

## A-單元 5 指數函數

## B-單元 3 指數函數

# 指數函數的應用

日常生活中，我們常常會聽到某些店家宣稱「我們的業績呈現指數成長」，那到底什麼是「指數成長」？所以下列我們要介紹許多指數函數的應用，例如傷口癒合時間模型、零死亡願景模型和直接行銷模型等。

### 一 一般指數函數

指數函數與大家之前所學過的多項式函數不同，不一樣的地方在於自變數的位置在「次方」（即指數）上，例如： $f(x) = 2^x$ 、 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  等，下面給出一般指數函數的定義：

一般指數函數具有下列形式：

$f(x) = a \times b^x$ ，其中， $a$  是一個實數常數，而且  $a \neq 0$ ， $b$  是一個實數，而且  $b > 0$ 、 $b \neq 1$ ，在此  $b$  稱為**底數**。

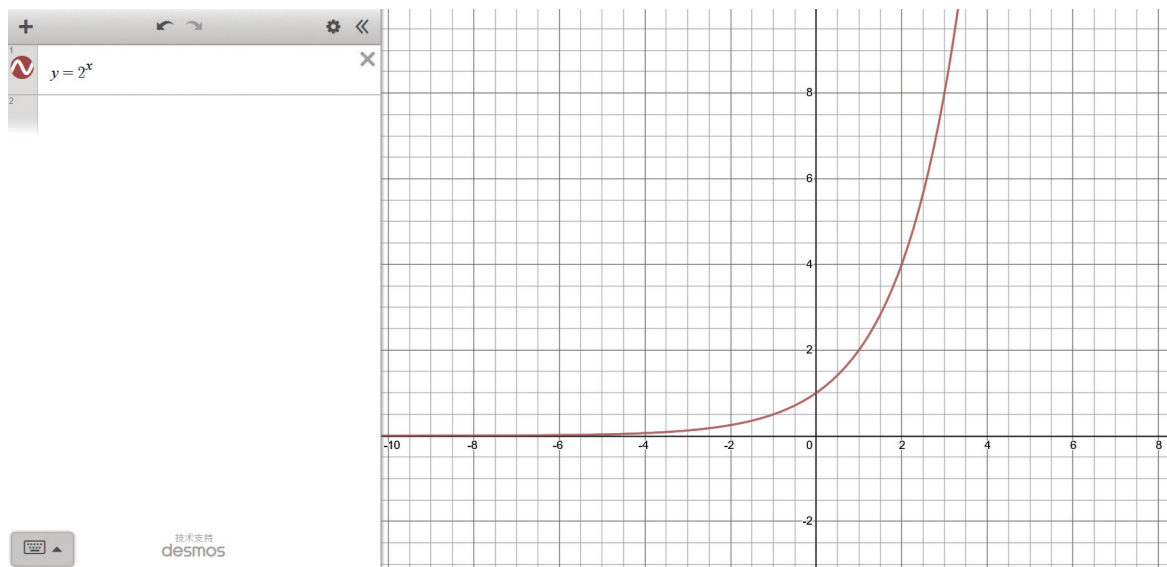
### 二 利用 Desmos 軟體繪製並討論一般指數函數的圖形

現在許多線上軟體均能繪製及模擬函數圖形，本篇以 Desmos 軟體為例，請先掃描 QR Code 或輸入網址：<https://www.desmos.com/calculator>。



#### 1. 步驟 1：

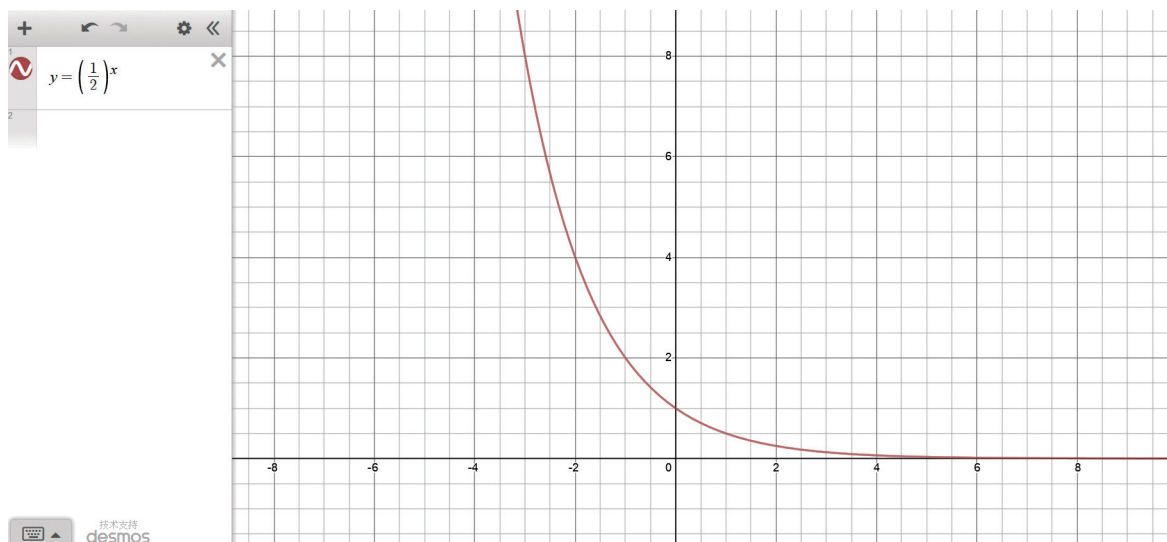
先以  $y = 2^x$  為例，於 Desmos 繪圖頁面左側輸入  $y = 2^x$ ，輸入後，頁面於畫面右方會出現  $y = 2^x$  的圖形，如圖 1。



