2-3 畢氏定理

主題1　發現畢氏定理

主題2　畢氏定理的應用

主題3　直角坐標平面上
　　　　兩點的距離公式

重點整理

自我評量

一題多解


根據紀錄，古埃及有專門測量土地和方位的「操繩師」，他們將繩子做成一個繩圈，繩圈上有 12 個繩結把繩圈分成 12 等距。利用這個繩圈，便能拉出直角三角形來測量土地面積，也能利用直角來判斷方位。你知道這個繩圈是根據什麼原理拉出直角三角形的嗎？

　　一般使用的三角板，都有一個角為直角。這種有一個角為直角的三角形，稱為直角三角形。習慣上我們把直角所對的邊稱為**斜邊**，直角兩側的邊都稱為**股**。兩股長度相等的直角三角形則稱為等腰直角三角形。

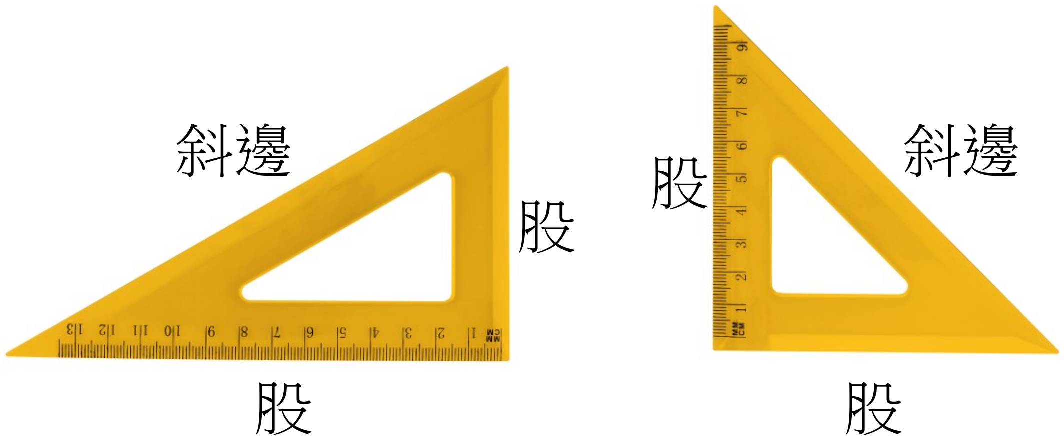


圖 1

直角三角形有什麼特別的性質呢？我們來看下面的問題探索。

圖 2 ~圖 4 灰色區域皆為直角三角形，依照直角三角形的三邊長所畫出的四邊形皆為正方形，每個小方格的邊長皆為 1，回答下列問題。

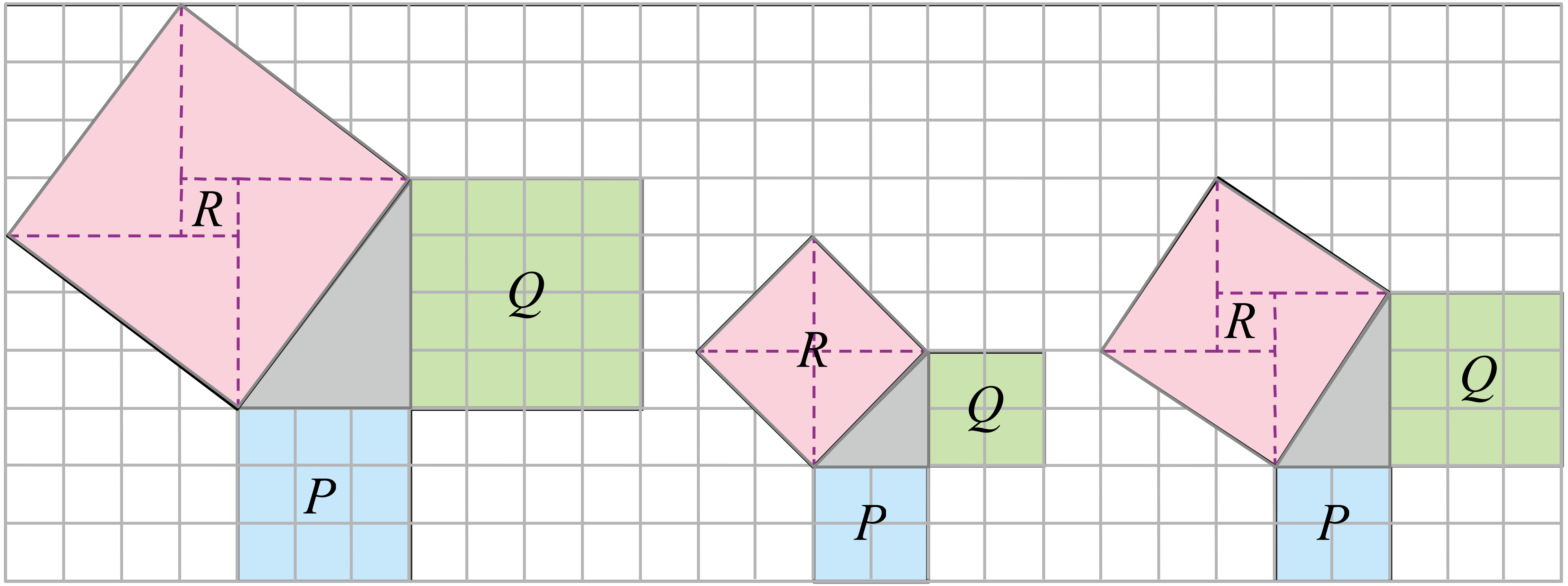


圖 2 圖 3 圖 4

1. 根據圖 2～圖 4，計算各正方形區域的面積，並完成表格。

	P 的面積(藍色區域)	Q 的面積(綠色區域)	R 的面積(紅色區域)
圖 2	9	16	25
圖 3	4	4	8
圖 4	4	9	13

2. 承1.，圖 2～圖 4 中，P、Q、R 的面積有什麼關係？

由圖 2～圖 4，可得「P 的面積＋Q 的面積＝R 的面積」

由問題探索可發現，直角三角形中，分別以兩股為邊長的兩個正方形面積和，會等於以斜邊為邊長的正方形面積。也就是說，當直角三角形的兩股長分別為 a、b，斜邊長為 c，則 $a^2+b^2=c^2$。那其他直角三角形是不是也相同呢？我們再來看下面的問題探索。

圖 5 是 4 個相同的直角三角形，三邊長分別為 a、b、c。

圖 6 是邊長為$(a+b)$的正方形 $ABCD$。

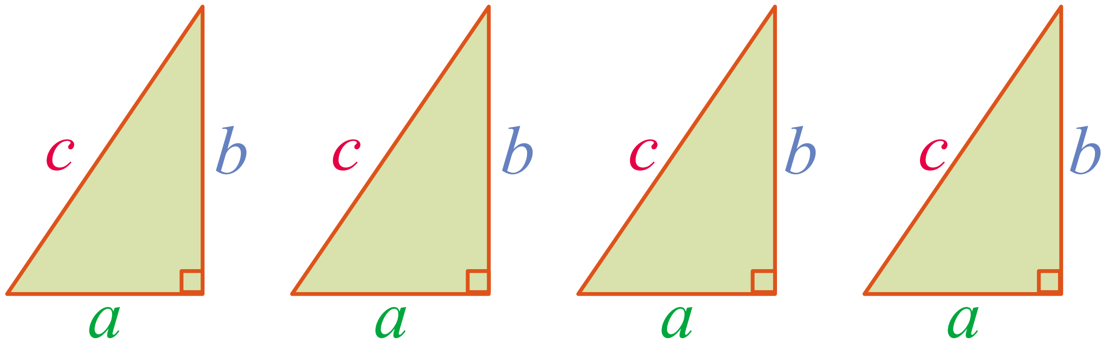


圖 5

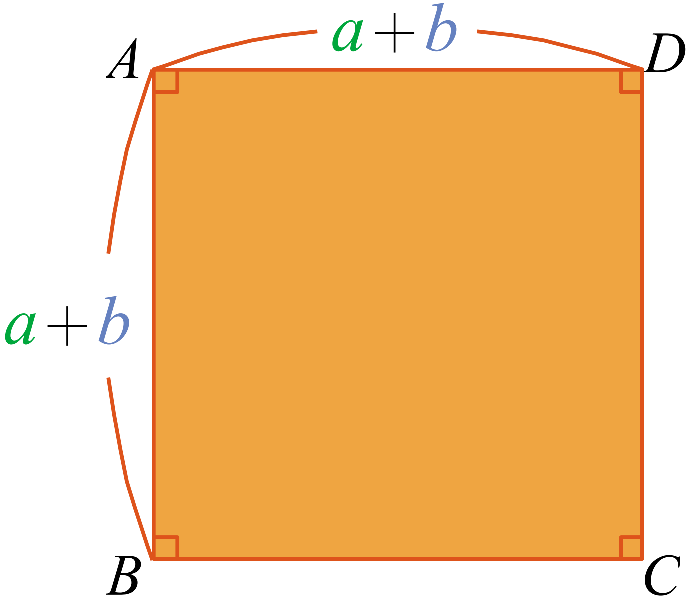


圖 6

將圖 5 中的 4 個直角三角形，
依圖 7 的方式放到正方形$ABCD$上。

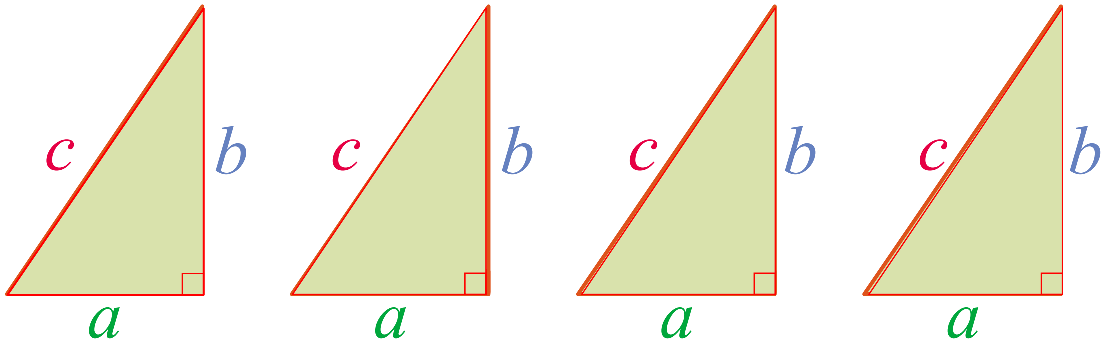
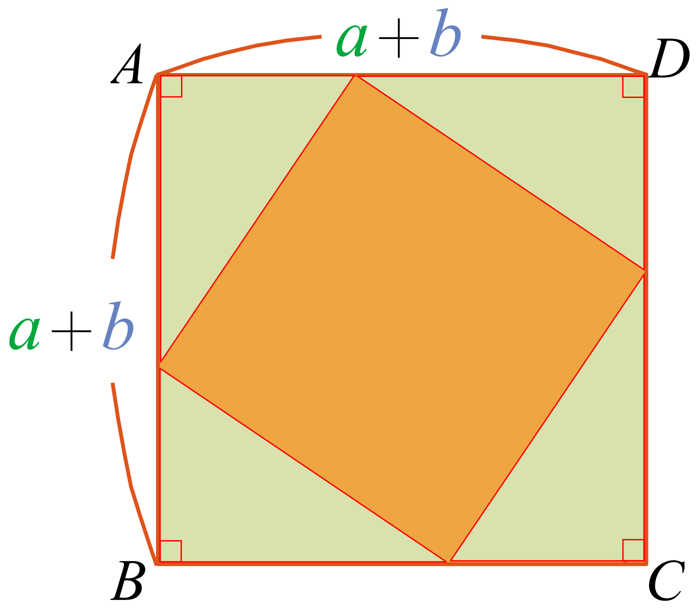


