

## 3

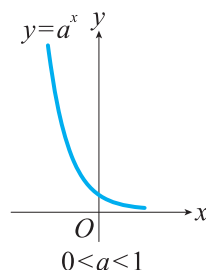
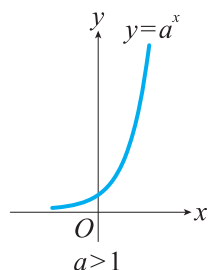
## 指數函數

## 主題一

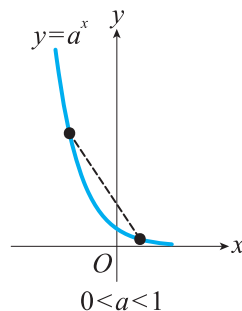
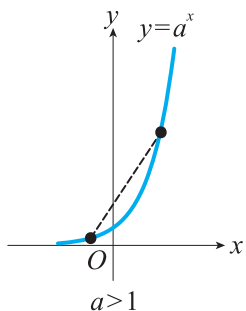
## 指數函數及其圖形

(搭配課本 P.50~P.56)

- 定義：設  $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，且  $x$  是任意實數，函數  $y = f(x) = a^x$  稱為以  $a$  為底數的指數函數。
- 設  $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，指數函數  $y = a^x$  的圖形如下。



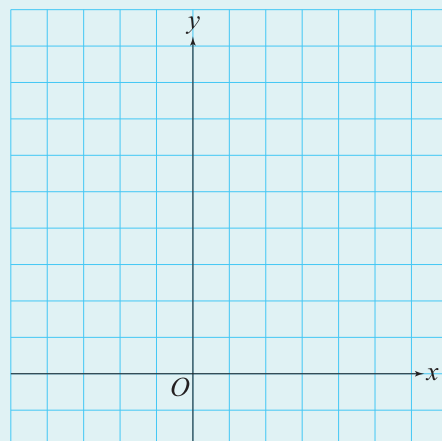
- 指數函數  $y = a^x$  的圖形特徵：
  - 因為  $a^0 = 1$ ，所以圖形會過點  $(0, 1)$ 。
  - 圖形都在  $x$  軸上方，且  $x$  軸為其漸近線。
  - ① 當  $a > 1$  時，圖形由左往右逐漸上升，即  $x$  愈大， $y$  愈大（也就是說，若  $\alpha > \beta$ ，則  $a^\alpha > a^\beta$ ），並稱這樣的函數為**嚴格遞增函數**。  
 ② 當  $0 < a < 1$  時，圖形由左往右逐漸下降，即  $x$  愈大， $y$  愈小（也就是說，若  $\alpha > \beta$ ，則  $a^\alpha < a^\beta$ ），並稱這樣的函數為**嚴格遞減函數**。
  - 函數  $y = a^x$  與  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$  的圖形對稱於  $y$  軸。
  - 圖形上任相異兩點所連成的線段都在函數圖形的上方，稱函數圖形的凹口向上。



