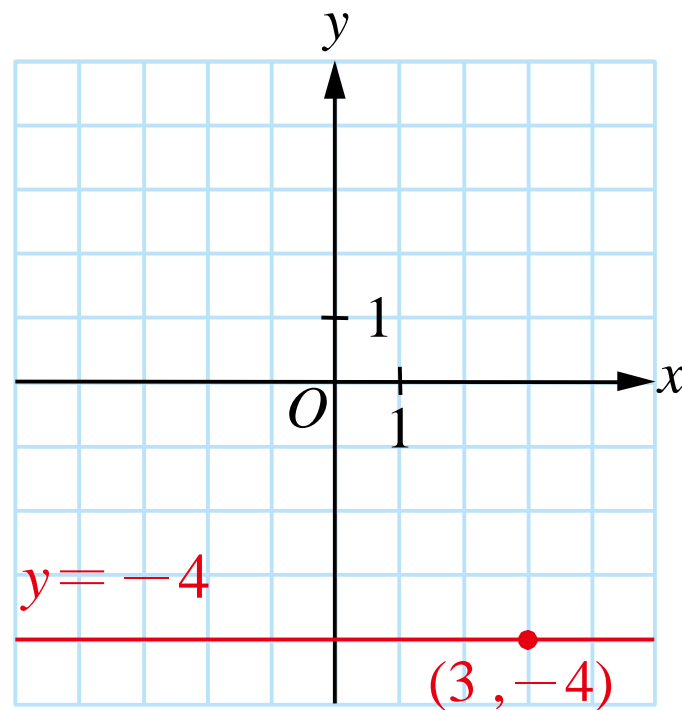
# 例 10 由圖形求常數函數 $y=b$

搭配課本p71

已知函數  $y=ax+b$  的圖形是平行  $x$  軸的直線，若圖形通過點  $(3, -4)$ ，則此函數為何？

**解**

因為函數  $y=ax+b$  的圖形是平行  $x$  軸的直線，  
可知此函數為常數函數，所以  $a=0$ ，  
又其圖形通過點  $(3, -4)$ ，  
所以此函數為  $y=-4$ 。





已知函數 $y = ax + b$ 的圖形是平行 $x$ 軸的直線，且其函數圖形通過點 $(-2, 1)$ ，則此函數為何？

**解**

因為函數 $y = ax + b$ 的圖形是平行 $x$ 軸的直線

可知此函數為常數函數，所以 $a = 0$

又其圖形通過點 $(-2, 1)$

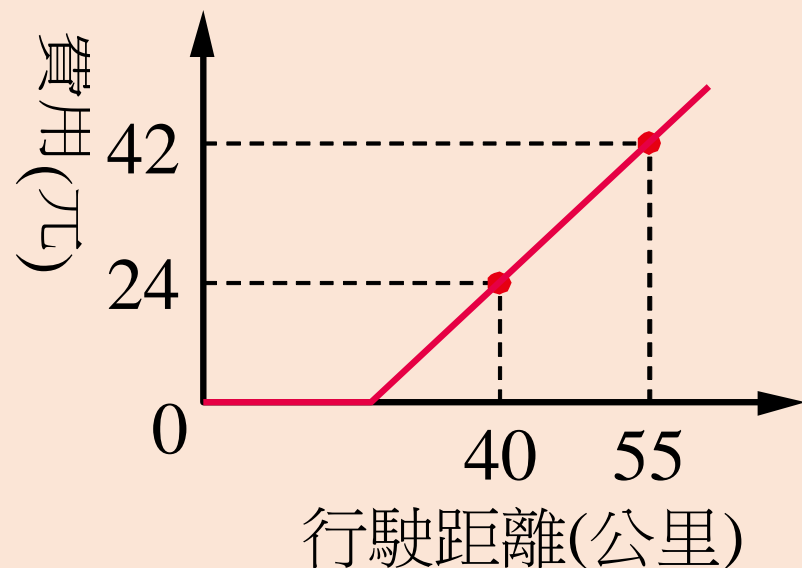
所以此函數為 $y = 1$



# 例 11 函數應用—費用問題

搭配課本p72

媽媽趁著假日帶小妍去六福村玩，當天開車行駛高速公路的收費如右圖，其計算方式為：每日行駛優惠里程數以內不收費，超過優惠里程數部分，費用與行駛距離成線型函數關係，則每日優惠里程數為多少公里？