▲圖 1 指數函數  $y = 2^x$  的圖形畫面

## 2. 步驟 2：

再以  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  為例，於 Desmos 繪圖頁面左側輸入  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ，輸入後，頁面於畫面右方會出現  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  的圖形，如圖 2。



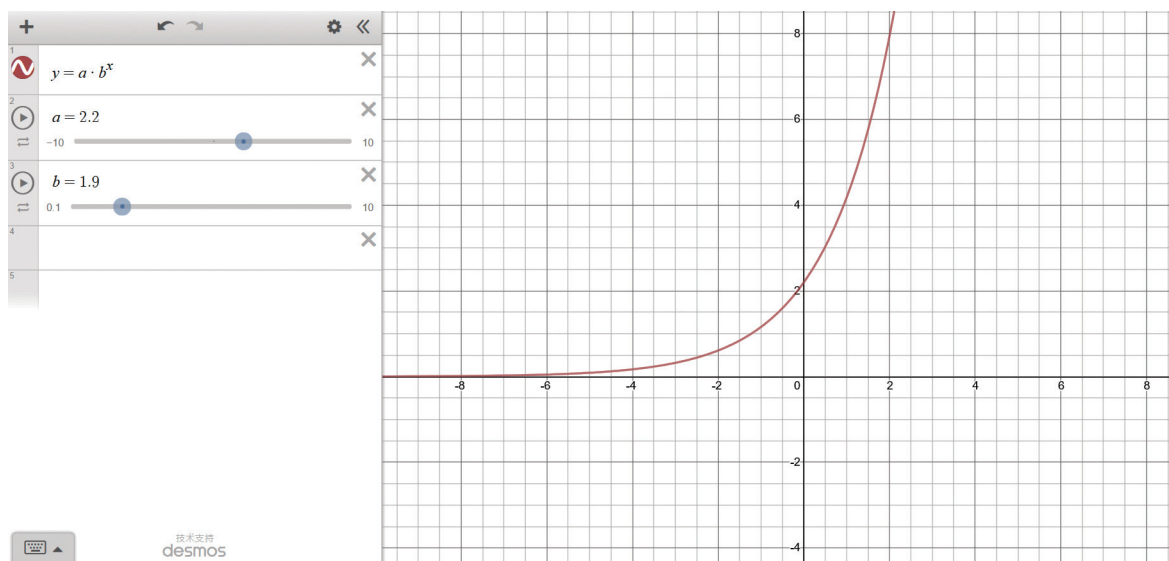
▲圖 2 指數函數  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  的圖形畫面

從上面兩個圖可以得知：

- (1)  $y = 2^x$  的圖形中，隨著  $x$  越來越大， $2^x$  會趨近於  $\infty$ ，我們稱這類的函數為**指數型成長函數**。
- (2)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  的圖形中，隨著  $x$  越來越大， $\left(\frac{1}{2}\right)^x$  會趨近於 0，我們稱這類的函數為**指數型衰退函數**。

### 3. 步驟 3：一般指數函數

於 Desmos 繪圖頁面左側輸入  $y = a \times b^x$ ，輸入後，頁面於函數下方會自動出現「新增  $a$ 、 $b$  滑桿」字樣（如圖 3），直接按【Enter】即可，如圖 3，並更改滑桿  $b$  的範圍，使得  $0.1 \leq b \leq 10$ 。



▲圖 3 一般指數函數  $y = a \times b^x$  的圖形畫面

## 👉 數學動起來

試移動滑桿，並回答下列問題：

- (1)  $a > 0$  與  $a < 0$  時，圖形有何差異？
- (2)  $1 < b \leq 10$  與  $0.1 \leq b < 1$  的圖形有何差異？

解

## ☰ 指數函數模型的應用

### 1. 應用一：醫藥學－傷口癒合時間模型

醫藥學家近期利用數學模型來推估常見傷口大小的癒合時間，假設 30 平方英吋之胸部傷口的癒合時間可模型化為  $f(x) = 30 \times \left(\frac{4}{5}\right)^x$ ， $x \geq 0$ ，其中  $x$  表示傷口形成後所經過的天數， $f(x)$  表示傷口的大小（平方英吋）。

### 👉 群策群力

- (1) 試利用 Desmos 繪製函數  $f(x)$  圖形。
- (2) 求  $f(7)$  的值，並說明其意義（四捨五入至小數點後 2 位）。

解