- 指數函數  $y = a^x$  的定義域為全體實數  $\mathbb{R}$ ，且值域為所有正實數。

### 例題 1 【配合課本例 1】

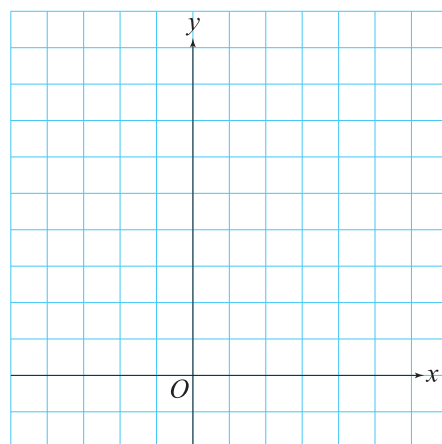
在右圖方格紙中描繪指數函數  $y = 2^x$  的圖形。



解 ▶

### 演練 1

在右圖方格紙中描繪指數函數  $y = 3^x$  的圖形。



解 ▶

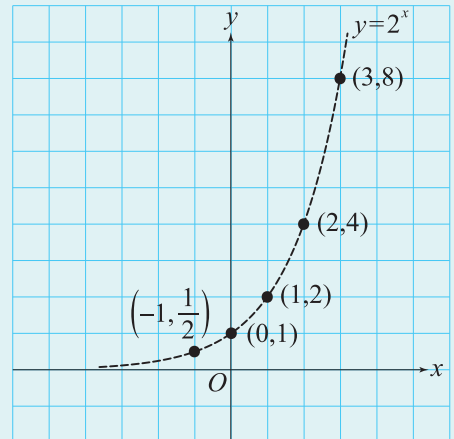
**例題 2**

【配合課本例 2】

已知  $y = a^x$  的圖形與  $y = 2^x$  的圖形對稱於  $y$  軸。

(1) 利用  $y = 2^x$  的圖形，畫出  $y = a^x$  的圖形。

(2) 觀察圖形推測  $a$  的值。



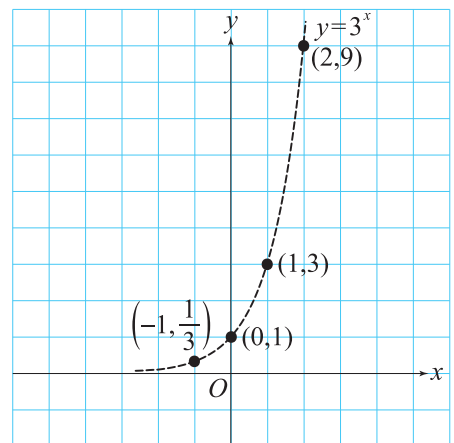
解 ▶

**演練 2**

已知  $y = a^x$  的圖形與  $y = 3^x$  的圖形對稱於  $y$  軸。

(1) 利用  $y = 3^x$  的圖形，畫出  $y = a^x$  的圖形。

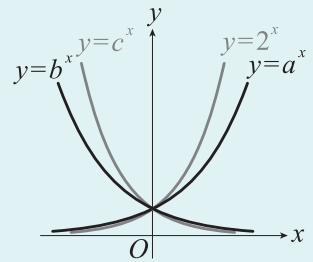
(2) 觀察圖形推測  $a$  的值。



解 ▶

**例題 3** 【配合課本例 3】

指數函數  $y = a^x$ 、 $y = b^x$ 、 $y = c^x$  與  $y = 2^x$  的圖形如右所示，且  $y = c^x$  與  $y = 2^x$  的圖形對稱於  $y$  軸。選出所有正確的選項。

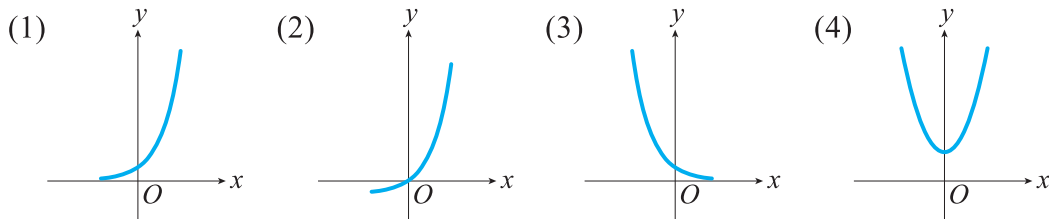


- (1)  $a > 2$       (2)  $1 < a < 2$       (3)  $b = \frac{1}{2}$       (4)  $b > c$ 。

解 ▶

**演練 3**

設  $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，下列圖形中，哪些可能是指數函數  $y = a^x$  的圖形？

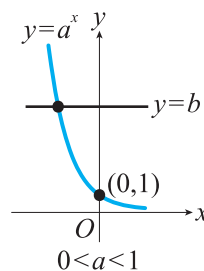
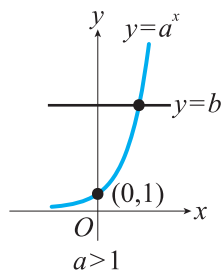


解 ▶

**主題二 指數方程式**

(搭配課本 P.57~P.60)

- 指數方程式  $a^x = b$  的解即為指數函數  $y = a^x$  與水平線  $y = b$  交點的  $x$  坐標。
- 因為指數函數  $y = a^x$  的圖形與  $x$  軸上方的任意水平線都恰有一個交點，所以若  $a^\alpha = a^\beta$ ，則  $\alpha = \beta$ 。