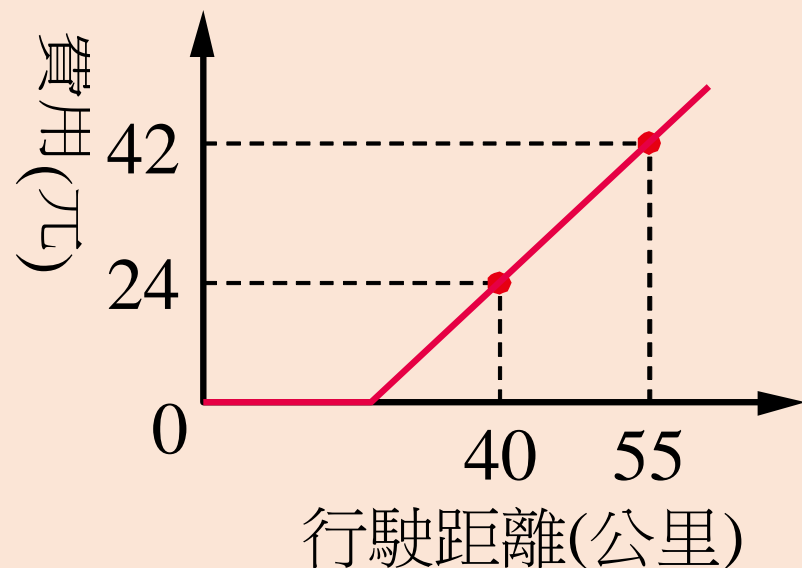
解

設  $x$  表示行駛距離(公里)， $y$  表示費用(元)，則超過優惠里程數的線型函數為  $y = ax + b (a \neq 0)$ ，由上圖可知，圖形通過  $(40, 24)$ 、 $(55, 42)$  這兩點，

# 例 11 函數應用—費用問題

搭配課本p72

媽媽趁著假日帶小妍去六福村玩，當天開車行駛高速公路的收費如右圖，其計算方式為：每日行駛優惠里程數以內不收費，超過優惠里程數部分，費用與行駛距離成線型函數關係，則每日優惠里程數為多少公里？



**解**

依題意可列出  $\begin{cases} 24 = 40a + b \\ 42 = 55a + b \end{cases}$ ，得  $a = \frac{6}{5}$ 、 $b = -24$ ，

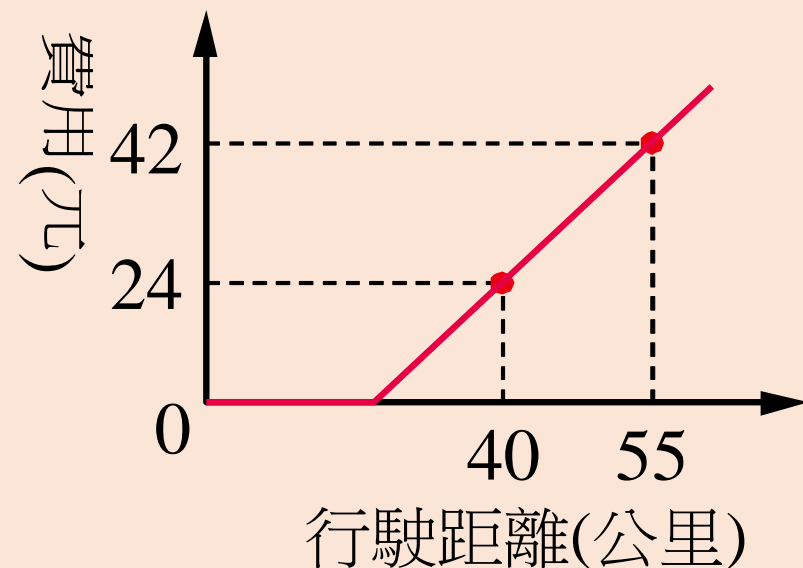
即線型函數  $y = \frac{6}{5}x - 24$ ，

當  $y = 0$  時， $x = 20$ ，所以每日優惠里程數為 20 公里。

# 例 11 函數應用—費用問題

搭配課本p72

媽媽趁著假日帶小妍去六福村玩，當天開車行駛高速公路的收費如右圖，其計算方式為：每日行駛優惠里程數以內不收費，超過優惠里程數部分，費用與行駛距離成線型函數關係，則每日優惠里程數為多少公里？

