



畢氏螺線摺製

新北市林口國中/數學輔導團

交大AMA團隊 李政憲

jenshian@yahoo.com.tw



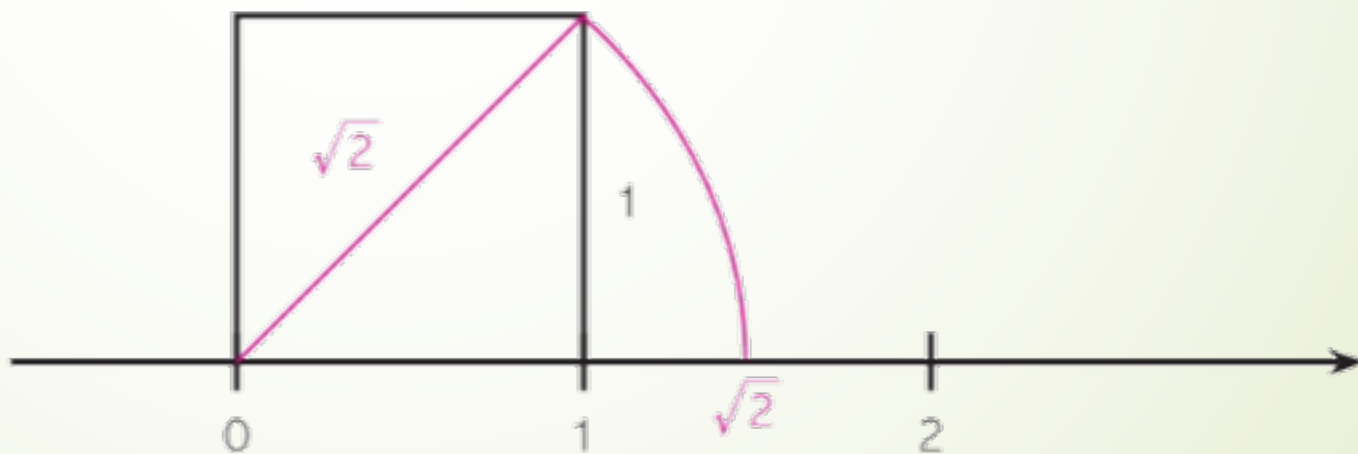
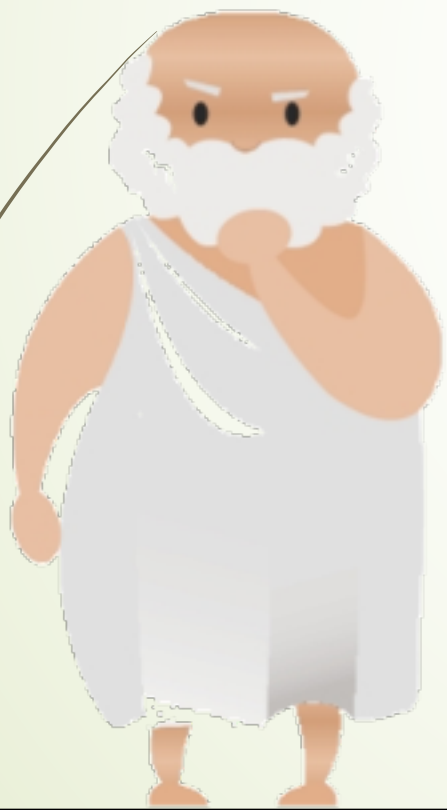
所以一般人仍稱畢氏定理。

無理數的起源

設計者：屏東女中 陳哲成 老師
林口國中 李政憲 老師

配合單元：二上 2-3 畢氏定理

公元前五世紀古希臘畢達哥拉斯（Pythagoras）學派的弟子希帕索斯（Hippasus）發現了一個驚人的事實，一個正方形的對角線與其一邊的長度是不可公度的。（即找不到一個長度 d ，使得正方形邊長與其對角線長同為長度 d 的整數倍）。

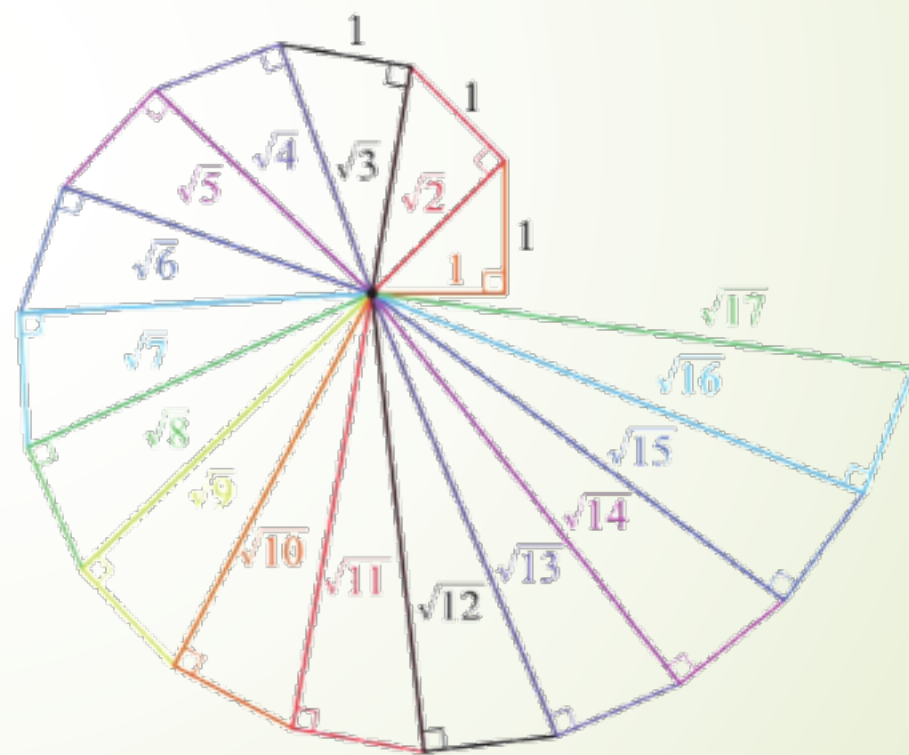


這一不可公度性與畢氏學派「萬物皆數」(指整數或整數的比例,即有理數)的哲理大相逕庭。這一發現使該學派領袖等人惶恐、惱怒,認為這將動搖他們哲學體系的一貫性。數百年之後,人們傳說當時希帕索斯因此被囚禁,受到百般折磨,最後竟被逼到沉舟身亡的懲處。

西奧多羅斯螺線 (The Spiral of Theodorus)