**說例** 當  $3^x = 3^2$  時，可得  $x = 2$ 。

**例題 4** 【配合課本例 4】

解下列各方程式：

(1)  $3^{3x} = 3^{x+2}$  。

(2)  $(\sqrt{3})^{3x+2} = 27\sqrt{3}$  。

解▶

**演練 4 - 1**

解方程式  $(\sqrt{8})^{x+1} = 16\sqrt{2}$  。

解▶

**演練 4 - 2**

解方程式  $4^{3x^2} = 2^{10x+4}$  。

解▶

**例題 5** 【配合課本例 5】

(1) 設  $t = 2^x$ ，試以  $t$  表示  $2^{2x+1}$  與  $2^{x-2}$ 。

(2) 解方程式  $2^{2x+1} - 33 \times 2^{x-2} + 1 = 0$ 。

解 ▶

**演練 5**

(1) 設  $t = 3^x$ ，試以  $t$  表示  $9^{-x}$  與  $3^{1-x}$ 。

(2) 解方程式  $9^{-x} - 2 \times 3^{1-x} - 27 = 0$ 。

解 ▶

## 例題 6

【配合課本例 6】

在  $a$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) 的環境溫度下，物體初始溫度為  $b$  ( $^{\circ}\text{C}$ )，經過時間  $t$  (小時) 後的溫度將為  $f(t) = (b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{kt} + a$ ，其中  $k$  是常數，隨物體不同而定。某天上午八點警局發現一死者，測量其體溫為  $13^{\circ}\text{C}$ ，上午九點再次測量得其體溫為  $11^{\circ}\text{C}$ 。已知當天死者的環境溫度大約維持在  $10^{\circ}\text{C}$ ，且人體的正常溫度為  $37^{\circ}\text{C}$ ，求死者的死亡時間。

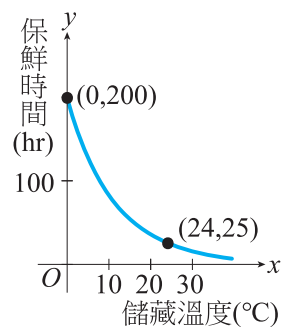
解

## 演練 6

鮮奶的保鮮時間會因其儲藏的溫度而有所不同。當儲藏溫度為  $x^{\circ}\text{C}$  時，可保鮮  $f(x) = k \times a^x$  小時，其中  $k$ 、 $a$  是常數。已知右圖為  $y = f(x)$  的部分圖形，

- 求  $k$  與  $a$  的值。
- 當室溫為  $32^{\circ}\text{C}$  時，求鮮奶的保鮮時間。

解



## 例題 7

【常考題】

求函數  $y = 4^x$  與  $y = 9 \times 2^{x-1} - 2$  兩圖形的交點坐標。

解 ▶

演練  7

求函數  $y = 4^x$  與  $y = 2^{3x+2}$  兩圖形的交點坐標。

【學測】

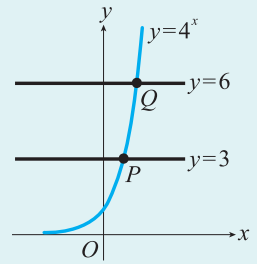
解 ▶



**例題 8**

【概念題】

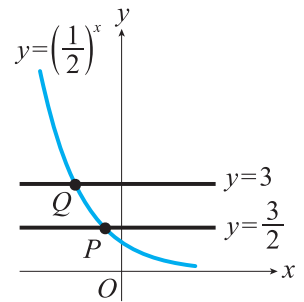
右圖為  $y=4^x$  的圖形。設  $P$ 、 $Q$  分別為直線  $y=3$ 、 $y=6$  與  $y=4^x$  的交點，求直線  $PQ$  的斜率。



解 ▶

**演練 8**

右圖為  $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$  的圖形。設  $P$ 、 $Q$  分別為直線  $y=\frac{3}{2}$ 、 $y=3$  與  $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$  的交點，求線段  $PQ$  的長度。



解 ▶

# 主題三 指數不等式

(搭配課本 P.61~P.63)

觀察指數函數  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的圖形，可得

$a$	$a > 1$	$0 < a < 1$
圖形		
遞增或遞減	嚴格遞增函數： 圖形由左往右逐漸上升。 (即 $x$ 愈大， $y$ 愈大)	嚴格遞減函數： 圖形由左往右逐漸下降。 (即 $x$ 愈大， $y$ 愈小)
性質	1. 若 $\alpha > \beta$ ，則 $a^\alpha > a^\beta$ 。 <b>說例</b> 因為 $1 > 0.7$ ，所以 $2^1 > 2^{0.7}$ 。	1. 若 $\alpha > \beta$ ，則 $a^\alpha < a^\beta$ 。 <b>說例</b> 因為 $1 > 0.7$ ，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{0.7}$ 。
	2. 若 $a^\alpha > a^\beta$ ，則 $\alpha > \beta$ 。 <b>說例</b> 若 $3^x > 3^2$ ，則 $x > 2$ 。	2. 若 $a^\alpha > a^\beta$ ，則 $\alpha < \beta$ 。 <b>說例</b> 若 $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^2$ ，則 $x < 2$ 。

