隨堂練習　重新布題　重新布題　重新布題　重新布題

仿照問題探索的方法，求 $1+2+3+\cdots\cdots+99+100=$ ？

Ans

設 $S=1+2+3+\cdots\cdots+99+100$

$$\begin{array}{rl} & S=1+2+3+\cdots\cdots+99+100 \\ +) & S=100+99+98+\cdots\cdots+2+1 \\ \hline & 2S=101+101+101+\cdots\cdots+101+101=100\times101 \end{array}$$

所以 $S=\dfrac{100\times101}{2}=5050$

將一個數列的各項依次用「＋」號連接起來，就稱為一個**級數**。

將一個等差數列的各項依次用「＋」號連接起來，就稱為**等差級數**。

例如：「$5+8+11+14+17+20$」就是一個等差級數。

一般來說，若 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 為一等差數列，

則 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ 稱為等差級數，

而 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ 的值稱為此**等差級數的和，以符號 S_n 表示**，

即 $S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$。

如果有一等差級數為 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$，我們仿照問題探索的方法求此等差級數的和 S_n，如下：

因為等差級數的任意相鄰兩項，後項都比前項多一個公差 d，所以：

$$\begin{array}{rl} & S_n=a_1+(\overset{a_2}{a_1+d})+(\overset{a_3}{a_1+2d})+\cdots\cdots+(\overset{a_{n-2}}{a_n-2d})+(\overset{a_{n-1}}{a_n-d})+a_n \\ +) & S_n=a_n+(\overset{a_{n-1}}{a_n-d})+(\overset{a_{n-2}}{a_n-2d})+\cdots\cdots+(\overset{a_3}{a_1+2d})+(\overset{a_2}{a_1+d})+a_1 \\ \hline & 2S_n=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots\cdots+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)}_{n\text{ 組 }(a_1+a_n)} \end{array}$$

因此 $2S_n=n(a_1+a_n)$，即 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$。

Key point　等差級數的和

已知一等差級數，首項為 a_1，末項為 a_n，項數為 n，則等差級數的和

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{\text{項數}\times(\text{首項}+\text{末項})}{2}。$$

例 1　求等差級數的和　學習內容 N-8-5

求等差級數 $5+8+11+14+17+20$ 的和。

Ans

此級數共有 6 項，所以 $n=6$，

將 $a_1=5$，$a_n=20$，$n=6$，

代入 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，

得 $S_6=\dfrac{6\times(5+20)}{2}=75$，

所以此等差級數的和為 75。

Hint

$5+8+11+14+17+20$

25

25

25

隨堂練習　重新布題

求等差級數 $(-14)+(-11)+(-8)+(-5)+(-2)$ 的和。

Ans

此級數共有 5 項，所以 $n=5$

將 $a_1=-14$，$a_n=-2$，$n=5$

代入 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

得 $S_5=\dfrac{5\times[-14+(-2)]}{2}=-40$

所以此等差級數的和為 -40

例 2 已知首項、公差、末項，求項數及總和 學習內容 N-8-5

已知等差級數 $8+15+22+\cdots\cdots+92$，則：

(1) 此級數共有幾項？

(2) 此級數的和為多少？

Ans (1) 設此級數項數為 n，

由 $15-8=7$，可知其公差為 7，

將 $a_1=8$，$d=7$，$a_n=92$，代入 $a_n=a_1+(n-1)d$，

得 $92=8+(n-1)\times 7$，$n=13$，

所以此級數共有 13 項。

Ans (2) 由 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，得 $S_{13}=\dfrac{13\times(8+92)}{2}=650$，

所以此級數的和為 650。

隨堂練習 重新布題 重新布題

已知等差級數 $31+25+19+\cdots\cdots+(-41)$，則：

(1) 此級數共有幾項？

Ans 設此級數項數為 n

將 $a_1=31$，$d=25-31=-6$，$a_n=-41$，代入 $a_n=a_1+(n-1)d$

得 $-41=31+(n-1)\times(-6)$，$n=13$

所以此級數共有 13 項

(2) 此級數的和為多少？

Ans $S_{13}=\dfrac{13\times[31+(-41)]}{2}=-65$，所以此級數的和為 -65

當我們要求出等差級數的和，但不知道末項 a_n 為多少時，可以利用 1-1 節學過的 $a_n=a_1+(n-1)d$，直接代入等差級數和的公式中，得到：

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n[a_1+a_1+(n-1)d]}{2}=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$$