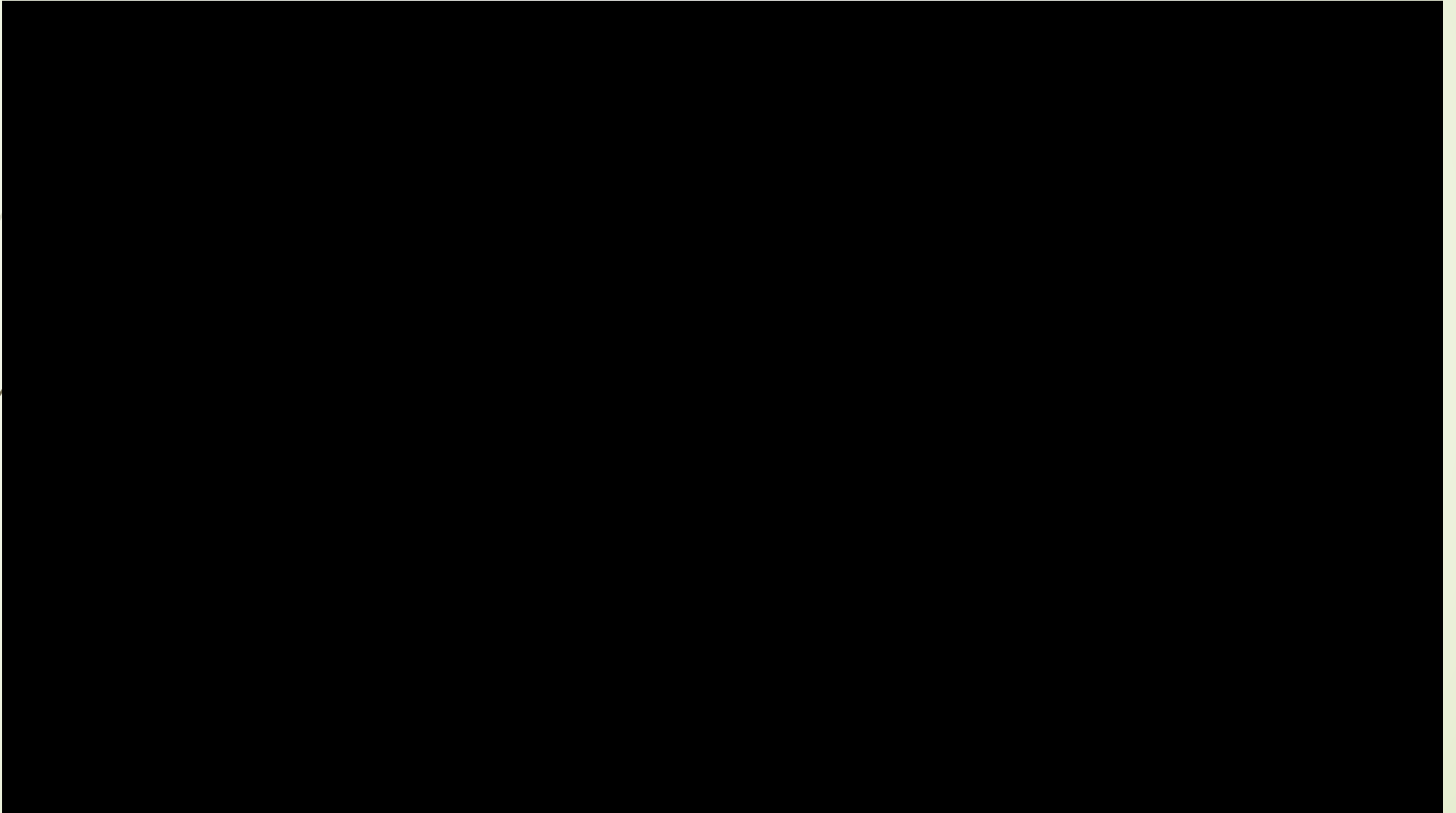
古希臘數學家西奧多羅斯 (Theodorus of Cyrene), 是當時少數研究無理數的學者。他是第一個用遞迴的方法, 將無理數 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{4}$ ……用線段長作圖呈現的人。亦即用第一個構造出來的等腰直角三角形與單位長, 可透過垂直方式持續構造出其他的根號 n 。西奧多羅斯螺線亦稱為「畢氏螺線 Pythagorean spiral」也稱為「平方根螺線」、「愛因斯坦螺線」。

接下來就讓我們從圖形中一起來探索這個螺線的特性, 並接著以摺紙完成它吧!