## 例題 9 【配合課本例 7】

比較  $a = \sqrt[3]{4}$ 、 $b = \sqrt[4]{8}$ 、 $c = \sqrt{2\sqrt[3]{2}}$  三數的大小關係。

解

### 演練 9

比較  $a = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ 、 $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 、 $c = 2^{-\frac{1}{4}}$  三數的大小關係。

解 ▶

### 例題 10

【配合課本例 8】

比較  $a = (0.7)^{-\frac{3}{4}}$ 、 $b = 1$ 、 $c = (0.49)^{-\frac{2}{5}}$  三數的大小關係。

3

解 ▶

### 演練 10

比較  $a = 0.99^{-2.5}$ 、 $b = 0.99^{-1.5}$ 、 $c = 0.99^{-0.5}$  三數的大小關係。

解 ▶

**例題 11** 【概念題】

解不等式  $3^{x+2} < 3^{2x-1}$ 。

解 ▶

**演練 11**

解不等式  $5^{x^2+x} < 5^2$ 。

解 ▶

**例題 12** 【配合課本例 9】

解不等式  $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} < \left(\left(\frac{1}{5}\right)^x\right)^2$ 。

解 ▶

**演練 12**

解不等式  $\frac{1}{4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < 2$ 。

解 ▶

**例題 13** 【常考題】

解不等式  $4^x - 3 \times 2^x + 2 < 0$ 。

解▶

**演練 13**

解不等式  $2^{x+1} + 2^{2-x} - 6 < 0$ 。

解▶

**例題 14** 【常考題】

已知  $f(x) = 4 \times 3^x - 9^x$ ，且  $-1 \leq x \leq 2$ ，求  $f(x)$  的最大值與最小值。

解▶

### 演練 14

已知  $f(x) = 4^x - 6 \times 2^x$ ，且  $0 \leq x \leq 2$ ，求  $f(x)$  的最大值與最小值。

解 ▶

## 主題四 指數函數的應用

(搭配課本 P.64~P.66)

### 1. 半衰期：

是指放射性物質衰變至原來數量的一半所需的時間。若物質原有  $w_0$ ，半衰期  $t$  (時間單位)，

則經過  $x$  (時間單位) 後剩下的數量為  $w_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{t}}$ 。

### 2. 複利本利和的計算公式：

若本金為  $P$  元，每期利率為  $r\%$ ，期數為  $n$ ，本利和為  $S$ ，採複利計息，則  $S = P(1+r\%)^n$ 。


### 例題 15

【配合課本例 10】

◆ 當某機構發生碘 131 輻射外洩時，原子能委員會偵測該機構周圍環境的碘 131 的殘留量為 1320 單位； $n$  天後 ( $n$  為正整數)，在同一地點偵測到碘 131 的殘留量低於 165 單位。已知碘 131 的半衰期為 8 天，求  $n$  的最小值。

解 ▶


### 演練 15

 某食品實驗室混合甲、乙兩種菌製成一種新食品。調查發現：當乙菌個數是甲菌個數的千倍以上時，新食品才受歡迎。已知甲菌一日後增加一倍（成為原來的兩倍），乙菌增加三倍（成為原來的四倍），現在取同數量的甲、乙兩種菌混合讓它們同時開始繁殖，問：至少幾天後才能製成受歡迎的食品？ 【聯招】

解▶

### 例題 16


【配合課本例 11】

 某人預計於 1 月初從甲、乙兩家銀行中選一間存一筆錢，每月計息一次以複利計息。已知該年各銀行的月利率如右表。  
 問：當一年後期滿一次領回本利和時，哪一家銀行的本利和最多？

月份 \ 銀行	甲銀行	乙銀行
1 月~4 月	0.3%	0.3%
5 月~8 月	0.3%	0.4%
9 月~12 月	0.3%	0.2%

解▶

### 演練 16

 小華準備向銀行貸款 3 百萬元當做創業基金，其年利率為 3%，約定三年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利（每年複利一次）計息還款，但給小華創業優惠改以單利計息還款。問在此優惠下，小華在三年期滿還款時可以比一般複利計息少繳多少錢？