圖 5



回答下列問題：

1. 四邊形 $EFGH$ 是否為正方形？

因為四邊形 $EFGH$ 的四個邊都相等，且四個角都是 90°

所以四邊形 $EFGH$ 為正方形

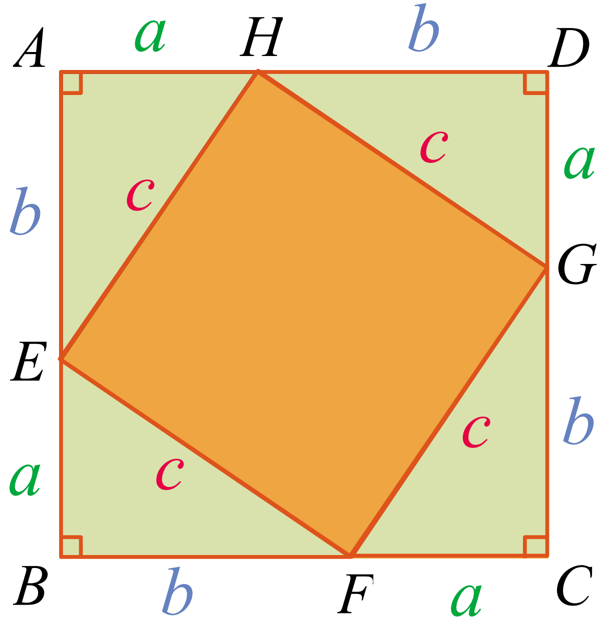


圖 7

回答下列問題：

2. 由圖 7 可知，四邊形 *EFGH* 面積等於正方形 *ABCD* 面積減去 4 個直角三角形面積。試以 a、b、c 表示此關係。

   $c^2=(a+b)^2-4\times\frac{1}{2}ab$

3. 化簡 2.的算式，是否會得到 $c^2=a^2+b^2$ 的關係？

   是，因為$c^2=a^2+2ab+b^2-2ab=a^2+b^2$

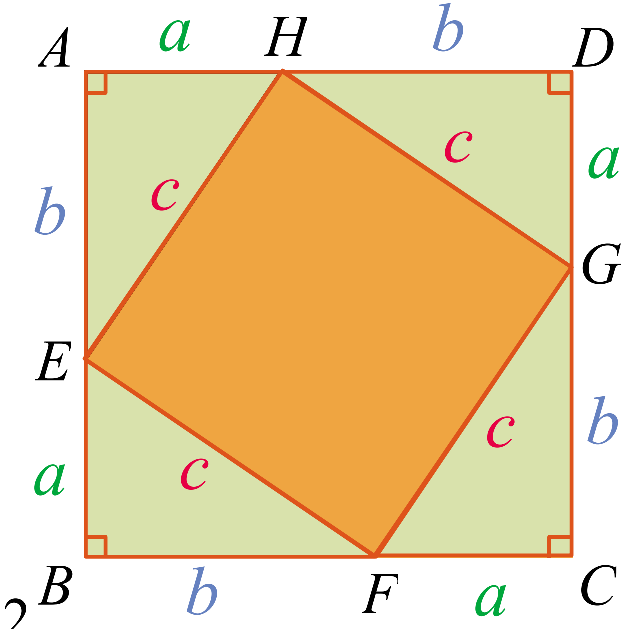


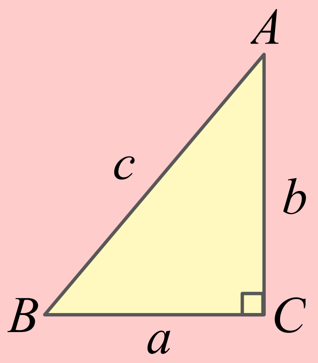
圖 7

由問題探索可以發現，任意**直角三角形兩股的平方和都會等於斜邊的平方**，我們把這樣的關係稱為**畢氏定理**。

Key ponit

畢氏定理

設一直角三角形斜邊的長度為 c，
兩股的長度分別為 a 和 b，
則$c^2=a^2+b^2$。



相傳畢氏定理是由古希臘數學家畢達哥拉斯(約西元前六世紀)與他的門徒所發現，因此大家習慣把這個定理稱為畢達哥拉斯定理(簡稱畢氏定理)。希臘為了紀念畢達哥拉斯，在西元 1955 年 8 月 20 日發行了紀念郵票，如圖 8。

郵票中間的圖形，正是前面問題探索討論過的，直角三角形以兩股為邊長的正方形面積和，會等於以斜邊為邊長的正方形面積。

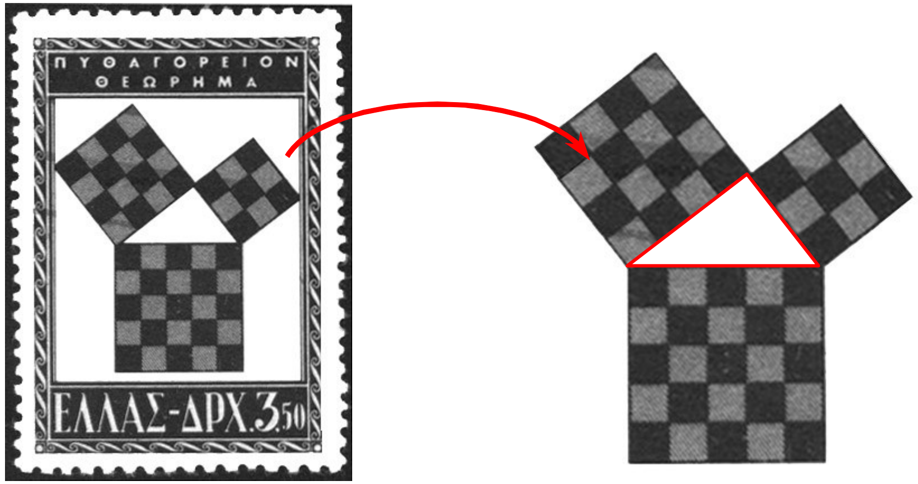


圖 8

　　但事實上，畢氏定理在更早以前就出現過了，例如中國最古老的數學著作《周髀算經》，就記載了一段西元一千多年前周公與商高的對話，對話中商高以「勾廣三，股修四，徑隅五」來解釋直角三角形中三邊長的關係，意指勾(短股)為三，股(長股)為四，徑(斜邊)為五。因此畢氏定理也稱為勾股定理或商高定理。

畢達哥拉斯

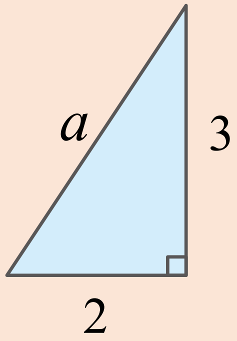
(*Pythagoras*，西元前 570~495 年)，古希臘數學家、哲學家及音樂理論家。主張「萬物皆數」，認為「數」可以解釋世界上一切事物，並創立探究算術、幾何、天文和音樂的畢氏學派。

給定直角三角形的兩邊，我們就可以利用畢氏定理求出第三邊的長度，我們來看下面的例題。

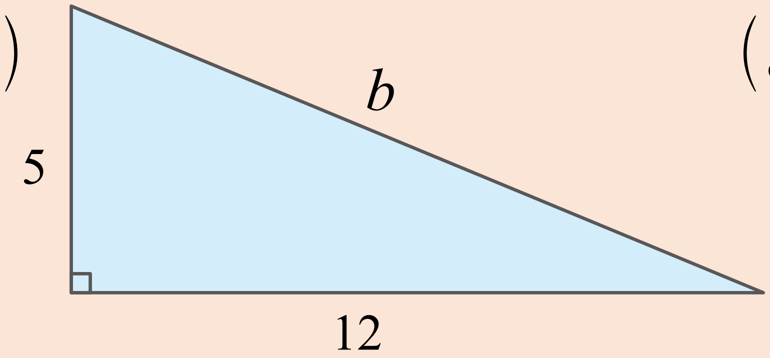
例 1 利用畢氏定理求直角三角形的第三邊 搭配課本p95

求出下列各直角三角形邊長 a、b、c 的值。

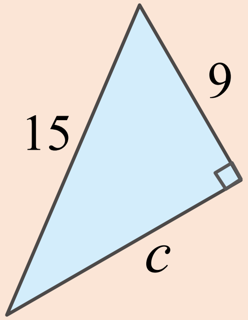
(1)



(2)



(3)



解 (1)由畢氏定理得 $a^2=2^2+3^2=13$，$a=\pm\sqrt{13}$，

又 $a>0$，所以 $a=\sqrt{13}$。

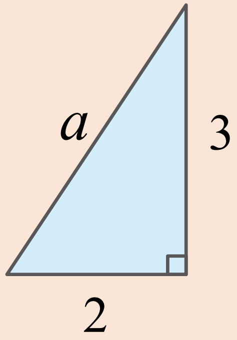
(2)由畢氏定理得 $b^2=5^2+12^2=169$，$b=\pm\sqrt{169}=\pm 13$，

又 $b>0$，所以 $b=13$。

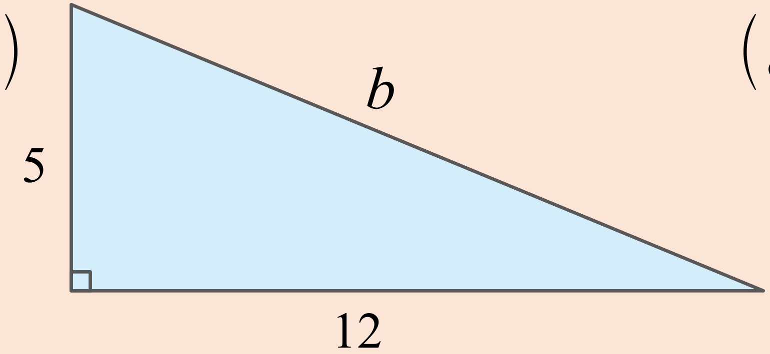
例① 利用畢氏定理求直角三角形的第三邊 搭配課本p95

求出下列各直角三角形邊長 a、b、c 的值。

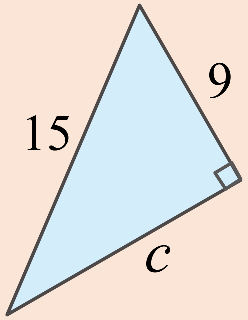
(1)



(2)



(3)



解 (3)由畢氏定理得 $15^2=9^2+c^2$，

$c^2=15^2-9^2=144$，

$c=\pm\sqrt{144}=\pm12$，

又 $c>0$，所以 $c=12$。

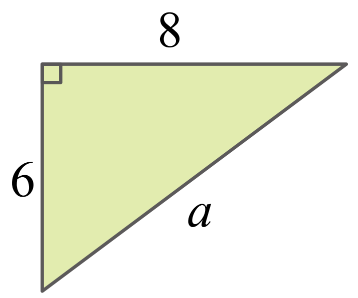
Hint

要先確認想算的第三邊是斜邊還是股。

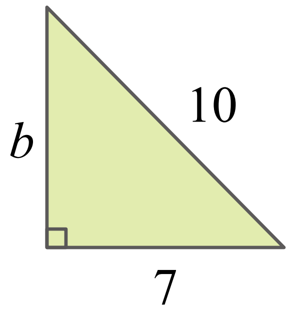
康軒文教事業

求出下列各直角三角形邊長 a、b、c 的值。

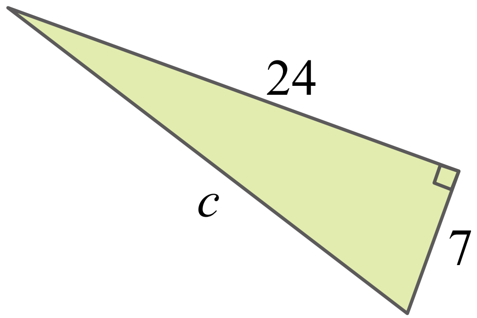
(1)



(2)



(3)



解

(1) 由畢氏定理得

$a^2=8^2+6^2=100$

$a=\pm\sqrt{100}=\pm10$

又 $a>0$

所以 $a=10$

(2) 由畢氏定理得

$b^2+7^2=10^2$

$b^2=10^2-7^2=51$

$b=\pm\sqrt{51}$

又 $b>0$

所以 $b=\sqrt{51}$

(3) 由畢氏定理得

$c^2=7^2+24^2=625$

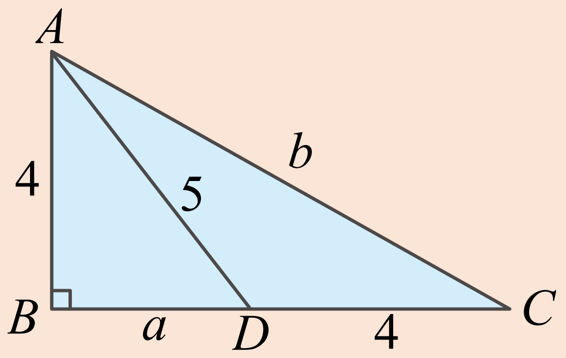
$c=\pm\sqrt{625}=\pm25$

又 $c>0$

所以 $c=25$

例 2 利用畢氏定理求直角三角形的邊長　　搭配課本p96

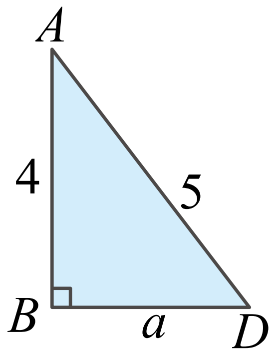
求出右圖中邊長 a、b 的值。



解 (1)在直角三角形 ABD 中，

由畢氏定理得 $a^2=5^2-4^2=9$，$a=\pm\sqrt{9}=\pm3$，

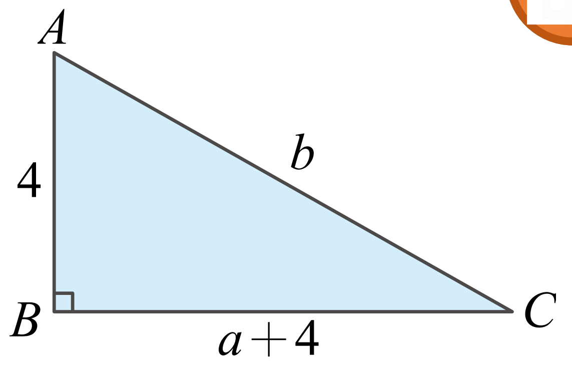
又 $a>0$，所以 $a=3$。



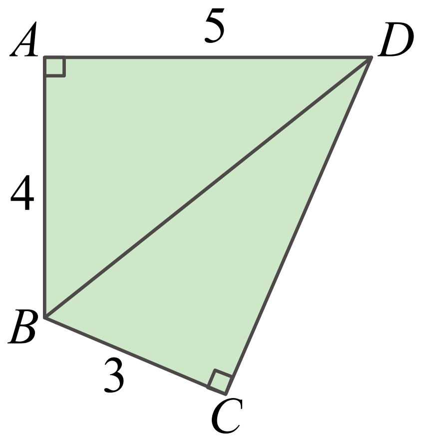
(2)在直角三角形 ABC 中，$\overline{BC}=3+4=7$，

由畢氏定理得 $b^2=4^2+7^2=65$，$b=\pm\sqrt{65}$，

又 $b>0$，所以 $b=\sqrt{65}$。



如右圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C=90°$，若 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，$\overline{AD}=5$，則：