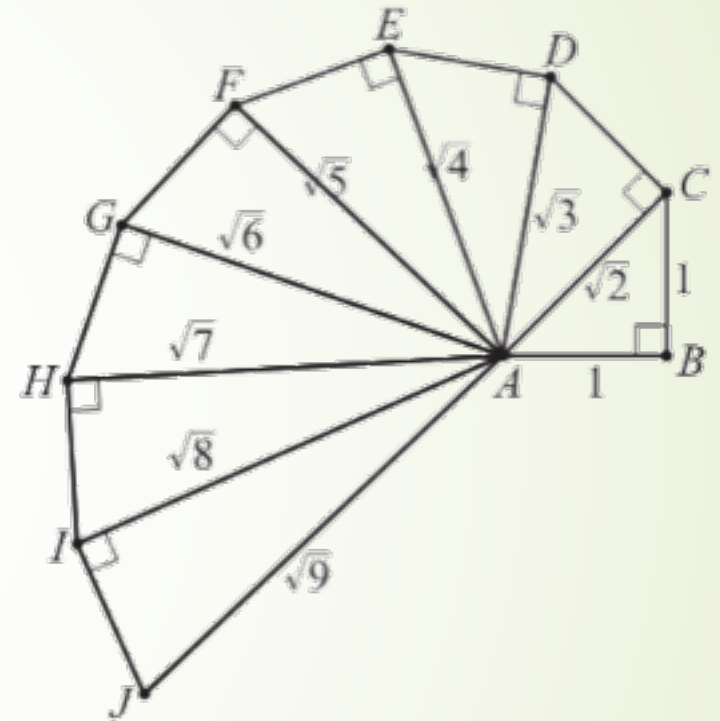


簡易畢氏螺線摺製（影印紙版本）



畢氏螺線學習單

右圖是我們完成的根號螺線成品：
請回答下列問題



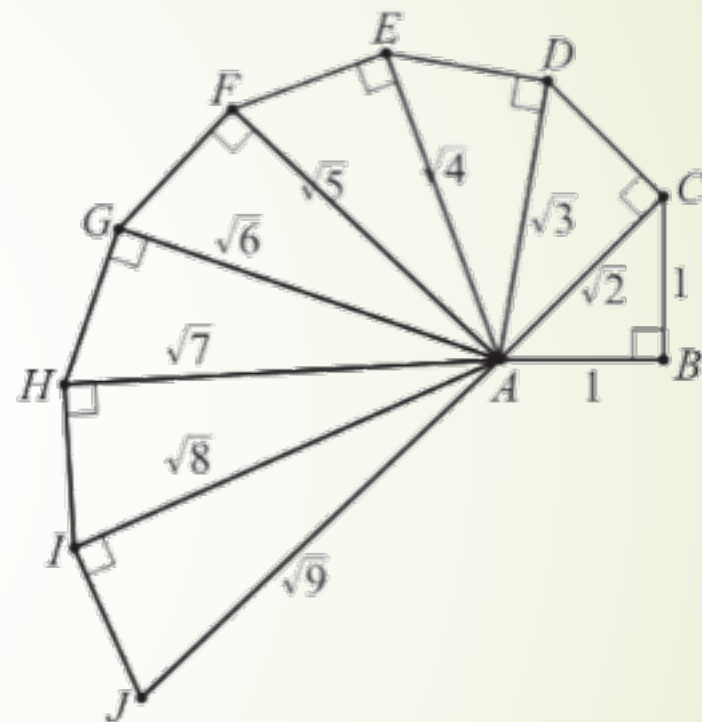
問題 (1)：

上圖中，若 $AB=1$ ，則八個直角三角形的斜邊長有哪些是無理數？

畢氏螺線學習單

右圖是我們完成的根號螺線成品：

請回答下列問題



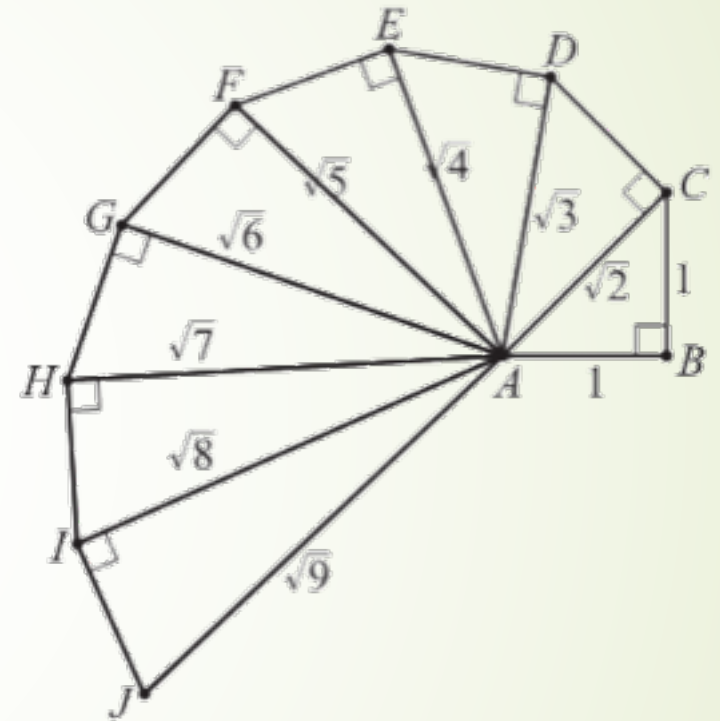
問題 (1)：

上圖中，若 $AB=1$ ，則八個直角三角形的斜邊長有哪些是無理數？

斜邊長中 $\sqrt{4} = 2$ 、 $\sqrt{9} = 3$ 為有理數，其他 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{6}$ 、 $\sqrt{7}$ 、 $\sqrt{8}$ 共 6 個為無理數。