【104 學測】

解▶



## 重要精選考題

(主：代表本單元對應的主題)

## 基礎題

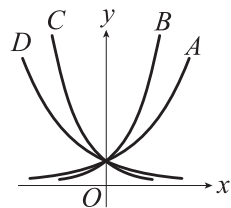
1. 關於兩函數  $y=2^x$  與  $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$  圖形的敘述，下列哪一個選項正確？
- (1) 兩圖形不相交 (2) 兩圖形對稱於  $x$  軸 (3) 兩圖形均在  $x$  軸上方
- (4)  $y=2^x$  的圖形恆在  $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$  的圖形上方。

主一

2. 關於函數  $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ，下列哪一個選項正確？
- (1)  $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$  的圖形和  $g(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$  的圖形對稱於  $y$  軸
- (2)  $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$  的圖形和  $h(x)=2^{-x}$  的圖形對稱於  $y$  軸
- (3)  $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$  的圖形和  $k(x)=2^x$  的圖形對稱於  $y$  軸
- (4)  $f(1000) > f(999)$ 。

主一

3. 如圖  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  分別為指數函數  $y=a^x$ 、 $y=b^x$ 、 $y=c^x$ 、 $y=d^x$  的圖形，比較  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  的大小。



主一

4. 解下列各方程式：

(1)  $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 7\sqrt{7}$ 。 (2)  $9^x = 3^{x^2+1}$ 。

主二



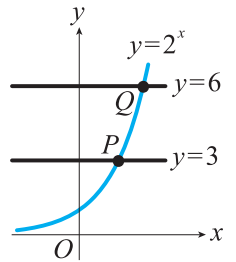
5. (1) 設  $t = 2^x$ ，試以  $t$  表示  $2^{2x}$  與  $2^{x-1}$ 。  
 (2) 解方程式  $2^{2x} - 9 \times 2^{x-1} + 2 = 0$ 。

主二

6. 求兩函數  $y = 9^x$  與  $y = 3^{3x-1}$  的圖形交點坐標。

主二

7. 右圖為  $y = 2^x$  的圖形。設  $P$ 、 $Q$  分別為直線  $y = 3$ 、 $y = 6$  與  $y = 2^x$  的交點，求  $\overline{PQ}$  的長度。



主二

8. 問：下列四個數何者最小？

【學測（修）】

(1)  $2^{\frac{1}{3}}$  (2)  $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$  (3)  $2^{-\frac{1}{4}}$  (4)  $8^{-\frac{1}{3}}$ 。

主三

9. 解下列各不等式：

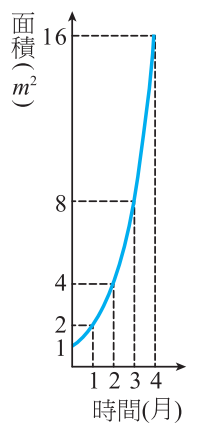
(1)  $7^{x^2} > 1$ 。 (2)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+3}$ 。

主三

10. 解不等式  $9^x + 3^x - 2 \geq 0$ 。

主三

- ◆ 11. 右圖是某植物生長蔓延的面積  $y$  (平方公尺) 與時間  $x$  (月) 的關係圖。已知其關係為指數函數  $y = c \times a^x$ ， $c$  為常數，求  $a$  與  $c$  的值。



主四

12. 已知某放射性物質，經過 12 天後質量會衰變成原來的  $\frac{1}{8}$ 。現有此放射性物質 400 公克，問：經過多少天後，此放射性物質會剩下 25 公克？

主四

## 進階題

1. 設  $67^x = 27$ ， $603^y = 81$ ，求  $\frac{3}{x} - \frac{4}{y}$  的值。



2. 坐標平面上滿足  $10^x \times 100^y = 1000$  的所有點  $(x, y)$  所形成的圖形為下列哪一個選項？  
(1) 一個點 (2) 一直線 (3) 兩直線 (4) 一個二次多項式的函數圖形 (5) 一個圓。

【103 指乙】



3. 已知  $x$  為任意實數，求  $27^{\left(x^2 + \frac{2}{3}\right)}$  的最小值。  
(1) 3 (2)  $3\sqrt{3}$  (3) 9 (4) 27 (5)  $81\sqrt{3}$ 。