解 (1) $\overline{BD}=$ $\underline{\quad\sqrt{41}\quad}$。 (2) $\overline{CD}=$ $\underline{\quad 4\sqrt{2}\quad}$。

在直角三角形 ABD 中

由畢氏定理得 $\overline{BD}^2=4^2+5^2=41$

又 $\overline{BD}>0$，所以 $\overline{BD}=\sqrt{41}$

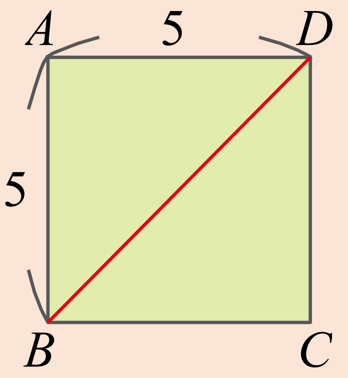
在直角三角形 BCD 中

由畢氏定理得 $\overline{CD}^2=(\sqrt{41})^2-3^2=32$

又 $\overline{CD}>0$，所以 $\overline{CD}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

例 3 利用畢氏定理求正方形的對角線長　搭配課本p97

已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 5 公分，
求對角線 $\overline{BD}$ 的長度。

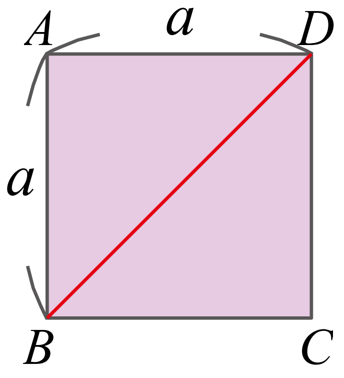


解 $\triangle ABD$ 是一個等腰直角三角形，
由畢氏定理得 $\overline{BD}^2=5^2+5^2=50$，
又 $\overline{BD}>0$，所以 $\overline{BD}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ 公分。

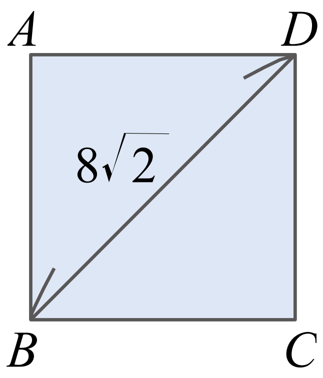
事實上，若正方形邊長為 a，仿照上面的方式，可得到正方形對角線 $=\sqrt{a^2+a^2}$

$=\sqrt{2a^2}$

$=\sqrt{2}a$。



已知正方形 $ABCD$ 的對角線長為 $8\sqrt{2}$ 公分，求正方形 $ABCD$ 的邊長是多少？



解 設正方形 $ABCD$ 的邊長為 a

對角線 $=\sqrt{2}a=8\sqrt{2}$，$a=8$

因此正方形 $ABCD$ 的邊長為 8 公分

例 4 利用畢氏定理求正三角形的高與面積 搭配課本p98

已知一正三角形 ABC 的邊長為 8 公分，則：

(1)正三角形 ABC 的高為多少公分？

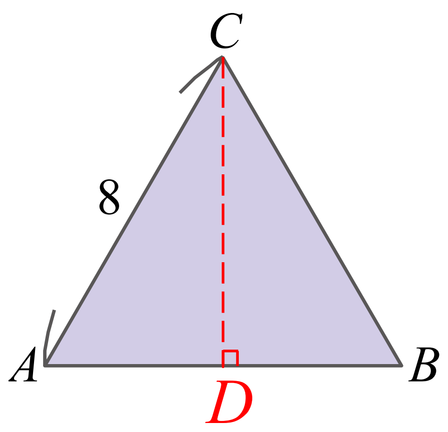
(2)正三角形 ABC 的面積為多少平方公分？

解 (1)若 $\overline{AB}$ 的中點為 D，

則 $\overline{CD}$ 為正三角形 ABC 的對稱軸，

亦為 $\overline{AB}$ 的中垂線，

因此 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$，且 $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 8=4$。



例 4 利用畢氏定理求正三角形的高與面積 搭配課本p98

已知一正三角形 ABC 的邊長為 8 公分，則：

(1)正三角形 ABC 的高為多少公分？

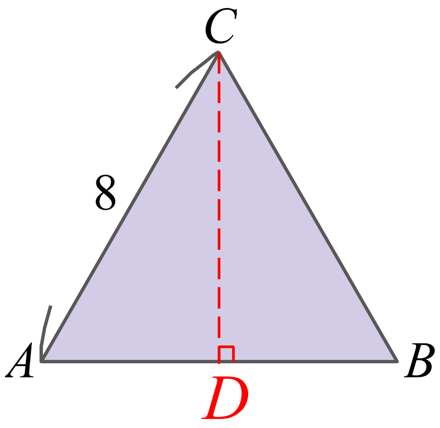
(2)正三角形 ABC 的面積為多少平方公分？

解

由畢氏定理得 $\overline{CD}^2=8^2-4^2=48$，

又 $\overline{CD}>0$，所以 $\overline{CD}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$，

因此正三角形 ABC 的高為 $4\sqrt{3}$ 公分。



(2) 正三角形 ABC 的面積為 $\frac{1}{2}\times8\times4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$ 平方公分。

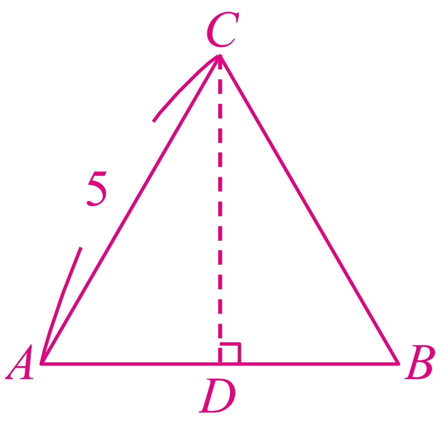
已知一正三角形 ABC 的邊長為 5 公分，求此正三角形的高與面積分別為多少？

解 由畢氏定理得 $\overline{CD}^2=5^2-(\frac{5}{2})^2=\frac{75}{4}$

又 $\overline{CD}>0$，所以 $\overline{CD}=\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$

因此正 $\triangle ABC$ 的高為 $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ 公分

面積為 $\frac{1}{2}\times5\times\frac{5}{2}\sqrt{3}=\frac{25}{4}\sqrt{3}$ 平方公分



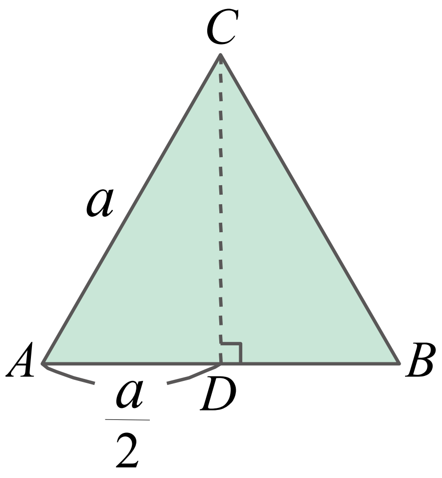
事實上，若正三角形 ABC 的邊長為 a，

高為 $\overline{CD}$，仿照上面的方式，

由畢氏定理得 $\overline{CD}^2=a^2-(\frac{a}{2})^2=\frac{3}{4}a^2$，

又 $\overline{CD}>0$，所以 $\overline{CD}=\sqrt{\frac{3}{4}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$。

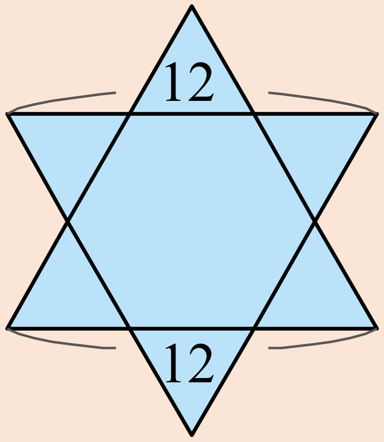
因此正三角形 ABC 的高為 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$；



面積為$\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。

例 5 正三角形的複合圖形　搭配課本p99

小崇用兩個邊長均為 12 公分的正三角形紙片，上下交疊排成一個六芒星，其中外圍為六個面積相同的正三角形，如右圖。求此六芒星的面積為多少平方公分？(以計算機計算並四捨五入到整數位)



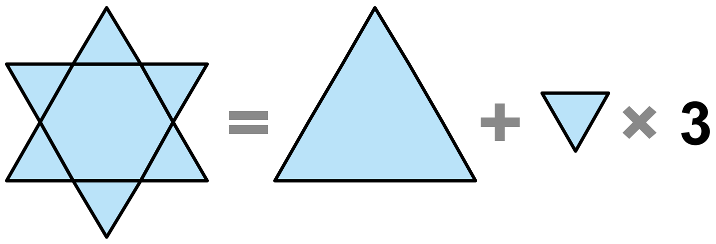
解 六芒星的面積

＝一個大正三角形的面積

＋三個小正三角形的面積

$$＝(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2)+(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2)\times 3$$

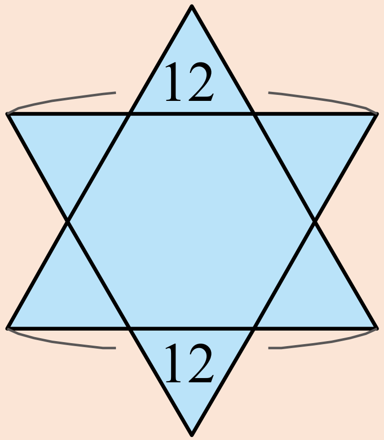
Hint



例 5 正三角形的複合圖形

搭配課本p99

小崇用兩個邊長均為 12 公分的正三角形紙片，上下交疊排成一個六芒星，其中外圍為六個面積相同的正三角形，如右圖。求此六芒星的面積為多少平方公分？(以計算機計算並四捨五入到整數位)

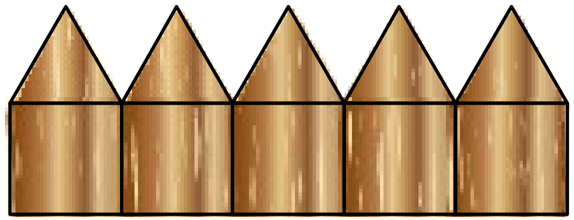


解

$=36\sqrt{3}+12\sqrt{3}=48\sqrt{3}$

利用計算機估算並四捨五入至整數位，可得六芒星的面積約為 83 平方公分。

俊明家有一塊圍籬，上半部是 5 個邊長為 40 公分的正三角形，下半部是 5 個邊長為 40 公分的正方形，如右圖。求這塊圍籬的面積為多少平方公分？(以計算機計算並四捨五入到整數位)