畢氏螺線學習單

右圖是我們完成的根號螺線成品：
請回答下列問題



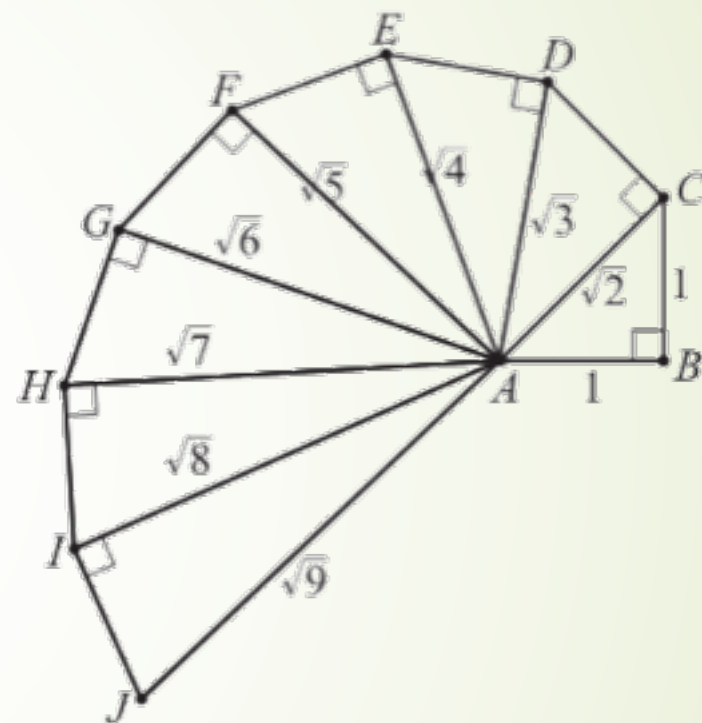
問題 (2)：

上圖中，若 $\overline{AB}=1$ ，則此螺線的總周長為何？

畢氏螺線學習單

右圖是我們完成的根號螺線成品：

請回答下列問題



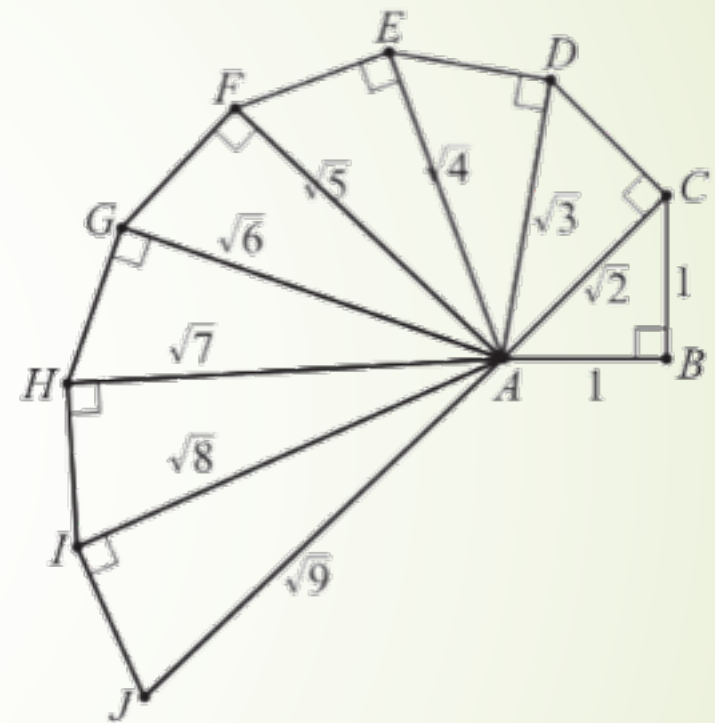
問題 (2)：

上圖中，若 $\overline{AB}=1$ ，則此螺線的總周長為何？

如上圖，螺線的總周長等於 $9 + \sqrt{9} = 9 + 3 = 12$ 。

畢氏螺線學習單

右圖是我們完成的根號螺線成品：
請回答下列問題

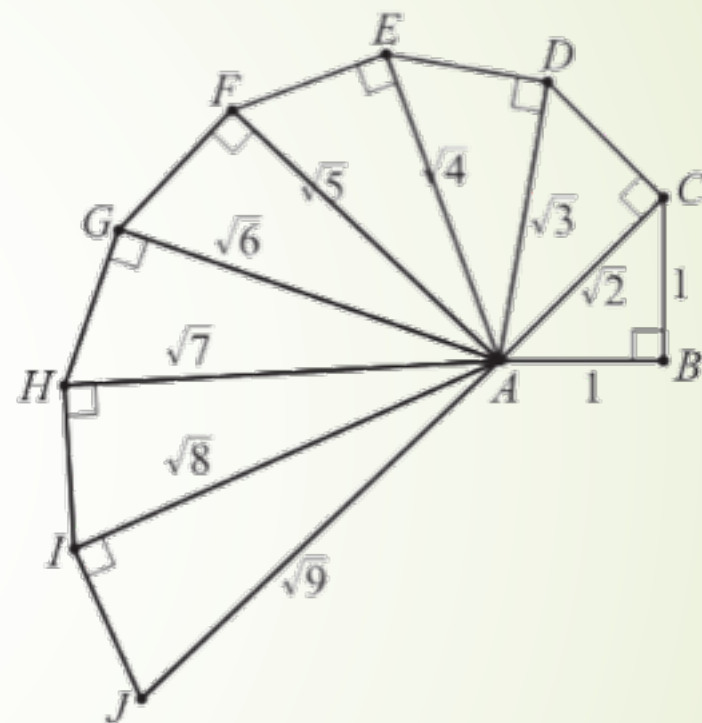


問題 (3)：
上圖中，若 $\overline{AB}=1$ ，請問 \overline{AI} 是 \overline{AC} 的幾倍？

畢氏螺線學習單

右圖是我們完成的根號螺線成品：

請回答下列問題



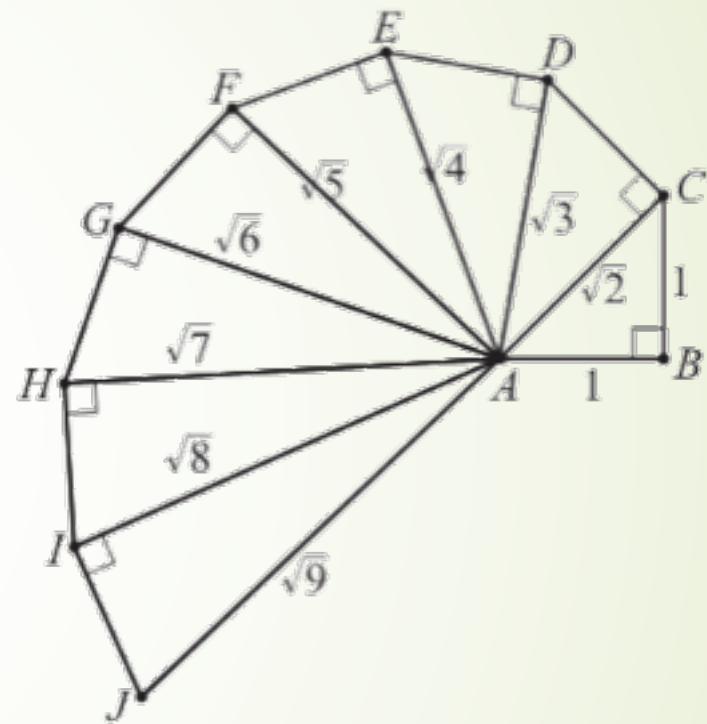
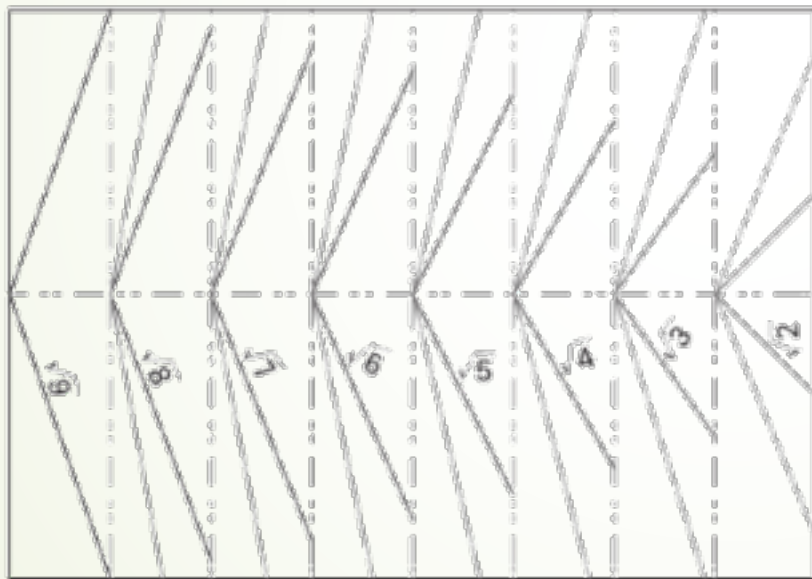
問題 (3)：

上圖中，若 $\overline{AB}=1$ ，請問 \overline{AI} 是 \overline{AC} 的幾倍？

$\because \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，亦可透過實際的測量得到 $\sqrt{8}$ 與兩個 $\sqrt{2}$ 等長，所以 \overline{AI} 是 \overline{AC} 的 2 倍。