【學測】



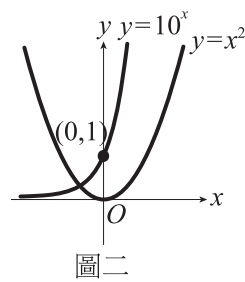
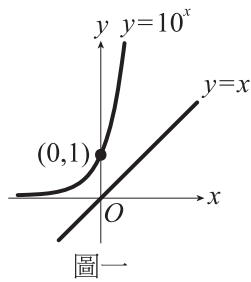
4. 比較下列各組數的大小關係：

$$(1) a = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}、b = 2^{0.4}、c = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}。$$

$$(2) a = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2.5}、b = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}、c = (1.5)^{\sqrt{2}}。$$



5. 觀察圖一與圖二，選出正確的選項。



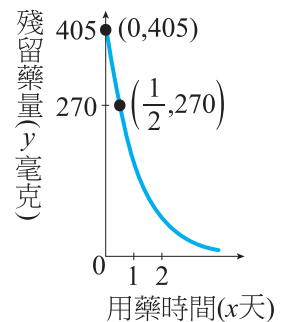
【學測(修)】

- (1)  $10^x = x$  有實數解 (2)  $10^x = x^2$  有實數解 (3)  $10^x > x$  恆成立  
 (4) 當  $x > 0$  時， $10^x > x^2$  恆成立。



◆ 6. 某種農藥在農作物上單位面積的殘留藥量會隨著時間遞減，且用藥經過  $x$  天後，單位面積的殘留藥量為  $f(x) = k \times a^x$  毫克，其中  $k$ 、 $a$  是常數。已知右圖為  $y = f(x)$  的部分圖形。

- (1) 求  $k$  與  $a$  的值。  
 (2) 問：用藥 1.5 天後，單位面積的殘留藥量為多少毫克？





## 歷屆大考觀摩

1. 令  $a = 2.6^{10} - 2.6^9$ 、 $b = 2.6^{11} - 2.6^{10}$ 、 $c = \frac{2.6^{11} - 2.6^9}{2}$ 。請選出正確的大小關係。

- (1)  $a > b > c$  (2)  $a > c > b$  (3)  $b > a > c$  (4)  $b > c > a$  (5)  $c > b > a$ 。

【102 學測】【答對率 66%】



2. 放射性物質的半衰期  $T$  定義為每經過時間  $T$ ，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質  $A$ 、 $B$ ，開始紀錄時容器中物質  $A$  的質量為物質  $B$  的兩倍，而 120 小時後兩種物質的質量相同。已知物質  $A$  的半衰期為 7.5 小時，請問物質  $B$  的半衰期為幾小時？

- (1) 8 小時 (2) 10 小時 (3) 12 小時 (4) 15 小時 (5) 20 小時。

【105 學測】【答對率 54%】



3. 設  $a = 10^{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$ 、 $b = a^{\sqrt{2}}$ 。請選出正確的選項。

- (1)  $1 < a$  (2)  $a^2 < b^{\sqrt{3}}$  (3)  $10^{0.4} < b < 10^{0.5}$  (4)  $(ab)^{\sqrt{2}} < 10$ 。(  $\sqrt{2} \approx 1.414$  ) 【105 指乙 (修)】



4. 坐標平面上，在函數圖形  $y = 2^x$  上，標示  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四個點，其  $x$  坐標分別為  $-1$ 、 $0$ 、 $1$ 、 $2$ 。請選出正確的選項。

- (1) 點  $B$  落在直線  $AC$  下方 (2) 在直線  $AB$ 、直線  $BC$ 、直線  $CD$  中，以直線  $CD$  的斜率最大  
(3)  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四個點，以點  $B$  最靠近  $x$  軸 (4) 直線  $y = 2x$  與  $y = 2^x$  的圖形有兩個交點  
(5) 點  $A$  與點  $C$  對稱於  $y$  軸。

【104 學測】【答對率 67%】



5. 根據過去長期統計資料顯示：某公司推銷員的年資  $x$  (年)，與每次推銷成功的機率  $y(x)$ ，

滿足下列關係式：
$$y(x) = \frac{2^{-3+x}}{1+2^{-3+x}}$$
。

(1) 化簡  $r(x) = \frac{y(x)}{1-y(x)}$ ，並說明  $r(x)$  的值隨  $x$  增大而增大 (即  $r(x)$  為遞增函數)。

(2) 說明年資 8 年 (含) 以上的推銷員，每次推銷不成功的機率小於 4%。

【指乙】