解 圍籬的面積＝(正三角形的面積＋正方形的面積)×5

$$=(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 40^2+40^2)\times 5$$

$$=2000\sqrt{3}+8000\text{(平方公分)}$$

利用計算機估算並四捨五入至整數位

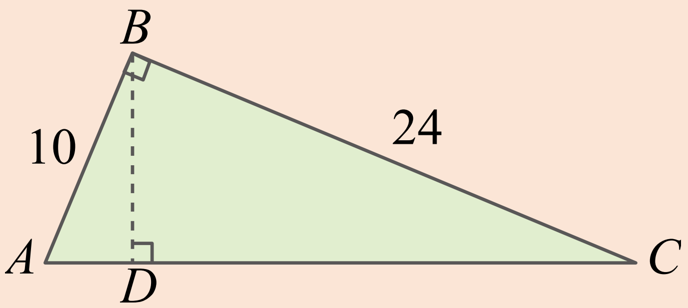
可得圍籬面積約為 11464 平方公分

例 6 利用畢氏定理求直角三角形斜邊上的高　搭配課本p100

如右圖，直角三角形 ABC 中，$\angle ABC$ 為直角，且 $\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=24$。若 $\overline{BD}$ 為斜邊上的高，則：

(1)斜邊 $\overline{AC}$ 的長為多少？

(2) $\overline{BD}$ 的長為多少？



解 (1)由畢氏定理得 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

$$=10^2+24^2$$

$$=676$$

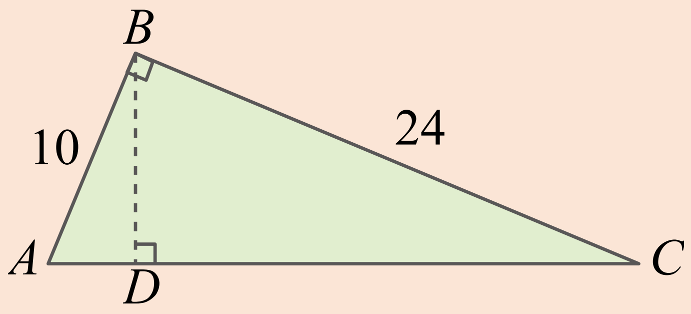
又 $\overline{AC}>0$，所以 $\overline{AC}=\sqrt{676}=26$。

例 6 利用畢氏定理求直角三角形斜邊上的高　　搭配課本p100

如右圖，直角三角形 ABC 中，$\angle ABC$ 為直角，且 $\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=24$。若 $\overline{BD}$ 為斜邊上的高，則：

(1)斜邊 $\overline{AC}$ 的長為多少？

(2) $\overline{BD}$ 的長為多少？



解

(2)直角三角形 ABC 的面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}$

所以 $\frac{1}{2}\times10\times24=\frac{1}{2}\times26\times\overline{BD}$，

即 $\overline{BD}=\frac{10\times24}{26}=\frac{120}{13}$。

小祐搭設了一個簡易帳篷，如下圖，其中 $\angle ABC$ 為直角，且 $\overline{AC}=2.5$ 公尺、$\overline{BC}=2$ 公尺，則 $\overline{BD}$ 的長為多少公尺？

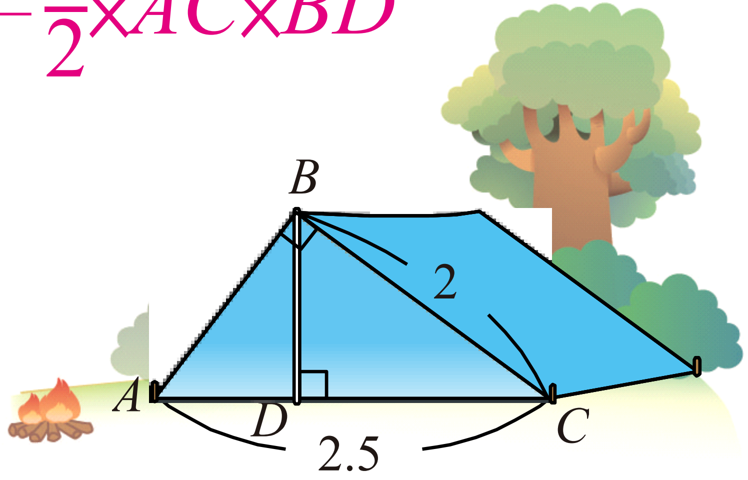
由畢氏定理得 $\overline{AB}^2=2.5^2-2^2=6.25-4=2.25$

又 $\overline{AB}>0$，所以 $\overline{AB}=\sqrt{2.25}=1.5$

又直角三角形 ABC 的面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}$

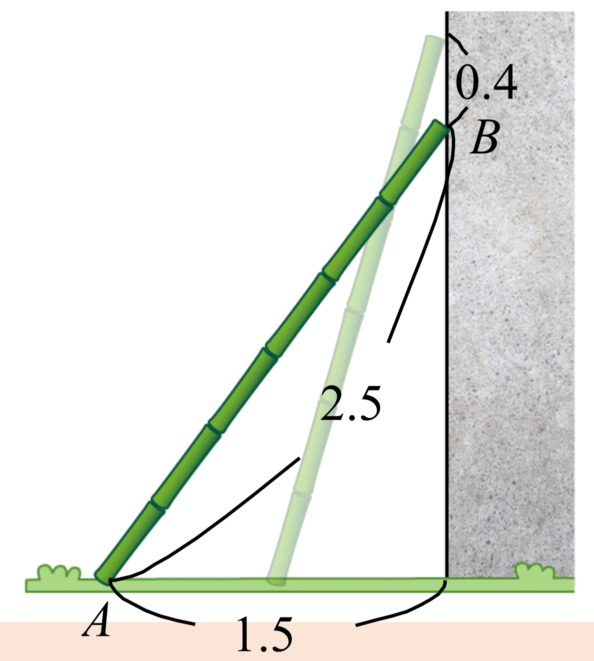
所以 $\frac{1}{2}\times1.5\times2=\frac{1}{2}\times2.5\times\overline{BD}$

即 $\overline{BD}=\frac{1.5\times2}{2.5}=\frac{6}{5}$(或 1.2)公尺



例 7 畢氏定理的應用問題　搭配課本p101

小康將一支長 2.5 公尺的竹竿放在牆角處，此時竹竿、牆面和地面剛好形成一個直角三角形，如右圖。



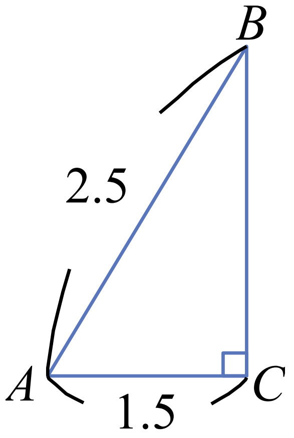
(1)若牆底和竹竿底端(A 點)距離為 1.5 公尺，則竹竿頂端(B 點)距離牆底多少公尺？

解 (1)參考右圖直角三角形 ABC，

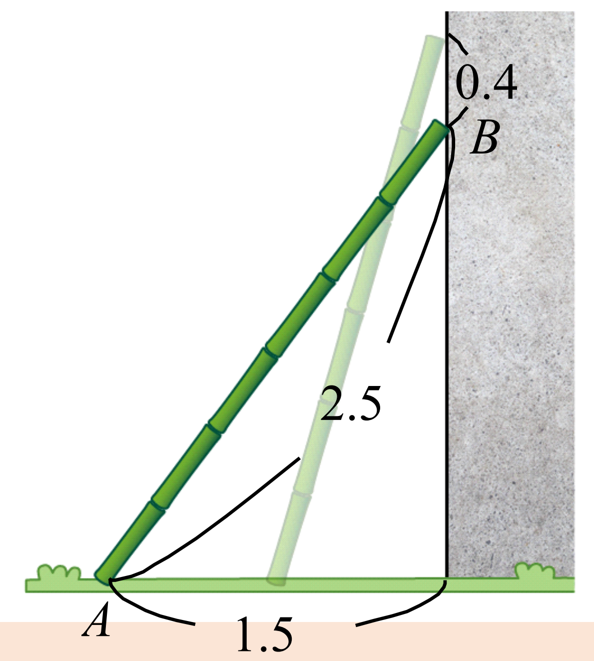
由畢氏定理得，$\overline{BC}^2=2.5^2-1.5^2=4$，

又 $\overline{BC}>0$，得 $\overline{BC}=2$，

所以竹竿頂端距離牆底 2 公尺。



小康將一支長 2.5 公尺的竹竿放在牆角處，此時竹竿、牆面和地面剛好形成一個直角三角形，如右圖。



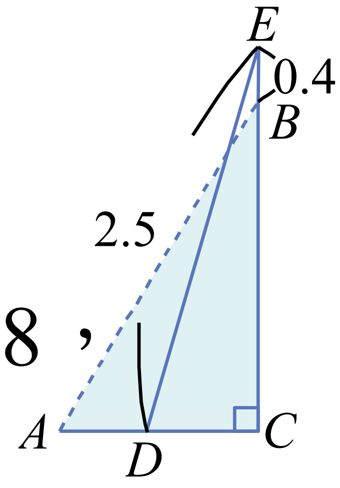
(2)小康後來調整竹竿位置，竹竿頂端(B 點)往上移動了 0.4 公尺，那竹竿底端(A 點)往牆底滑動了多少公尺？

解 (2)參考右圖直角三角形 ECD，

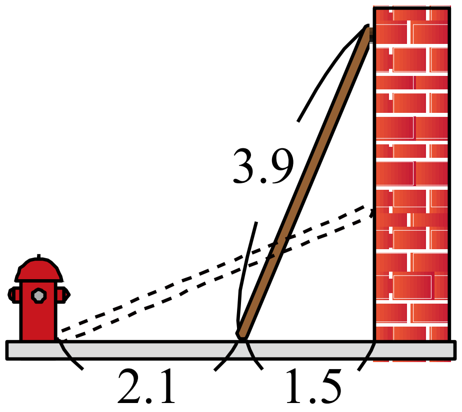
由畢氏定理得，$\overline{CD}^2=2.5^2-(2+0.4)^2=0.49$，

又 $\overline{CD}>0$，得 $\overline{CD}=0.7$，所以 $\overline{AD}=1.5-0.7=0.8$，

即竹竿底端滑動了0.8公尺。



小靖拿著 3.9 公尺長的梯子靠在一垂直牆上。已知牆腳與梯腳距離為 1.5 公尺，若梯腳向外滑移了 2.1 公尺，則梯頂會下移多少公尺？



解 原來的梯頂距離牆腳為 $\sqrt{3.9^2-1.5^2}=3.6$

梯頂下移後的牆腳與梯腳距離為 $1.5+2.1=3.6$

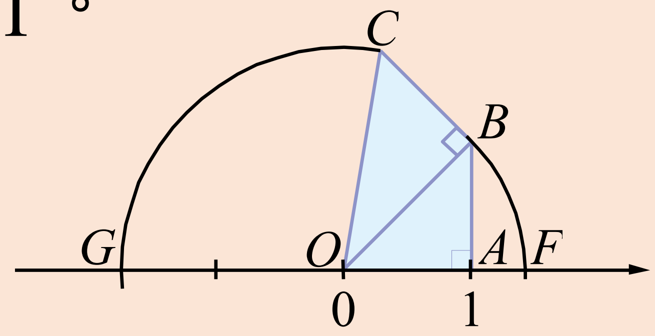
下移後的梯頂距離牆腳為 $\sqrt{3.9^2-3.6^2}=1.5$

所以梯頂下移 $3.6-1.5=2.1$ 公尺

在 2-1 節我們利用拼圖找到長度為 $\sqrt{2}$ 的線段。事實上，我們可以利用畢氏定理找到長度為 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$ 的線段，也可以在數線上找到坐標為 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$ 的點。

例 8 在數線上找到坐標為 $\sqrt{a}$ 的點　　搭配課本p102

如右圖，O 為數線上的原點，A 點坐標為 1。已知 $\triangle OAB$、$\triangle OBC$ 都是直角三角形，$\overline{AB}=\overline{BC}=1$。若 F、G 兩點都在數線上，且 $\overline{OF}=\overline{OB}$、$\overline{OG}=\overline{OC}$，則 F、G 兩點的坐標各為多少？



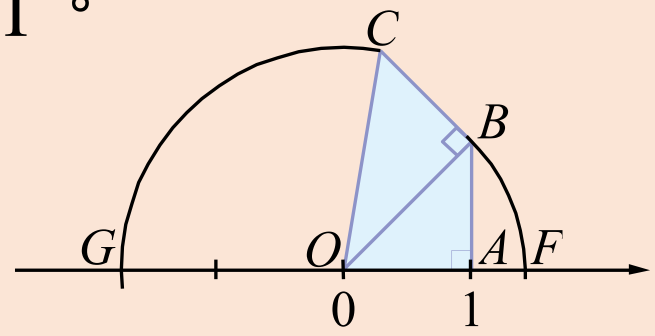
解

直角 $\triangle OAB$ 中，$\overline{OB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$；

直角 $\triangle OBC$ 中，$\overline{OC}=\sqrt{\overline{OB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$。