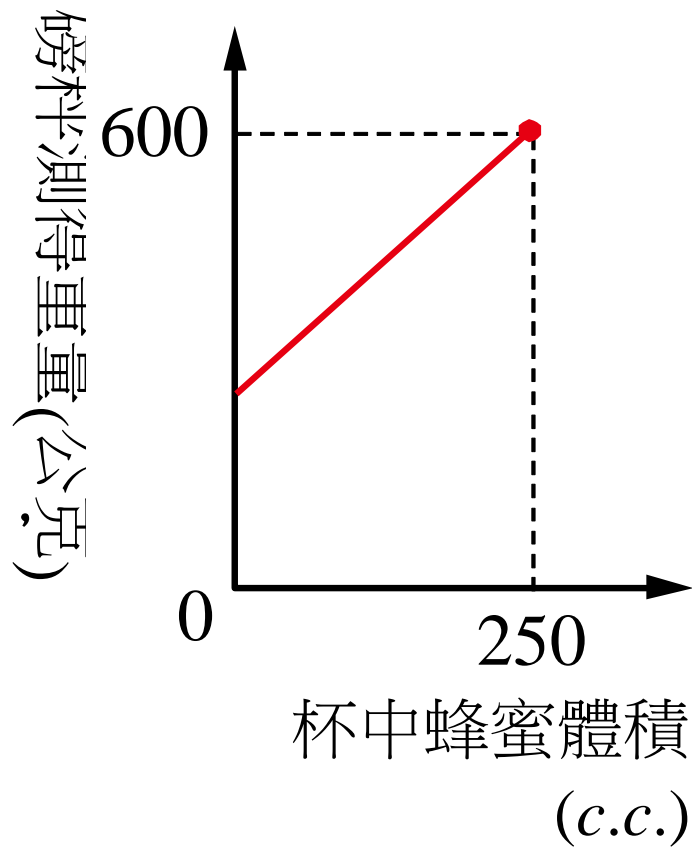


你知道嗎？

六福村主題遊樂園(簡稱六福村)，是一座位於臺灣新竹縣關西鎮的主題樂園，同時也是國內唯一的放養型野生動物公園。



將裝有  $250c.c.$  蜂蜜的玻璃杯放在已歸零的磅秤上，測得重量為  $600$  公克。已知用掉  $100c.c.$  的蜂蜜後，由磅秤測得剩下的重量為  $450$  公克，若磅秤測得的重量與杯中蜂蜜的體積成線型函數關係則蜂蜜用完後剩下的空玻璃杯重量是多少公克？



**解** 設  $x$  表示杯中蜂蜜的體積(c.c.)，  
 $y$  表示磅秤測得的重量(公克)

則磅秤測得的重量與杯中蜂蜜的體積之線型函數為  
 $y = ax + b (a \neq 0)$

依題意可列出  $\begin{cases} 600 = 250a + b \\ 450 = (250 - 100)a + b \end{cases}$ ，得  $a = \frac{3}{2}$ 、 $b = 225$