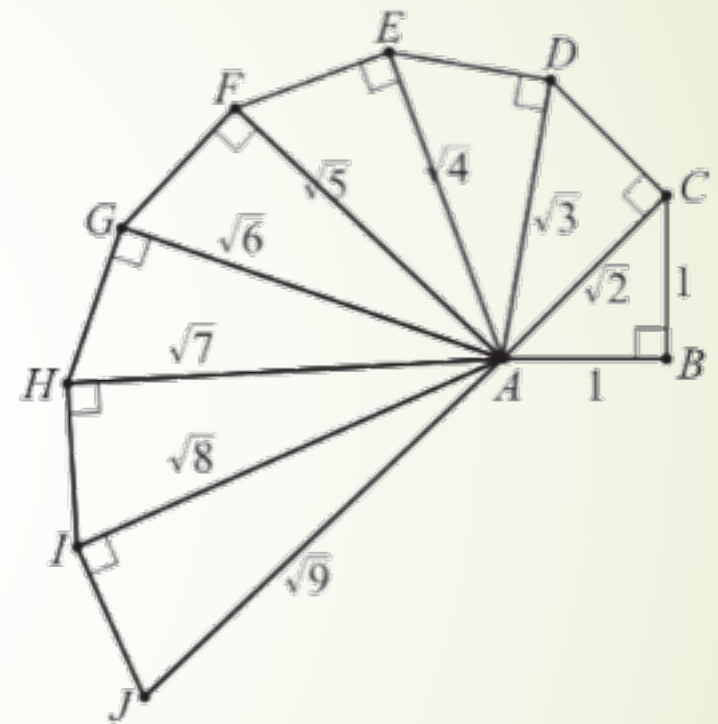
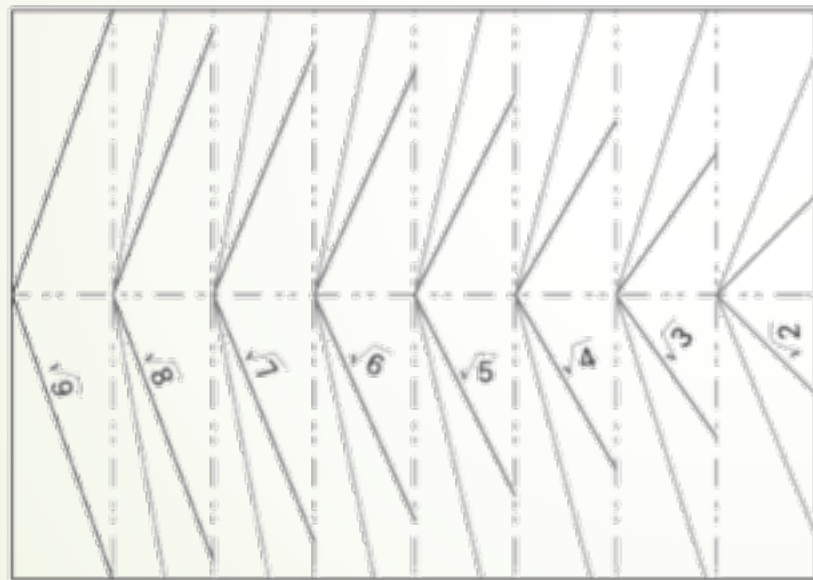
問題 (4) :

如下圖為成品展開的紙張，請求紙張長寬比為何？



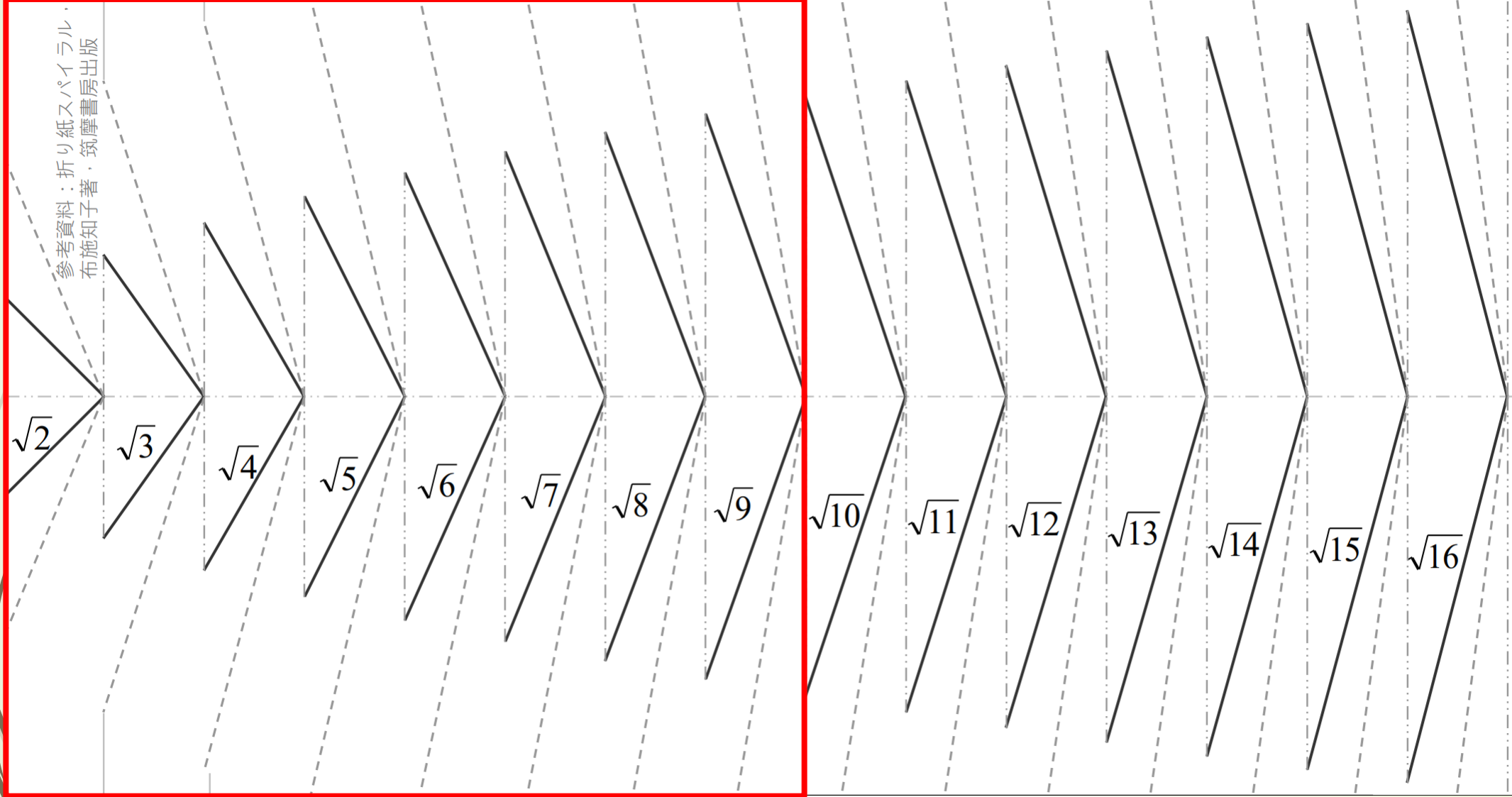
問題 (4) :