例⑧ 在數線上找到坐標為$\sqrt{a}$的點 搭配課本p102

如右圖，O 為數線上的原點，A 點坐標為 1。已知$\triangle OAB$、$\triangle OBC$ 都是直角三角形，$\overline{AB}=\overline{BC}=1$。若 F、G 兩點都在數線上，且 $\overline{OF}=\overline{OB}$、$\overline{OG}=\overline{OC}$，則 F、G 兩點的坐標各為多少？

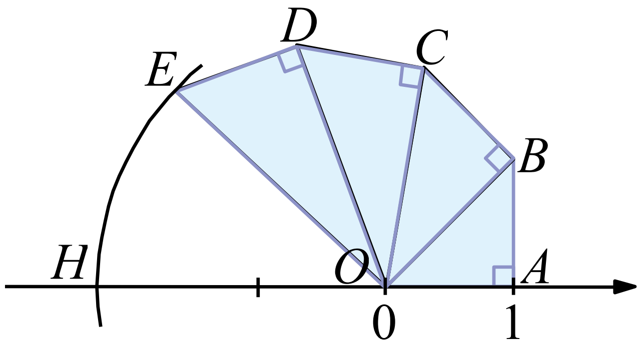


解 因為 $\overline{OF}=\overline{OB}=\sqrt{2}$，所以 F 點坐標為 $F(\sqrt{2})$。

$\overline{OG}=\overline{OC}=\sqrt{3}$，所以 G 點坐標為 $G(-\sqrt{3})$。

如右圖，O 為數線上的原點，A 點坐標為 1。已知$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCD$、$\triangle ODE$ 都是直角三角形，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=1$。則：

(1) $\overline{OE}$ 的長度為多少？



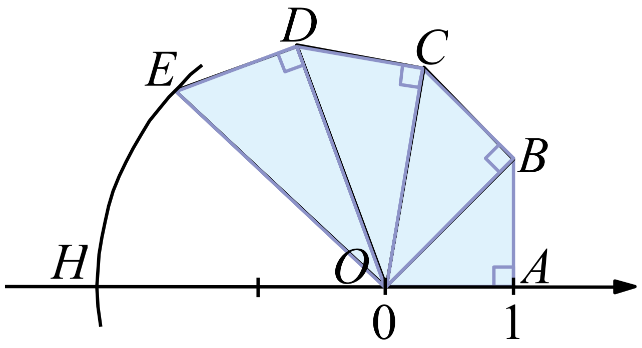
解

(1) $\overline{OB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overline{OC}=\sqrt{\overline{OB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$

如右圖，O 為數線上的原點，A 點坐標為 1。已知$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCD$、$\triangle ODE$ 都是直角三角形，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=1$。則：

(1) $\overline{OE}$ 的長度為多少？



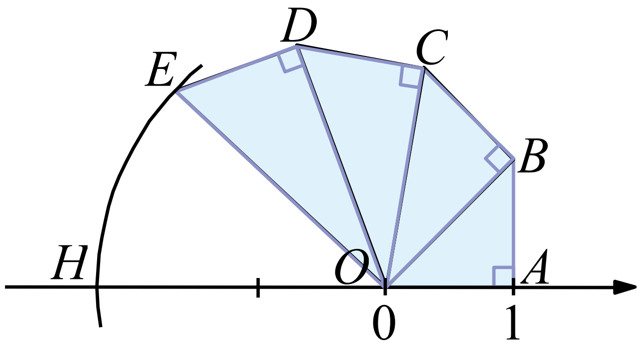
解

$$\overline{OD}=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$$

$$\overline{OE}=\sqrt{\overline{OD}^2+\overline{DE}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

如右圖，O 為數線上的原點，A 點坐標為 1。已知$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCD$、$\triangle ODE$ 都是直角三角形，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=1$。則：

(2)若 H 點也在數線上，且 $\overline{OH}=\overline{OE}$，則 H 點坐標為多少？



解 (2) $\overline{OH}=\overline{OE}=\sqrt{5}$，

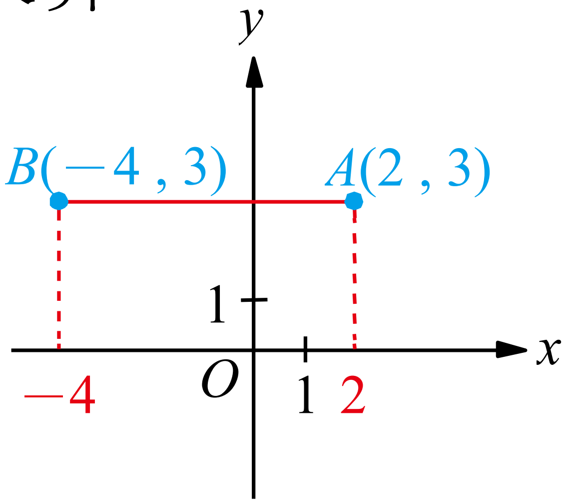
所以 H 點坐標為 $H(-\sqrt{5})$

我們在第一冊學過，若 $A(a)$、$B(b)$為數線上的兩點，則 A、B 的距離可記作 $\overline{AB}$，且 $\overline{AB}=|a-b|=|b-a|$。那麼直角坐標平面上兩點的距離怎麼求呢？我們來看下面的例題。

求出下列各小題中兩點的距離。

(1) $A(2\ ,\ 3)$、$B(-4\ ,\ 3)$　　(2) $C(-2\ ,\ 5)$、$D(-2\ ,\ 1)$

解 (1) A、B 兩點的 y 坐標都是 3，
故兩點在同一條水平線上。
A、B 的距離可用 x 坐標差的絕對值來算，
即 $\overline{AB}=|-4-2|=6$。



例 9 求水平線或鉛垂線上兩點的距離　搭配課本p103

求出下列各小題中兩點的距離。

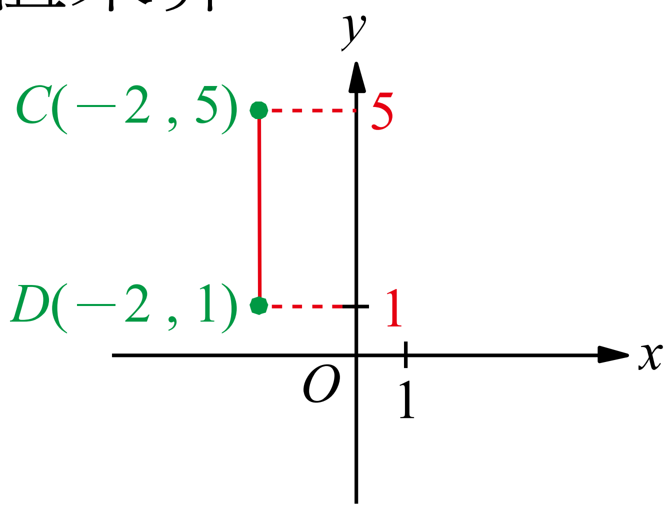
(1) $A(2, 3)$、$B(-4, 3)$　　(2) $C(-2, 5)$、$D(-2, 1)$

解 (2) C、D兩點的 x 坐標都是 -2，

故兩點在同一條鉛垂線上。

C、D 的距離可用 y 坐標差的絕對值來算，

即 $\overline{CD}=|1-5|=4$。



事實上，在直角坐標平面上，

(1)當兩點的 y 坐標相同時，例如：$A(x_1,p)$、$B(x_2,p)$，

它們的距離為 x 坐標差的絕對值，即 $\overline{AB}=|x_1-x_2|$。

(2)當兩點的 x 坐標相同時，例如：$C(q,y_1)$、$D(q,y_2)$，

它們的距離為 y 坐標差的絕對值，即 $\overline{CD}=|y_1-y_2|$。

求出下列各小題中兩點的距離。

(1) $A(1,-2)$、$B(-6,-2)$ (2) $M(-2,-1)$、$N(-2,-5)$

解

(1)因為 A、B 兩點的 y 坐標相同

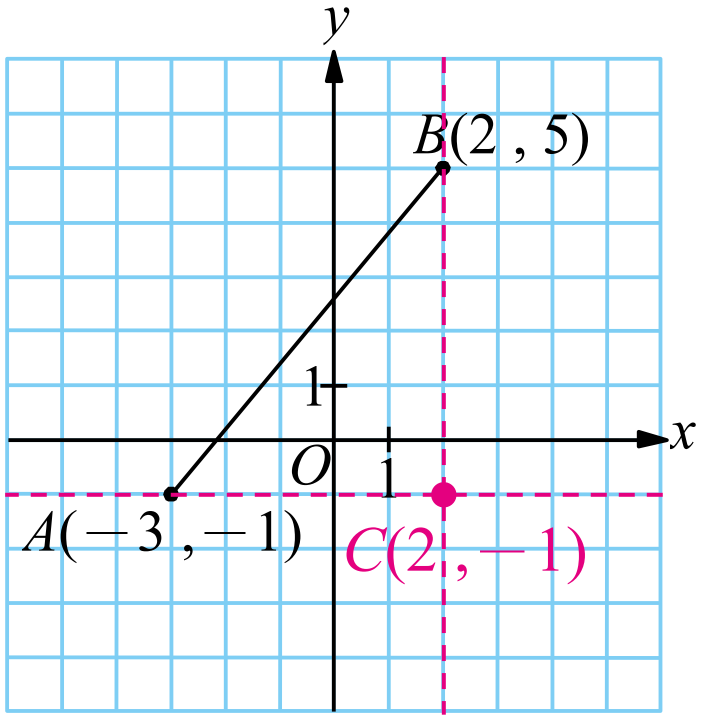
所以 $\overline{AB}=|1-(-6)|=7$

(2)因為 M、N 兩點的 x 坐標相同

所以 $\overline{MN}=|(-1)-(-5)|=4$

如果直角坐標平面上的兩點不在同一水平線或鉛垂線上，則可以透過作水平線和鉛垂線，找到一個直角三角形，再利用畢氏定理求出這兩點的距離。我們來看下面的問題探索。

若 $A(-3,-1)$、$B(2,5)$為直角坐標平面上的兩點，回答下列問題。



1. 在上圖的直角坐標平面上畫出過 A 點平行於 x 軸的水平線及過 B 點平行於 y 軸的鉛垂線。

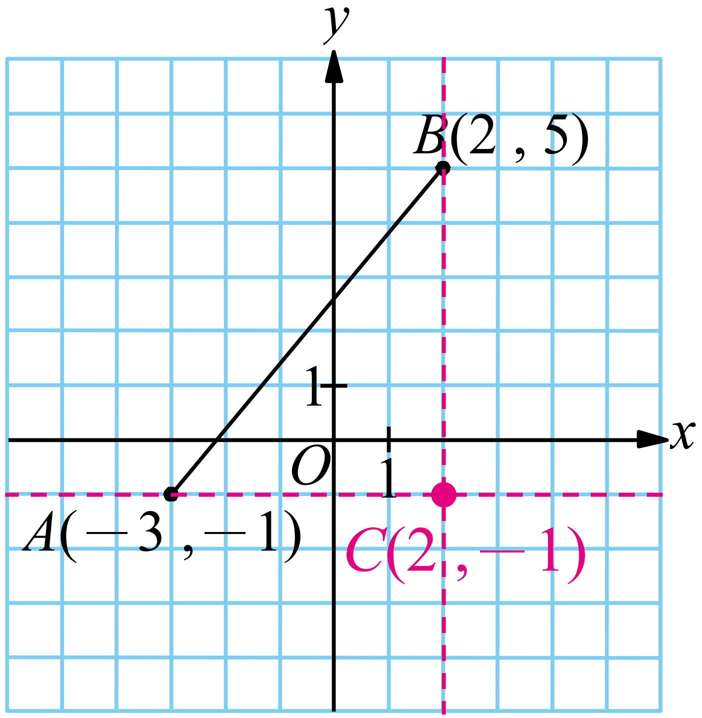
   如上圖

2. 設兩直線相交於 C 點，求 C 點的坐標。

   A、C 兩點的 y 坐標都是 -1，B、C 兩點的 x 坐標都是 2

   所以 C 點的坐標為$(2,-1)$

若 $A(-3,-1)$、$B(2,5)$為直角坐標平面上的兩點，回答下列問題。



3. 分別求 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 的長度。

$\overline{AC}=|(-3)-2|=5$

$\overline{BC}=|5-(-1)|=6$

4. 求 A、B 兩點的距離。

從圖中可以看出，

$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\overline{AB}$ 為斜邊，$\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 為兩股

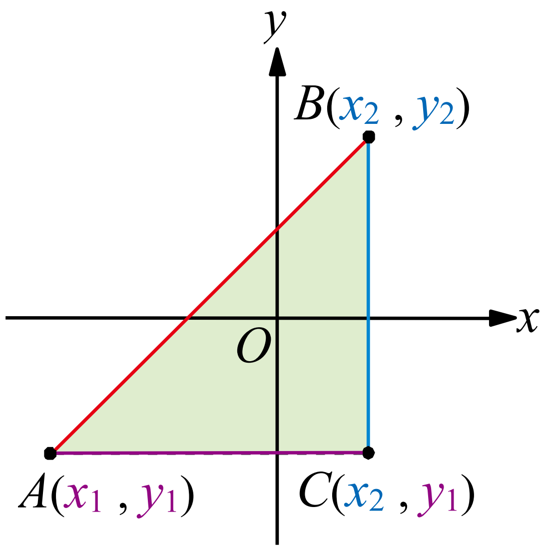
由畢氏定理可得 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=5^2+6^2=25+36=61$