即線型函數為  $y = \frac{3}{2}x + 225$

當  $x = 0$  時， $y = \frac{3}{2} \times 0 + 225 = 225$

所以空玻璃杯的重量是 225 公克

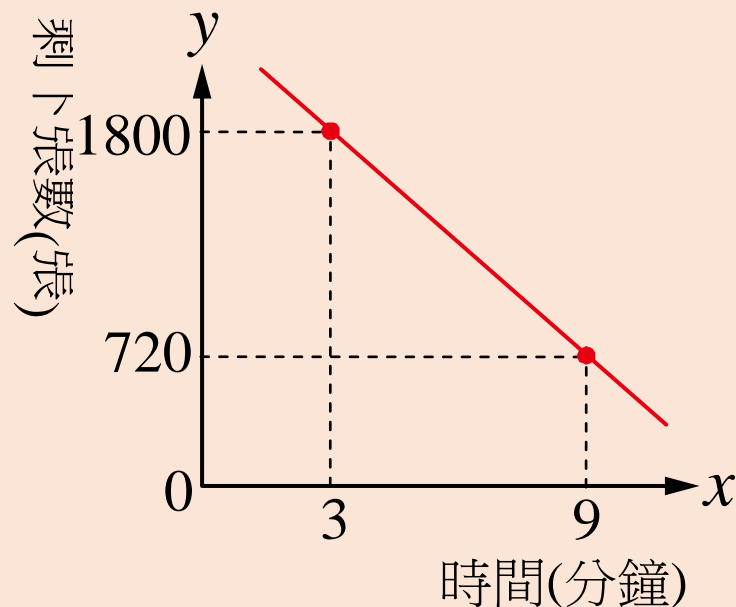


# 例 12 函數應用—數量問題

搭配課本p73

小靖影印資料，開始影印了  $x$  分鐘時，影印機中剩下  $y$  張紙，若  $y$  與  $x$  成線型函數關係，其圖形如右，則：

(1) 寫出  $x$ 、 $y$  的關係式。



**解**

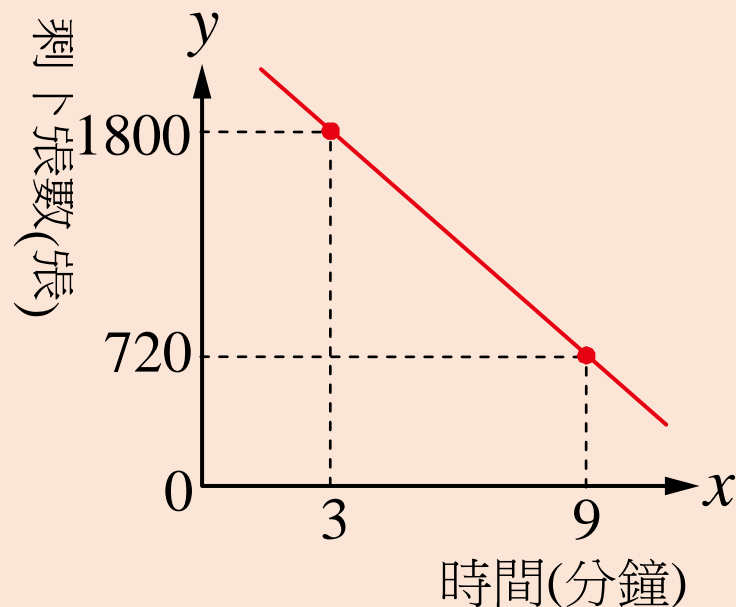
(1) 因為剩下的紙張數  $y$  與時間  $x$  的關係為線型函數關係，  
設函數  $y = ax + b$ ，

# 例 12 函數應用—數量問題

搭配課本p73

小靖影印資料，開始影印了  $x$  分鐘時，影印機中剩下  $y$  張紙，若  $y$  與  $x$  成線型函數關係，其圖形如右，則：

(1) 寫出  $x$ 、 $y$  的關係式。



**解**

因為函數圖形通過  $(3, 1800)$ 、 $(9, 720)$  兩點，

依題意可列出  $\begin{cases} 1800 = 3a + b \\ 720 = 9a + b \end{cases}$ ，得  $a = -180$ 、 $b = 2340$ ，

所以  $x$ 、 $y$  的關係式為  $y = -180x + 2340$ 。



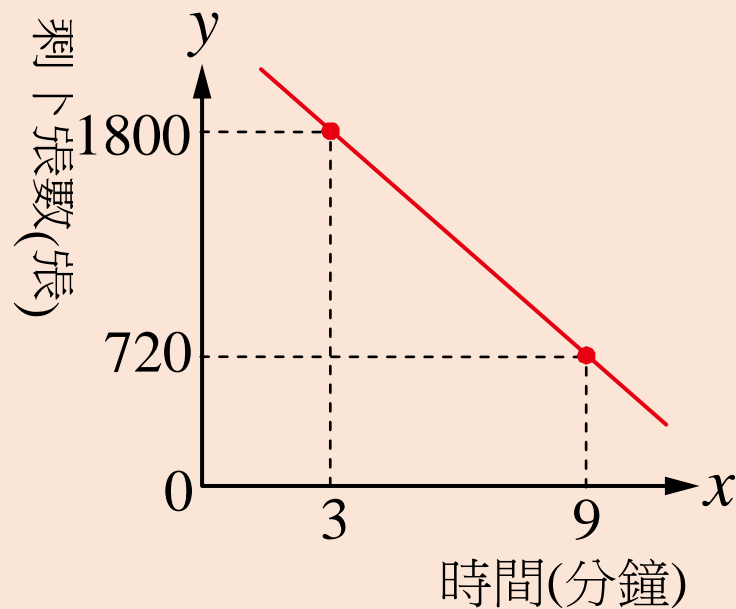


# 例 12 函數應用—數量問題

搭配課本p73

小靖影印資料，開始影印了  $x$  分鐘時，影印機中剩下  $y$  張紙，若  $y$  與  $x$  成線型函數關係，其圖形如右，則：

(2) 從開始影印到剛好將紙張印完，共花多少分鐘？



**解**

(2) 根據題意，將紙張印完即表示  $y=0$ ，

則  $0 = -180x + 2340$ ，得  $x = 13$ ，

所以從開始影印到剛好將紙張印完，共花 13 分鐘。

承例 12，回答下列問題：

- (1) 開始影印前共有多少張紙？
- (2) 若小靖從上午 9 點開始影印，則剛好印了一半的紙量時為幾點幾分幾秒？

**解**

(1) 開始影印前表示時間  $x=0$ ，得  $y=2340$ ，  
所以有 2340 張紙

(2) 印了一半的紙量，表示剩下張數為  $\frac{1}{2} \times 2340 = 1170$  張  
則  $1170 = -180x + 2340$ ，得  $x = 6.5$   
所以剛好印了一半的紙量時為上午 9 點 6 分 30 秒