這樣就可以從首項、公差、項數的條件下，算出等差級數的和。

例如：等差級數 $4+7+10+13+\cdots\cdots$，首項為 4，公差為 3，

前 10 項的和 $S_{10}=\dfrac{10\times[2\times4+(10-1)\times3]}{2}=175$。

例 3 已知首項、項數、總和，求公差 學習內容 N-8-5

若等差級數的首項為 5，前 10 項的和為 365，則公差為多少？

Ans 設公差為 d，

將 $a_1=5$，$n=10$，$S_n=365$，代入 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$，

得 $365=\dfrac{10\times[2\times5+(10-1)d]}{2}$，

$730=10\times[10+9d]$，$d=7$，所以公差為 7。

Ans 設公差為 d，

將 $a_1=5$，$n=10$，$S_n=365$，代入 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，

得 $365=\dfrac{10\times(5+a_{10})}{2}$，$a_{10}=68$，

又 $a_{10}=5+(10-1)d=68$，$d=7$，所以公差為 7。

隨堂練習 重新布題 重新布題

若等差級數的首項為 3，前 9 項的和為 171，則公差為多少？

Ans 設公差為 d

將 $a_1=3$，$n=9$，$S_n=171$，代入 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$

得 $171=\dfrac{9\times[2\times3+(9-1)d]}{2}$，$342=9\times[6+8d]$，$d=4$

所以公差為 4

例 4　等差級數的應用　學習內容 N-8-5

已知等差級數 $43+39+35+\cdots\cdots$，求：

(1) 從第幾項開始為負數？

(2) 若前 m 項的和為最大，則 $m=$？

Ans (1) 設第 n 項為負數（即 $a_n<0$），

將 $a_1=43$，$d=39-43=-4$，

代入 $a_n=a_1+(n-1)d$，

得 $a_n=43+(n-1)\times(-4)<0$

$43-4n+4<0$

$-4n<-47$

$n>\frac{47}{4}=11\frac{3}{4}$，所以從第 12 項開始為負數。

Hint

第(1)題也可以這樣想：
$d=39-43=-4$，
由 $43\div4=10\cdots3$ 可知，
43 加上 10 個公差 (-4) 的結果是 3，
所以要加上 11 個公差才會出現負數，
即從第 12 項開始為負數。

Ans (2) 由(1)可知此等差級數自第 12 項起為負數，

即第 11 項可能為正數或 0。

$a_{11}=43+(11-1)\times(-4)=3$，

可知此等差級數前 11 項均為正數，

所以此等差級數前 11 項的和為最大，故 $m=11$。

隨堂練習　重新布題　重新布題

已知等差級數 $54+48+42+\cdots\cdots$，求：

(1) 從第幾項開始為負數？

Ans 設第 n 項為負數（即 $a_n<0$）

$a_1=54$，$d=48-54=-6$

$a_n=54+(n-1)\times(-6)=-6n+60<0$

得 $n>10$，所以從第 11 項開始為負數

(2) 若前 m 項的和為最大，則 $m=$？

Ans 因為 $a_{10}=54+(10-1)\times(-6)=0$

所以前 9 項的和與前 10 項的和相同

故 $m=9$ 或 10

主題 2　等差級數的應用問題

例 5　等差級數──堆疊問題　學習內容 N-8-5

下方是小翊與小妍參觀臺中花博「台開築空間積木概念館」時的對話：

根據圖中的對話，計算這面牆共有幾個積木？

Ans 由最底層有 23 個積木，可知這面牆共疊了 23 層。

將 $a_1=1$，$a_n=23$，$n=23$，代入 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，

得 $S_{23}=\frac{23\times(1+23)}{2}=276$，

所以這面牆共有 276 個積木。

隨堂練習　重新布題　重新布題

張邱建
（約西元 5 世紀中葉）北魏著名的數學家，《張邱建算經》為其著作。

中國在南北朝時有一本《張邱建算經》，書中有個問題：

「今有女子不善織，日減功遲。初日織五尺，末日織一尺。今三十日織訖，問織幾何？」試解出這道題目。

白話文：有一女子不擅織布，他每天所織的布都比前一天少固定的長度。已知第一天織了 5 尺，最後一天織了 1 尺。共織了 30 天，問他共織了多少尺布？

Ans 將 $a_1=5$，$a_n=1$，$n=30$，代入 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

得 $S_{30}=\frac{30\times(5+1)}{2}=90$

所以共織了 90 尺布