又 $\overline{AB}>0$，所以 $\overline{AB}=\sqrt{61}$

已知在坐標平面上有 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$兩點，且 $x_1 \neq x_2$、$y_1 \neq y_2$，則我們可以找到一點 $C(x_2, y_1)$，使得△ABC 為一直角三角形，

且 $\overline{AC}=$｜x 坐標的差｜$=|x_1-x_2|$；

$\overline{BC}=$｜y 坐標的差｜$=|y_1-y_2|$，



由畢氏定理可以得到 $\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2}$

$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

Key ponit

直角坐標平面上兩點的距離公式

若 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$為直角坐標平面上的兩點，則 A 與 B 的距離

$\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。

例⑩ 求直角坐標平面上兩點的距離 搭配課本p105

若 $A(6,4)$、$B(-3,-7)$為直角坐標平面上的兩點，

則 $\overline{AB}=$？

解

$$\overline{AB}=\sqrt{[6-(-3)]^2+[4-(-7)]^2}$$
$$=\sqrt{9^2+11^2}$$
$$=\sqrt{81+121}$$
$$=\sqrt{202}$$

若 $C(2\,,-3)$、$D(1\,,5)$為直角坐標平面上的兩點，

則 $\overline{CD}=$ ？

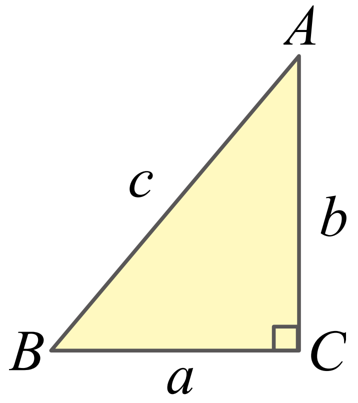
解

$$\overline{CD}=\sqrt{(2-1)^2+(-3-5)^2}$$
$$=\sqrt{1^2+(-8)^2}$$
$$=\sqrt{65}$$

1 畢氏定理

設一直角三角形斜邊的長度為 c，兩股的長度分別為 a 和 b，則 $c^2=a^2+b^2$。

例 如右圖，直角三角形 ABC 中，$a^2+b^2=c^2$。



註：常見的直角三角形三邊長 a、b、c

分別有 3、4、5；

5、12、13；

7、24、25；

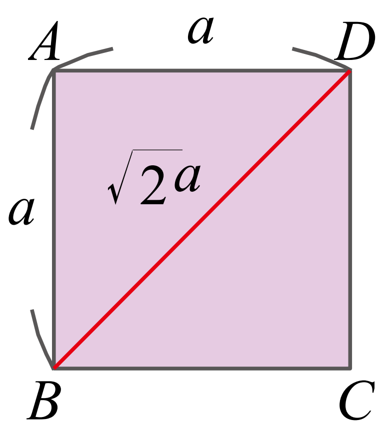
8、15、17。

2 畢氏定理的應用

(1)若正方形邊長為 a，則對角線為$\sqrt{2}a$。

例 邊長為 3 公分的正方形，

其對角線長為 $3\sqrt{2}$ 公分。



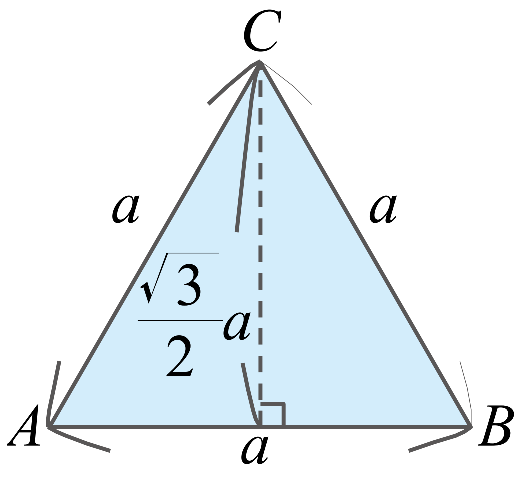
2 畢氏定理的應用

(2)若正三角形邊長為 a，則高為 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$、面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$。

例 邊長為 2 公分的正三角形，

高為 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$ 公分、

面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$ 平方公分。



3 直角坐標平面上兩點的距離公式

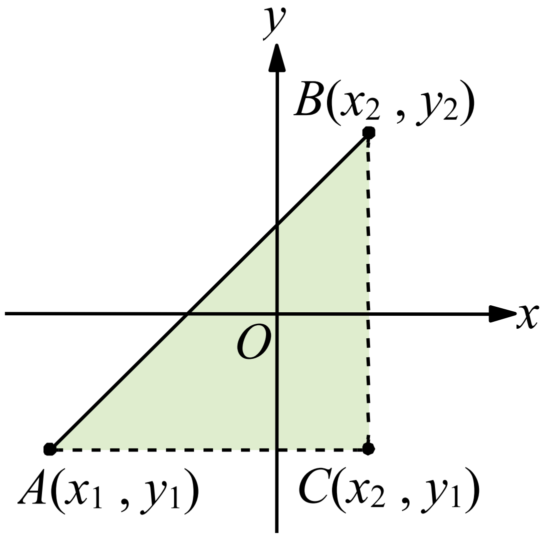
若 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$為直角坐標平面上的兩點，

則 A 與 B 的距離 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。

例 直角坐標平面上有 $A(-3, -1)$、$B(2, 5)$兩點，

$\overline{AB}=\sqrt{[(-3)-2]^2+[(-1)-5]^2}$

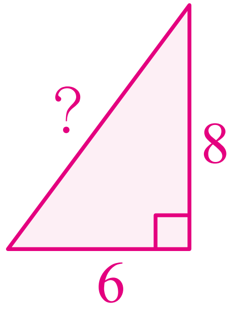
$=\sqrt{25+36}=\sqrt{61}$



1 已知一直角三角形的兩邊長分別為 6、8，則第三邊長可能是哪些數值？

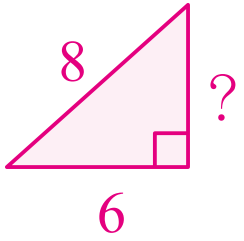
解 (1)若 6、8 分別為直角三角形的兩股，

則斜邊長為$\sqrt{6^2+8^2}=10$



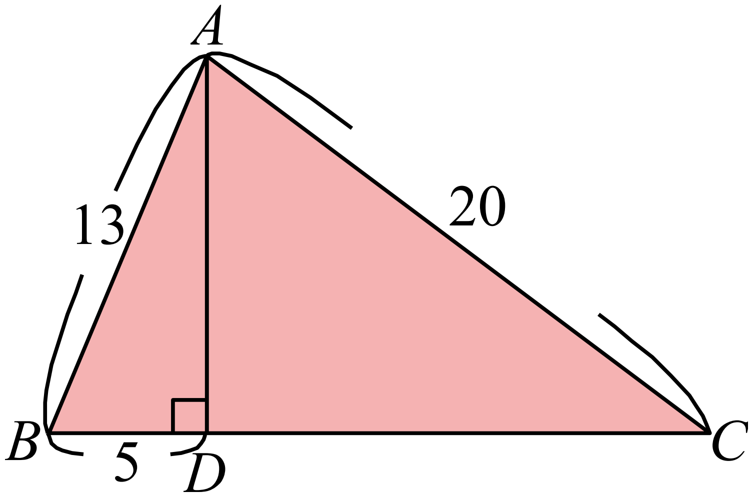
(2)若 6 為直角三角形的一股，8 為斜邊長

則另一股為$\sqrt{8^2-6^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$



所以第三邊長可能是 10 或 $2\sqrt{7}$

2 如右圖，已知$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=13$公分、$\overline{AC}=20$ 公分，$\overline{AD}$垂直$\overline{BC}$於D點，且$\overline{BD}=5$公分，則$\triangle ABC$的面積為多少平方公分？



解

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BD}^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

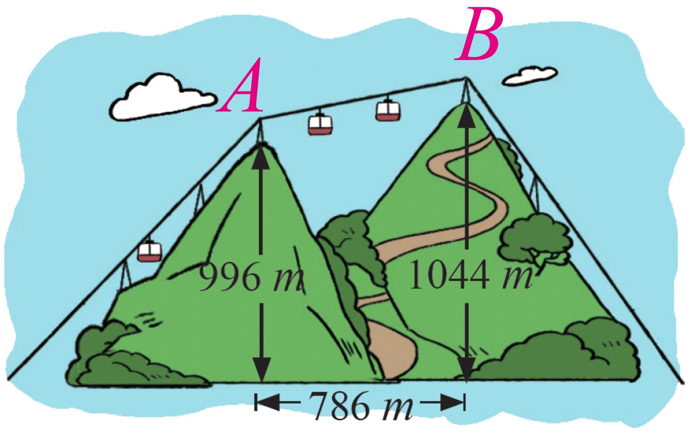
$\overline{DC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{20^2-12^2}=16$

$\triangle ABC$面積$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\times(5+16)\times12$

$=126$(平方公分)

3 解第 55 頁的問題：日月潭纜車橫跨海拔高度分別為 996 和 1044 公尺的兩座山脊，且水平跨距為 786 公尺，若塔柱的高度皆為 60 公尺，至少要多長的纜繩，才能連接兩座山脊上的塔柱？

(以計算機計算並四捨五入到小數點後第 1 位)



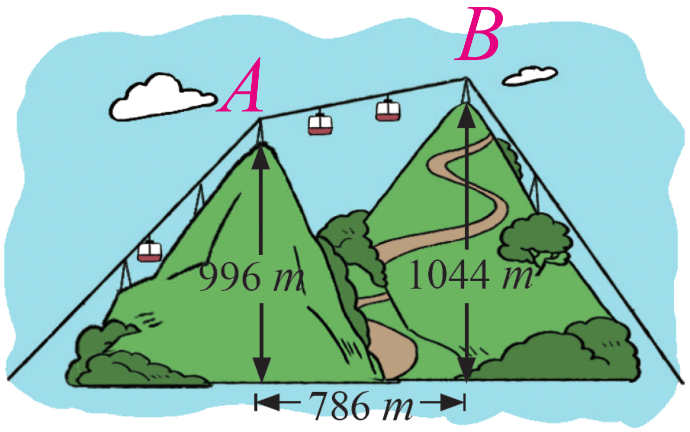
解 設兩座山脊上的塔頂分別為 A、B

$$\overline{AB}^2=786^2+[(1044+60)-(996+60)]^2$$

$$=786^2+48^2=620100$$

3 解第 55 頁的問題：日月潭纜車橫跨海拔高度分別為 996 和 1044 公尺的兩座山脊，且水平跨距為 786 公尺，若塔柱的高度皆為 60 公尺，至少要多長的纜繩，才能連接兩座山脊上的塔柱？

(以計算機計算並四捨五入到小數點後第 1 位)



解 又 $\overline{AB}>0$，所以 $\overline{AB}=\sqrt{620100}$

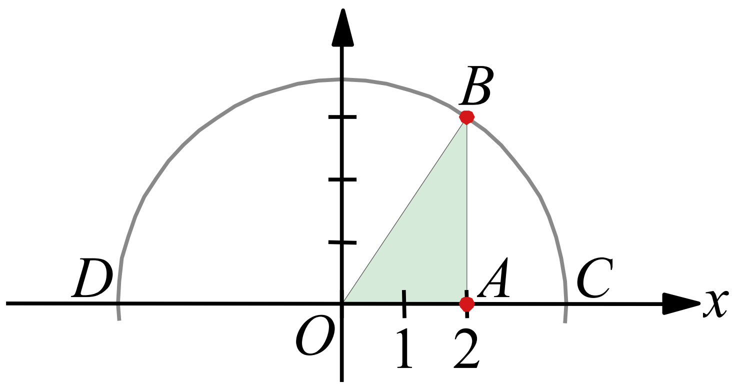
$\fallingdotseq 787.5$

所以至少要 787.5 公尺的纜繩，才能連接兩座山脊上的塔柱

4 在一直角坐標平面上，花花連接 $O(0, 0)$、$A(2, 0)$、$B(2, 3)$ 三點，畫出直角△AOB，接著再以 O 為圓心，$\overline{OB}$ 為半徑畫弧，與 x 軸正向交於 C 點、與 x 軸負向交於 D點，如右圖。則：

(1) C 點的坐標為多少？

(2) $\overline{CD}$ 的長度為多少？



解

(1) $\overline{OC}=\overline{OB}=\sqrt{(2-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$