如下圖為成品展開的紙張，請求紙張長寬比為何？



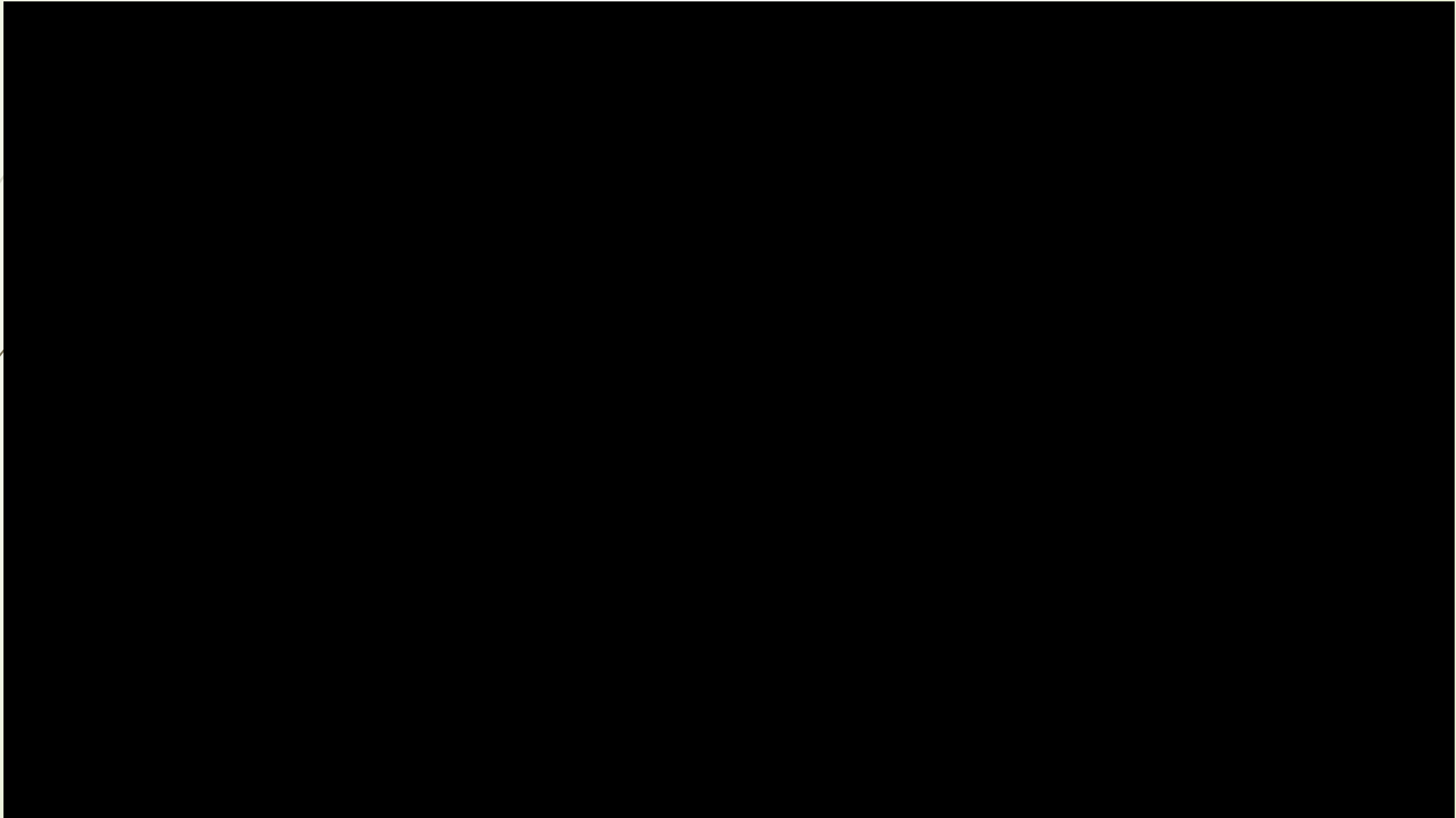
根據展開的平面圖，我們可以得知此紙張的長寬比為 $8 : 2\sqrt{8} = 4 : 2\sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$

