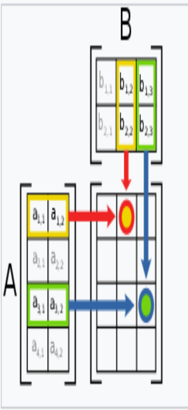
矩陣乘法 [編輯]

主條目：矩陣乘法



矩陣A和B相乘得到AB的示意圖

兩個矩陣的乘法僅當第一個矩陣$\mathbf{A}$的行數(column)和另一個矩陣$\mathbf{B}$的列數(row)相等時才能定義。如$\mathbf{A}$是$m \times n$矩陣和$\mathbf{B}$是$n \times p$矩陣，它們的乘積$\mathbf{AB}$是一個$m \times p$矩陣，它的一個元素

$$[\mathbf{AB}]_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + \cdots + A_{i,n}B_{n,j} = \sum_{r=1}^{n} A_{i,r}B_{r,j}$$

其中$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p$[11]。

例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1) & (1 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 0) \\ (-1 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1) & (-1 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

矩陣的乘法滿足結合律和對矩陣加法的分配律（左分配律和右分配律）：

- 結合律：$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- 左分配律：$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$
- 右分配律：$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA}+\mathbf{CB}$

矩陣的乘法與實數積運算之間也滿足類似結合律的規律；與轉置之間則滿足倒置的分配律。

$$c(\mathbf{AB}) = (c\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(c\mathbf{B})$$
$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

矩陣乘法不滿足交換律。一般來說，矩陣$\mathbf{A}$及$\mathbf{B}$的乘積$\mathbf{AB}$存在，但$\mathbf{BA}$不一定存在，即使存在，大多數時候$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$。比如下面的例子：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

這一特性使得矩陣代數與常見的一些數體（有理數、實數、複數）以及環（多項式環、整數環）都不同。給定一個n維的方塊矩陣$\mathbf{A}$，與$\mathbf{A}$交換的所有方塊矩陣構成一個環，稱為$\mathbf{A}$的交換子環。這些矩陣也構成$\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$的一個子空間，稱為$\mathbf{A}$的可交換空間[12]。與$\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$中所有矩陣交換的矩陣只有形如$\lambda\mathbf{I}_n, \lambda \in \mathbb{R}$的矩陣（稱為實數積矩陣）。其中的$\mathbf{I}_n$是單位矩陣，也就是主對角線上的元素為1，其它元素為0的矩陣。任意矩陣$\mathbf{M}$乘以單位矩陣都得到自身：$\mathbf{MI}_n = \mathbf{M} = \mathbf{I}_n\mathbf{M}$。

除了最常見的矩陣乘法定義以外，也有一些較不常見的矩陣乘法，比如阿達馬乘積和克羅內克乘積[13]。

線性方程組 [編輯]

主條目：線性方程組

矩陣乘法的一個基本應用是在線性方程組上。線性方程組是方程組的一種，它符合以下的形式：

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

其中的$a_{1,1}, a_{1,2}$以及b_1, b_2等等是已知的常數，而x_1, x_2等等則是要求的未知數。運用矩陣的方式，可以將線性方程組寫成一個向量方程式：

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

其中的$a_{1,1}, a_{1,2}$以及b_1, b_2等等是已知的常數，而x_1, x_2等等則是要求的未知數。運用矩陣的方式，可以將線性方程組寫成一個向量方程式：

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

其中，$\mathbf{A}$是由方程組里未知量的係數排成的$m \times n$矩陣，$\mathbf{x}$是含有n個元素的列向量，$\mathbf{b}$是含有m個元素的列向量[14]。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

這個寫法下，將原來的多個方程式轉化成一個向量方程式，在已知矩陣$\mathbf{A}$和向量$\mathbf{b}$的情況下，求未知向量$\mathbf{x}$。

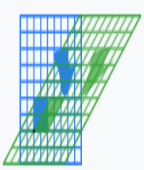
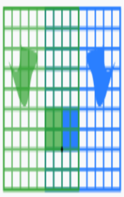
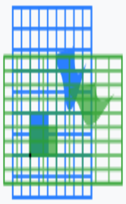
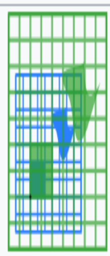
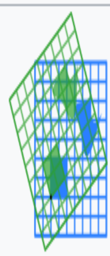
線性轉換 [編輯]

主條目：線性轉換

矩陣是線性轉換的便利表達法，矩陣乘法的本質在聯繫到線性轉換的時候最能體現，因為矩陣乘法和線性轉換的合成有以下的聯繫：以$\mathbb{R}^n$表示所有長度為n的列向量的集合。每個$m \times n$的矩陣$\mathbf{A}$都代表了一個從$\mathbb{R}^n$射到$\mathbb{R}^m$的線性轉換。反過來，對每個線性轉換$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，都存在唯一$m \times n$矩陣$\mathbf{A}_f$使得對所有$\mathbb{R}^n$中的元素$x$，$f(x) = A_f x$。這個矩陣$\mathbf{A}_f$第$i$列第$j$行上的元素是正則基向量$\mathbf{e}_j = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots 0)^T$（第$j$個元素是1，其餘元素是0的向量）在$f$映射後的向量$f(\mathbf{e}_j)$的第$i$個元素。

也就是說，從$\mathbb{R}^n$射到$\mathbb{R}^m$的線性轉換構成的向量空間$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$上存在一個到$M(m, n, \mathbb{R})$的一一映射：$f \mapsto A_f$

以下是一些典型的2維實平面上的線性轉換對平面向量（圖形）造成的效果，以及它們對應的2維矩陣。其中每個線性轉換將藍色圖形映射成綠色圖形；平面的原點(0, 0)用黑點表示。

推移， 幅度m=1.25.	水平鏡射轉換	「擠壓」轉換， 壓縮程度r=3/2	伸縮，3/2倍	旋轉，左轉30°
$\begin{bmatrix} 1 & 1.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & -\sin(\frac{\pi}{6}) \\ \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix}$
				

設有$k \times m$的矩陣$\mathbf{B}$代表線性變換$g: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$，則矩陣積$\mathbf{BA}$代表了線性變換的複合$g \circ f$[15]，因為

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\mathbf{Ax}) = \mathbf{B}(\mathbf{Ax}) = (\mathbf{BA})\mathbf{x}$$

矩陣的秩是指矩陣中線性獨立的行／列向量的最大個數[16]，同時也是矩陣對應的線性轉換的像空間的維度[17]。秩－零化度定理說明矩陣的行數量等於矩陣的秩與零空間維度之和[18]。

方塊矩陣 [編輯]