C 點坐標為 $C(\sqrt{13}, 0)$

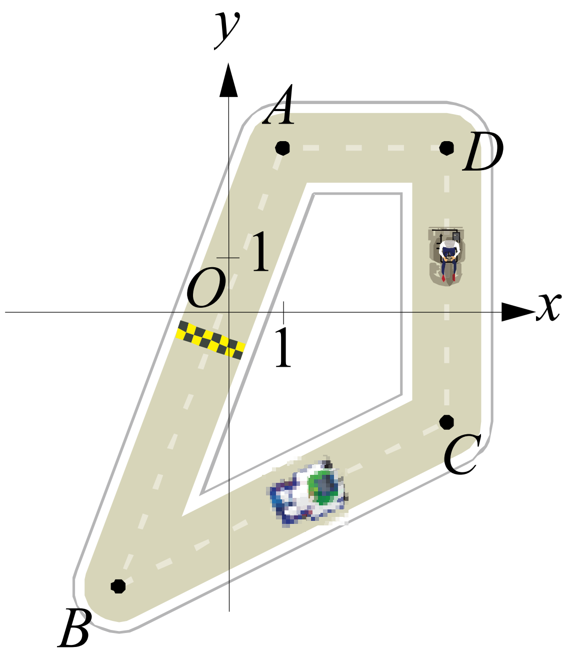
(2) $\overline{CD}=2\overline{OC}$

$=2\sqrt{13}$

5 佳佳卡丁車的跑道如右圖所示。已知 $A(1,3)$、$B(-2,-5)$、$C(4,-2)$、$D(4,3)$四點為四個轉彎處，則：

(1) $\overline{AD}+\overline{DC}$ 的長度為多少？

(2) $\overline{AB}+\overline{BC}$ 的長度為多少？

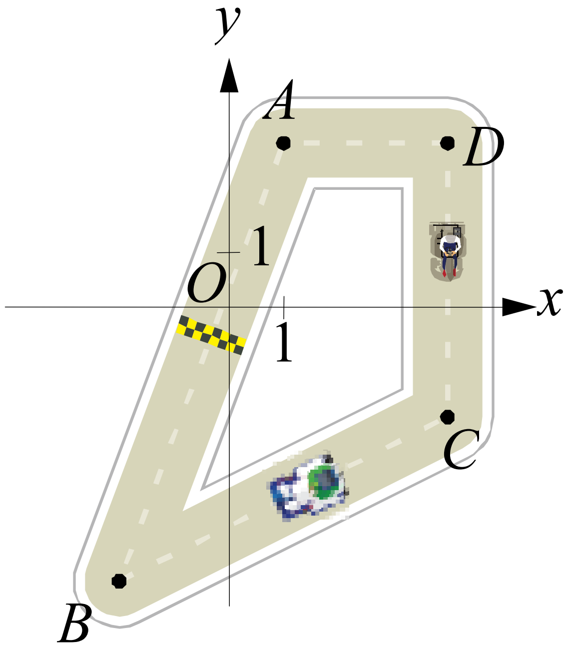


解 (1) $\overline{AD}=|1-4|=3$

$\overline{DC}=|-2-3|=5$

得 $\overline{AD}+\overline{DC}=3+5=8$

5 佳佳卡丁車的跑道如右圖所示。已知 $A(1,3)$、$B(-2,-5)$、$C(4,-2)$、$D(4,3)$四點為四個轉彎處，則：



(1) $\overline{AD}+\overline{DC}$ 的長度為多少？

(2) $\overline{AB}+\overline{BC}$ 的長度為多少？

解

(2) $\overline{AB}=\sqrt{[1-(-2)]^2+[3-(-5)]^2}=\sqrt{3^2+8^2}=\sqrt{73}$

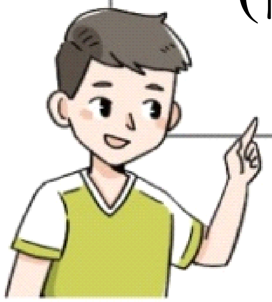
$\overline{BC}=\sqrt{(-2-4)^2+[-5-(-2)]^2}=\sqrt{(-6)^2+(-3)^2}=3\sqrt{5}$

得 $\overline{AB}+\overline{BC}=\sqrt{73}+3\sqrt{5}$

挑錯題

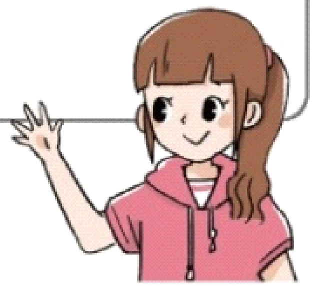
小翊和小妍對於「$\triangle ABC$ 是以 $\overline{AC}$ 為斜邊的直角三角形，並分別以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 為邊，做正方形甲、乙、丙。」的說法如下。判斷他們的說法是否正確，並說明你的理由。

(甲的面積)^2＋(乙的面積)^2
＝(丙的面積)^2



小翊

甲的周長＋乙的周長
＝丙的周長



小妍

挑錯題

小翊：正確☐；錯誤☑，

理由：甲的面積＋乙的面積＝丙的面積

小妍：正確☐；錯誤☑，

理由：甲的面積＋乙的面積＝丙的面積

若 $A=\sqrt{300}-\sqrt{200}$，$B=\sqrt{200}-\sqrt{100}$，試比較 A、B 兩數的大小關係。

1

利用計算機

$A=\sqrt{300}-\sqrt{200}\fallingdotseq 3.178$，

$B=\sqrt{200}-\sqrt{100}\fallingdotseq 4.142$，

因此 $B>A$。

若 $A=\sqrt{300}-\sqrt{200}$，$B=\sqrt{200}-\sqrt{100}$，試比較 A、B 兩數的大小關係。

利用估算方式

因為 $17^2=289$、$18^2=324$，所以$\sqrt{300}=17.\cdots$。

因為 $14^2=196$、$15^2=225$，所以$\sqrt{200}=14.\cdots$。

$A=\sqrt{300}-\sqrt{200}=17.\cdots-14.\cdots<4$

$B=\sqrt{200}-\sqrt{100}=14.\cdots-10>4$　　所以$B>A$。

若 $A=\sqrt{300}-\sqrt{200}$，$B=\sqrt{200}-\sqrt{100}$，試比較 A、B 兩數的大小關係。

利用平方差公式

觀察發現

$(\sqrt{300}-\sqrt{200})(\sqrt{300}+\sqrt{200})=300-200=100$；

$(\sqrt{200}-\sqrt{100})(\sqrt{200}+\sqrt{100})=200-100=100$，

一題多解

搭配課本p109

若 $A=\sqrt{300}-\sqrt{200}$，$B=\sqrt{200}-\sqrt{100}$，試比較 A、B 兩數的大小關係。

利用平方差公式

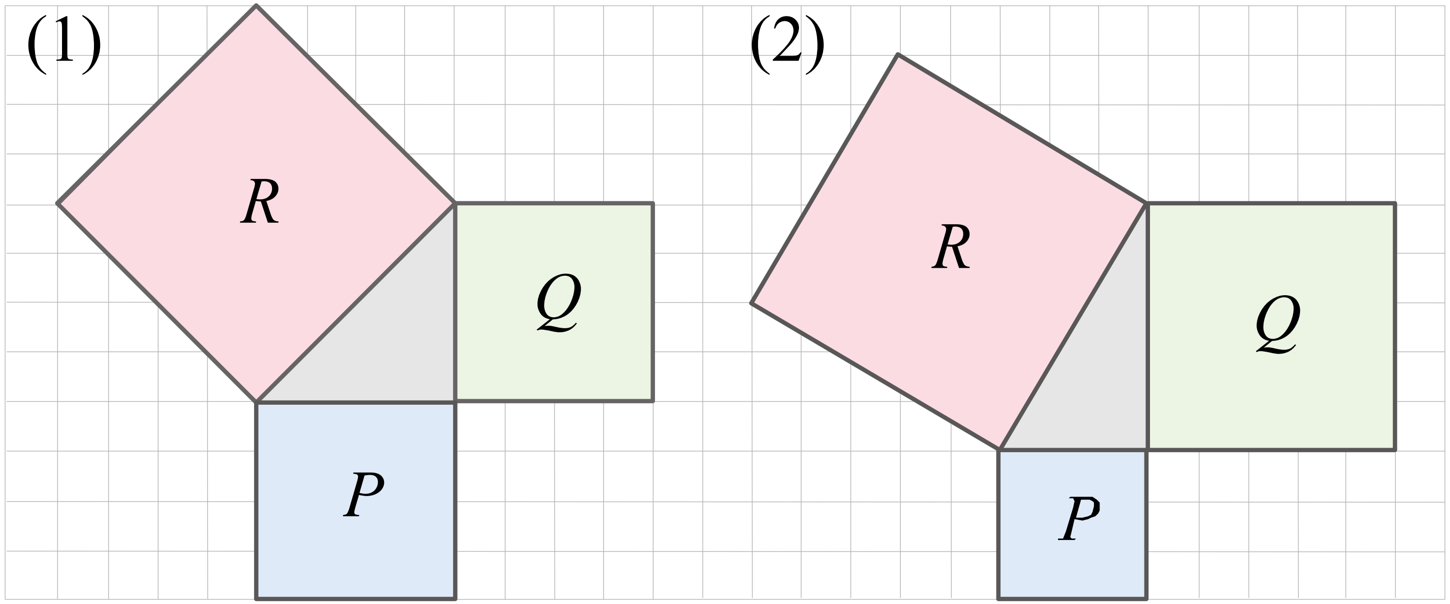
所以 $A\times(\sqrt{300}+\sqrt{200})=B\times(\sqrt{200}+\sqrt{100})=100$。

因為$(\sqrt{300}+\sqrt{200})>(\sqrt{200}+\sqrt{100})$，

所以 $B>A$。


學完囉！
前往➔下一章節

如下圖，每個小方格的邊長皆為 1，試完成表格。



解

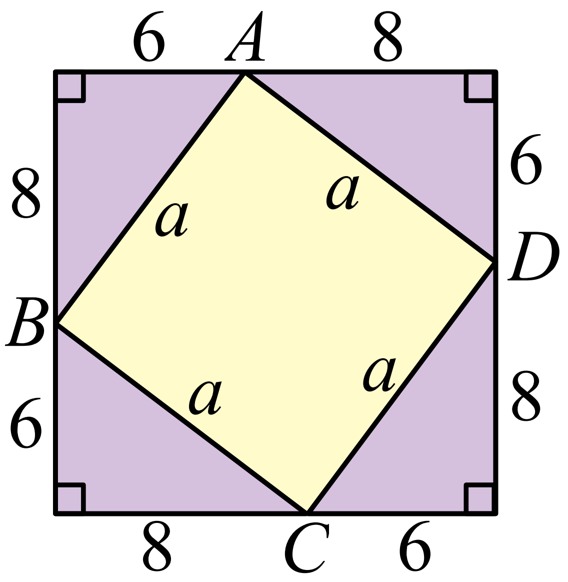
	P 的面積(藍色區域)	Q 的面積(綠色區域)	R 的面積(紅色區域)
(1)	16	16	32
(2)	9	25	34

如右圖，回答下列問題：

(1)四邊形$ABCD$是否為正方形？

(2) $a=$ ？

(3)四邊形$ABCD$的面積為何？



解 (1) 是

(2) 10

(3) 100

參考課本 P94 圖 8，回答下列問題：

(1)若正方形內的方格面積都是 1，請你數數看這 3 個正方形的面積分別是多少？

(2)這 3 個正方形其中較小的 2 個面積相加，是否和第 3 個面積相同？

(3)中間紅色三角形的邊長分別是多少？

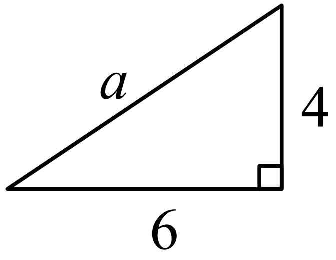
解 (1) 9、16、25

(2) 是

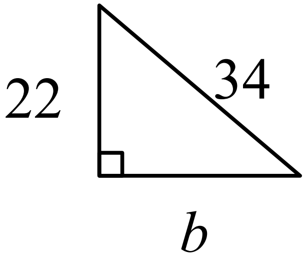
(3) 3、4、5

求出下列各直角三角形邊長 a、b、c、d 的值。

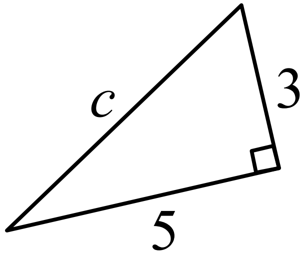
(1)



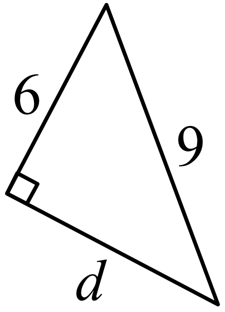
(2)