改變比例的根號螺線

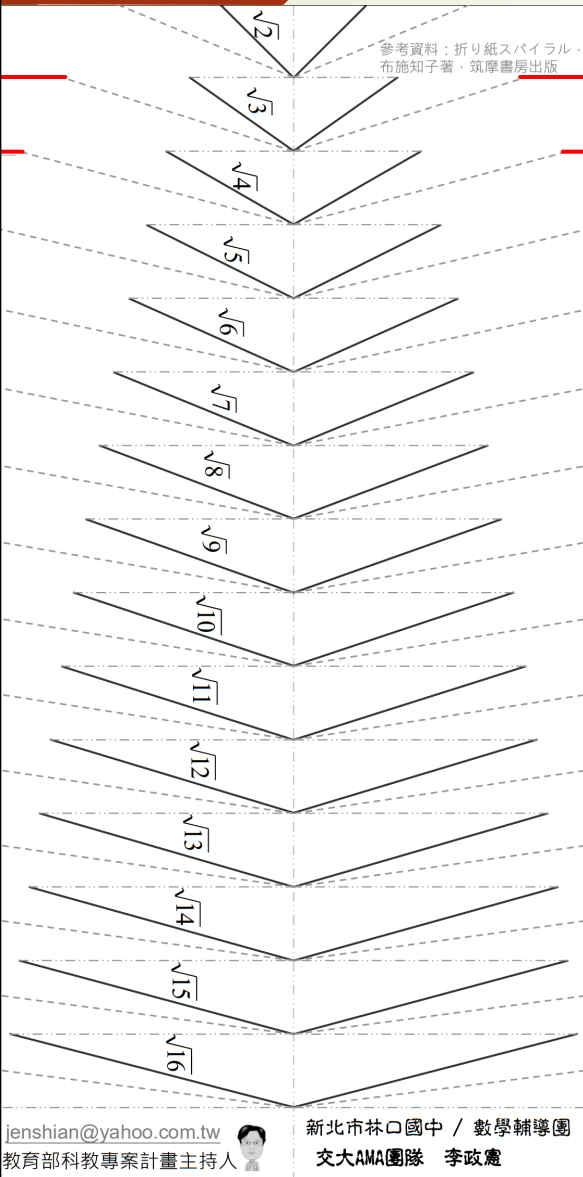




酸鹼指示/根號螺線摺製



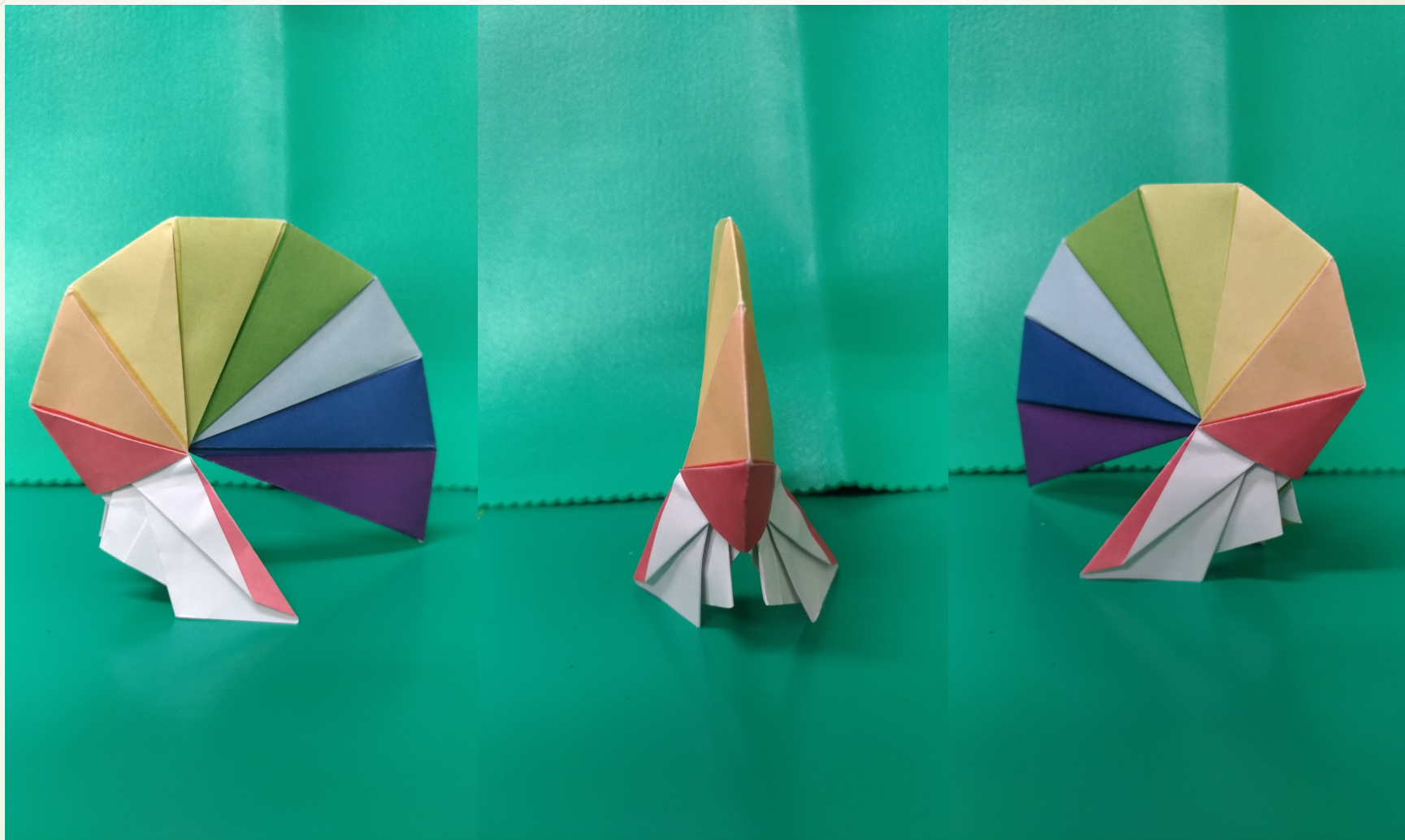
酸鹼指示/根號螺線延伸討論問題




- 紙張的長寬比為何？
- 模板上四條斷線（如紅線處）的目的為何？如果沒有剪斷，摺製時會發生什麼問題？
- 如果短邊長度為8，請問以上斷線的長度分別是多少？

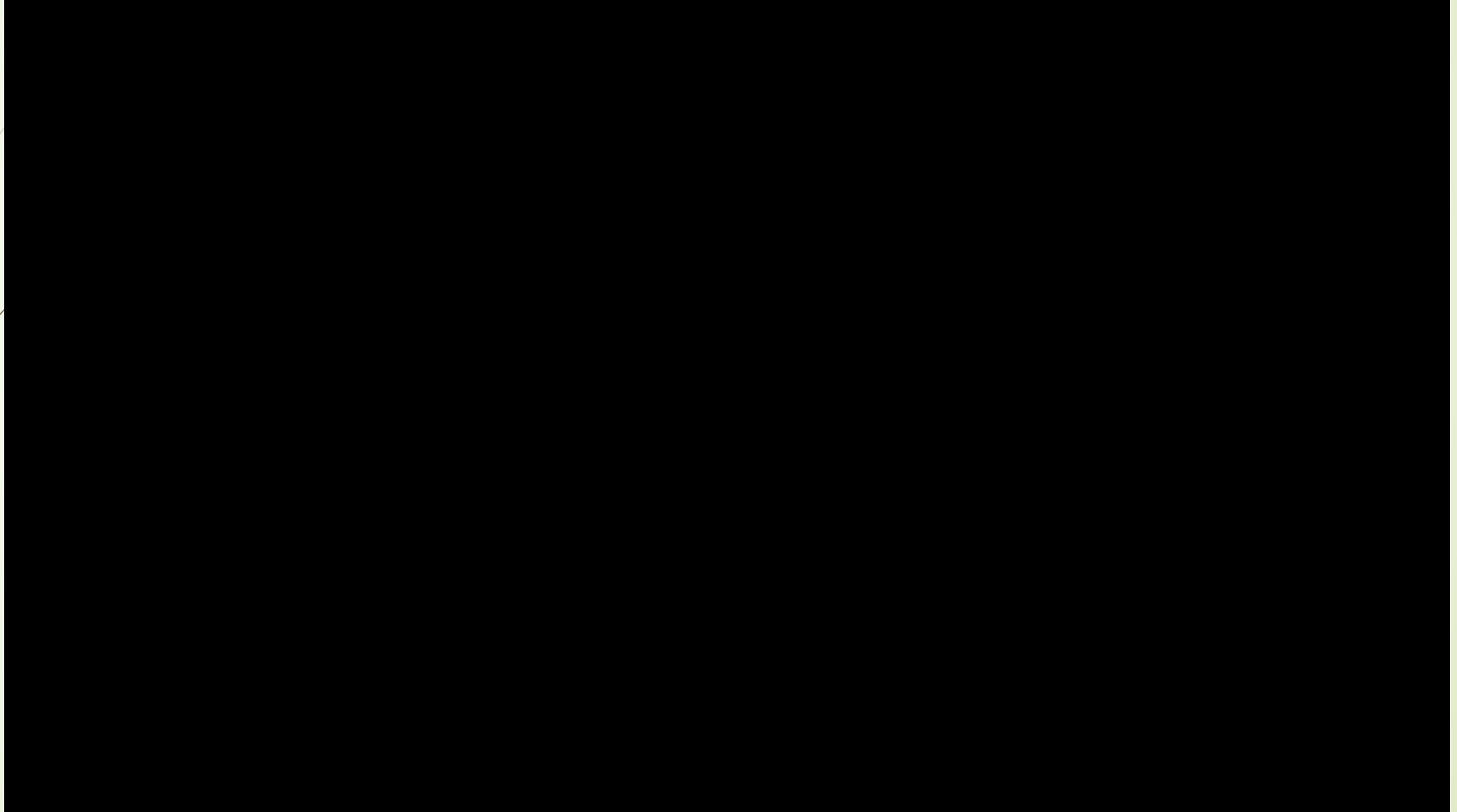


簡易畢氏螺線變化版

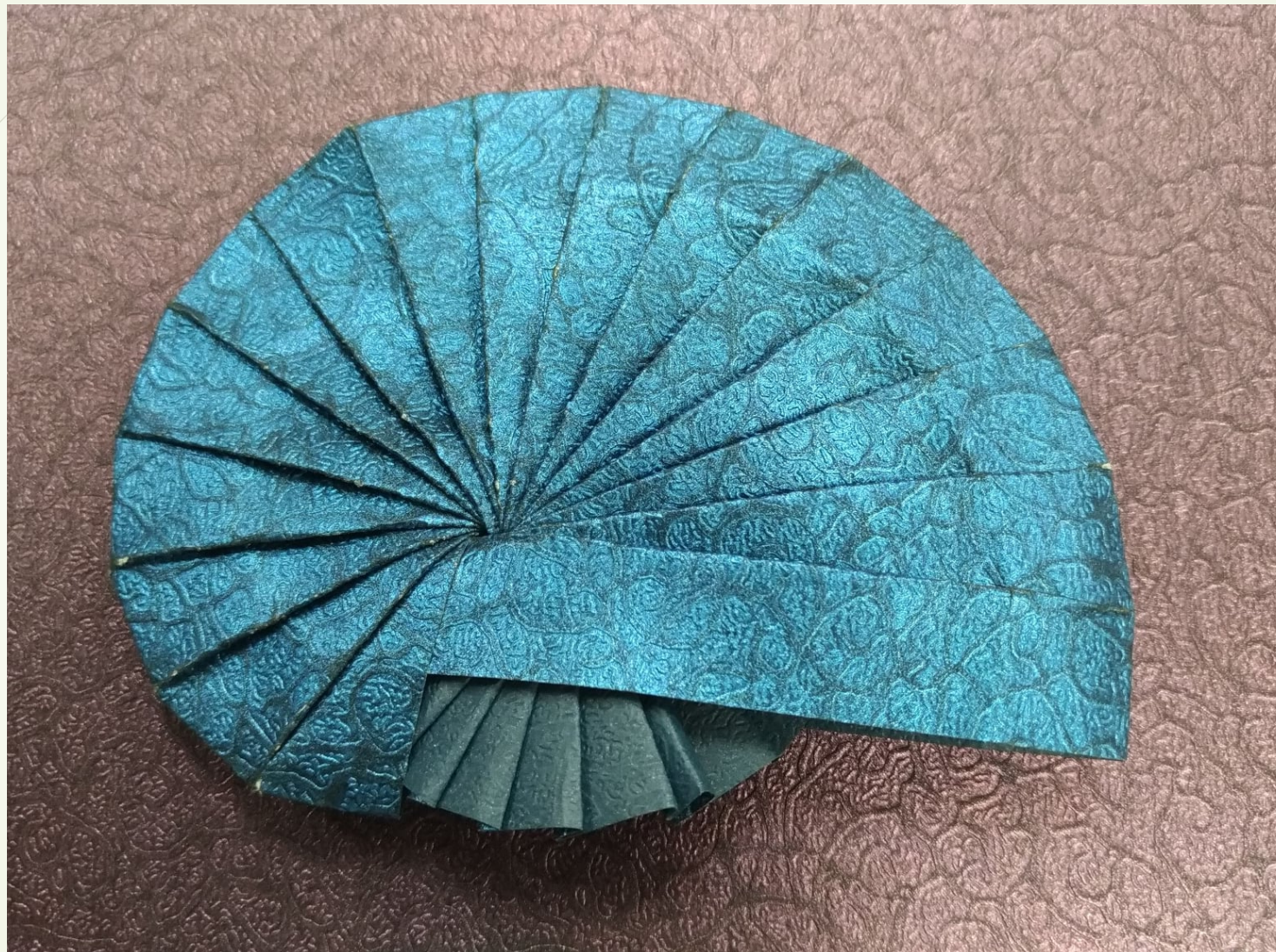




簡易畢氏螺線變化版



立體螺線收納盒



李家祥教授原創，陳哲成老師摺製



延伸製作：立體螺線收納盒摺製（美術紙版）



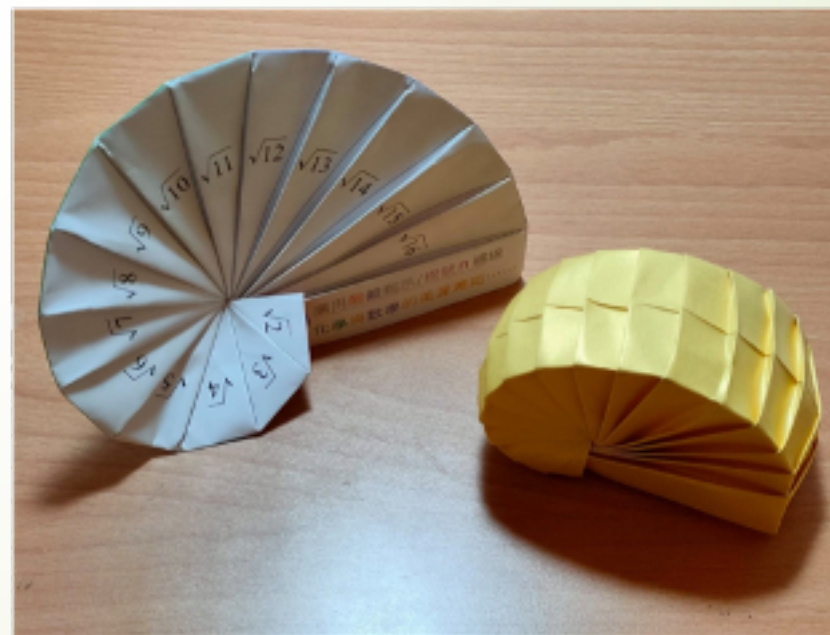


立體螺線收納盒數學 / 摺紙探索

- 螺線盒的第一個三角形三邊長比值？為什麼呢？
- 螺線盒的線段摺製完畢後，最後多摺一條橫線的目的為何？如何影響螺線盒的比例？
- 如何將螺線盒的頂部等份點透過摺紙的壓摺，讓它更立體？

結語：

- ➡ 數學其實巧妙藏在生活中，
看你如何去發現與應用它！



補充： $\sqrt{2}$ 是無理數（反證法）

第一種證法：假設 $\sqrt{2}$ 為有理數，故 $\sqrt{2}$ 可以寫成

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad (1)$$

其中 a 與 b 為兩個自然數並且互質。將上式平方得

$$a^2 = 2b^2 \quad (2)$$

補充： $\sqrt{2}$ 是無理數（反證法）

$$a^2 = 2b^2$$

所以 a^2 為偶數，從而 a 亦為偶數。令

$$a = 2m$$

其中 m 為某一自然數，於是

$$2b^2 = a^2 = (2m)^2 = 4m^2$$

補充： $\sqrt{2}$ 是無理數（反證法）

或者

$$b^2 = 2m^2$$

因此， b^2 為偶數，故 b 亦為偶數。這就跟 a 與 b 互質的假設互相矛盾，所以「 $\sqrt{2}$ 為有理數」不成立，從而得證「 $\sqrt{2}$ 為無理數」。