(3)



(4)



解

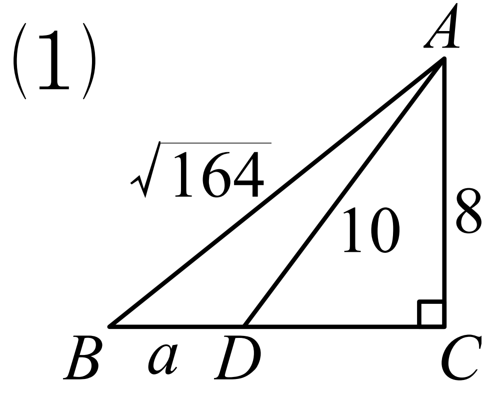
(1) $a=2\sqrt{13}$

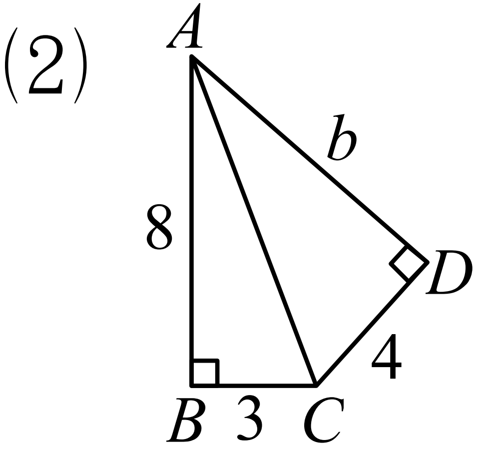
(2) $b=4\sqrt{42}$

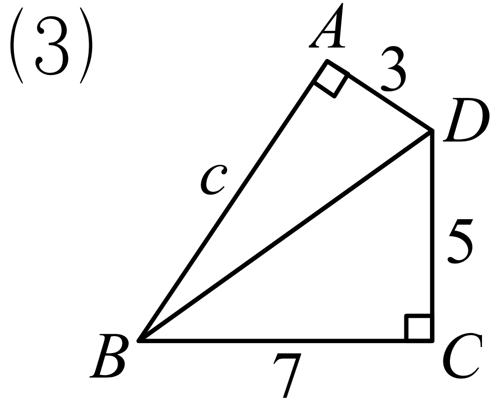
(3) $c=\sqrt{34}$

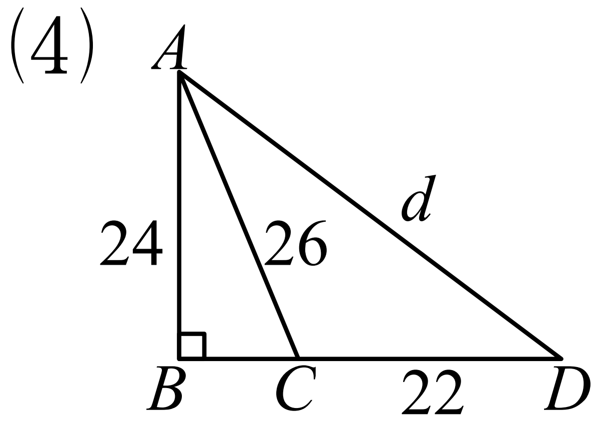
(4) $d=3\sqrt{5}$

求出下列各直角三角形邊長 a、b、c、d 的值。









解

(1) $a=4$

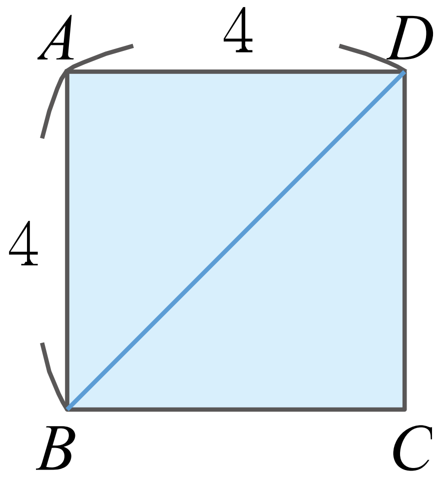
(2) $b=\sqrt{57}$

(3) $c=\sqrt{65}$

(4) $d=40$

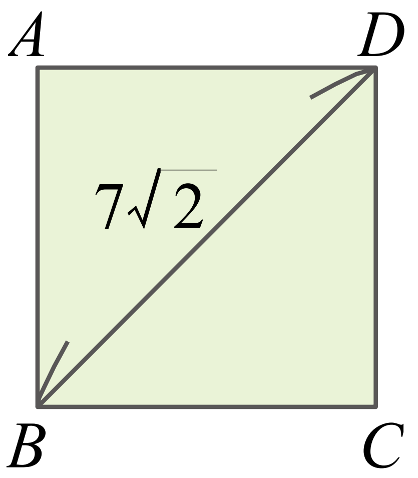
搭配課本p97

已知正方形 $ABCD$ 的邊長為 4 公分，求對角線 $\overline{BD}$ 的長度。



解 $4\sqrt{2}$

已知正方形 $ABCD$ 的對角線長為 $7\sqrt{2}$ 公分，求正方形 $ABCD$ 的邊長是多少？



解 7

已知一正三角形 ABC 的邊長為 12 公分，則：

(1)正三角形 ABC 的高為多少公分？

(2)正三角形 ABC 的面積為多少平方公分？

解 (1) $6\sqrt{3}$

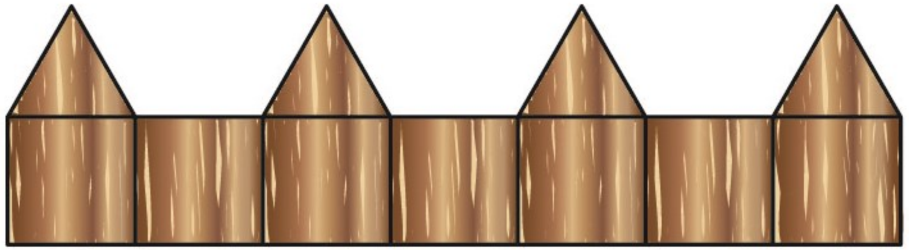
(2) $36\sqrt{3}$

已知一正三角形 ABC 的邊長為 10 公分，求此正三角形的高與面積分別為多少？

解 正三角形的高為 $5\sqrt{3}$ 公分，

面積為 $25\sqrt{3}$ 平方公分

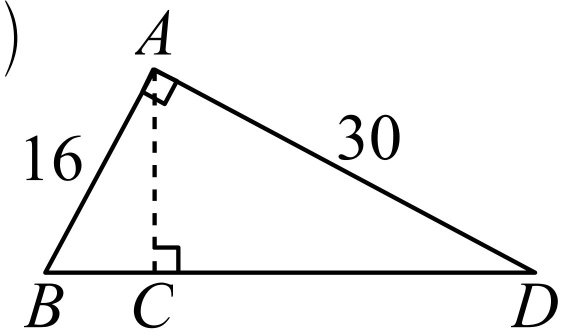
忻澄想要用 4 個邊長為 5 公分的正三角形及 7 個邊長為 5 公分的正方形紙片排成一座城堡，如右圖。求全部紙片的面積為多少平方公分？(以計算機計算並四捨五入到整數位)



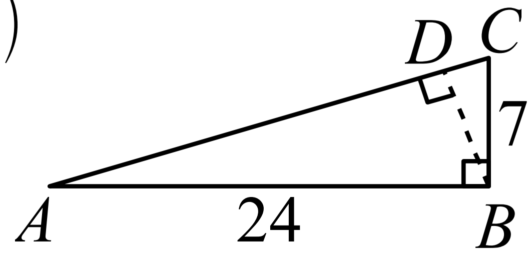
解 218 平方公分

求下列各直角三角形斜邊上的高。

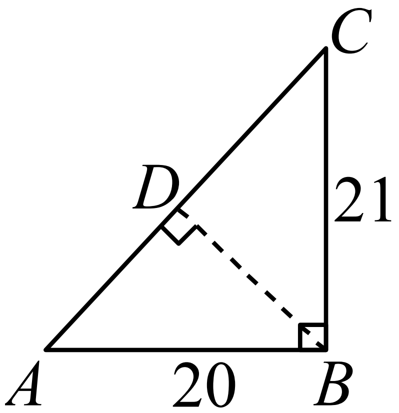
(1)



(2)



(3)



解

(1) $\overline{AC}=\dfrac{240}{17}$

(2) $\overline{BD}=\dfrac{168}{25}$

(3) $\overline{BD}=\dfrac{420}{29}$

已知長 250 公分的梯子斜靠在牆上。

(1)已知梯頂離牆腳 240 公分，則梯腳離牆腳多少公分？

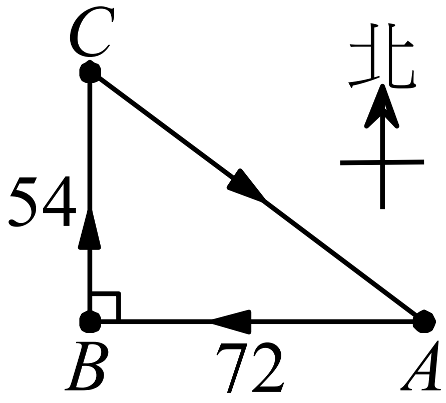
(2)如果梯頂下滑 40 公分，則梯腳移動多少公分？

解 (1) 70 公分

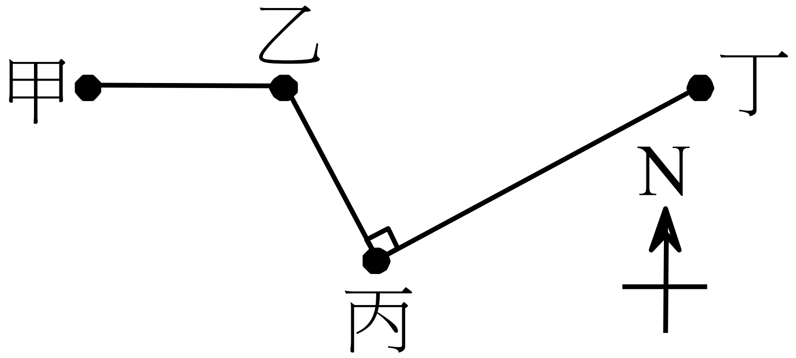
(2) 80 公分

魯福為了找尋海上的祕寶，和一群志同道合的夥伴一起進入了「偉大的航路」。他從 A 地出發，向西航行 72 海浬，到達 B 地，再從 B 地向北航行 54 海浬，到達 C 地，之後一路直行回到 A 地，則魯福共航行了多少海浬？

解 216 海浬



如右圖，某車由甲地等速前往丁地，過程是：自甲向東直行 8 分鐘至乙後，朝東偏南直行 8 分鐘至丙，左轉 90 度直行 15 分鐘至丁。若此車由甲地以原來的速率向東直行可到達丁地，則此車程需多少分鐘？【94 年第一次基本學測】



(A) 19.5 (B) 24 (C) 25 (D) 28

解 (C)

求出下列各小題中兩點的距離。

(1) $A(-7, 2)$、$B(3, 2)$ (2) $C(-1, -5)$、$D(-1, -10)$

解 (1) 10

(2) 5

直角坐標平面上有 $A(4, 1)$、$B(-3, 1)$、$C(5, -2)$、$D(-1, -2)$四點，則 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 何者較長？

解 $\overline{AB}=7$、$\overline{CD}=6$

所以 $\overline{AB}$ 較長

直角坐標平面上有 $A(6, -2)$、$B(6, 5)$、$C(-2, 8)$、$D(-2, 3)$四點，則 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 何者較長？

解 $\overline{AB}=7$、$\overline{CD}=5$

所以 $\overline{AB}$ 較長

直角坐標平面上有 $A(-5,2)$、$B(3,-9)$兩點，過 A 點作平行 x 軸的水平線，過 B 點作平行 y 軸的鉛垂線，設兩直線相交於 C 點，則：

解

(1) C 點的坐標＝$\underline{\quad(3,2)\quad}$。

(2) $\overline{AC}=\underline{\quad 8\quad}$，$\overline{BC}=\underline{\quad 11\quad}$。

(3) $\overline{AB}=\underline{\quad\sqrt{185}\quad}$。

求出下列各小題中兩點的距離。

(1) $A(3,-2)$、$B(-3,6)$　(2) $C(4,8)$、$D(-2,1)$

解

(1) 10

(2) $\sqrt{85}$

直角坐標平面上有 $M(3,-5)$、$N(-4,2)$ 兩點，則 $\overline{MN}=$ ？

解 $7\sqrt{2}$

已知甲、乙從原點 $O(0, 0)$ 同時出發，甲先向東走 4 公里，再向南走 5 公里抵達 A 點；乙先向西走 3 公里，再向北走 2 公里抵達 B 點，則 A、B 兩點的距離為多少公里？

解 $7\sqrt{2}$公里