

$$\begin{aligned} \text{一般來說, } (x+a)(x+b) &= x^2 + ax + bx + ab \\ &= x^2 + \underbrace{(a+b)}_{\text{a 與 b 的和}}x + \underbrace{ab}_{\text{a 與 b 的乘積}} \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

如果把①式中等號的兩邊對調，可得到下列的因式分解：

$$x^2 + \underbrace{(a+b)}_{\text{a 與 b 的和}}x + \underbrace{ab}_{\text{a 與 b 的乘積}} = (x+a)(x+b)$$

也就是說，一個二次多項式 $x^2 + px + q$ ，如果可以因式分解為兩個一次多項式 $x+a$ 與 $x+b$ 的乘積，即

$$\begin{array}{r} \begin{array}{ccc} x^2 & \begin{array}{l} \swarrow x \\ \searrow x \end{array} & \begin{array}{l} +a \\ +b \end{array} \\ & & \searrow ab \end{array} \\ \hline ax + bx = (a+b)x \end{array}$$

我們就得到 $x^2 + px + q = x^2 + (a+b)x + ab$ ，其中 $p = a+b$ 、 $q = ab$ 。

用十字交乘將一個二次多項式分解為兩個一次多項式乘積的方法，稱為**十字交乘法**。利用十字交乘法對形如 $x^2 + px + q$ 的二次多項式做因式分解時，就是要找出 a 、 b 兩數，使得 $a+b=p$ 、 $ab=q$ 。習慣上我們會先從 $q=ab$ 找出合適的 a 、 b 兩數，再檢查 $a+b=p$ 是否也成立。

Key point

二次多項式的係數與因式分解

已知二次多項式 $x^2 + px + q$ ，

若此多項式可因式分解成 $(x+a)(x+b)$ ，則 $p = a+b$ 、 $q = ab$ ；

反之，若有 a 、 b 兩數使得 $a+b=p$ 、 $ab=q$ ，

則 $x^2 + px + q = x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ 。

例 1

因式分解形如 x^2+px+q ($q>0$) 的二次多項式

因式分解下列各式。

(1) x^2+3x+2

(2) $x^2-7x+10$

想法 (1) 將常數項 2 化為兩整數相乘，有兩種分法： $2=1\times 2=(-1)\times(-2)$ 。而交叉相乘後的和，要使 x 項的係數為 3，試試下列兩種情形：

$$\begin{array}{r} x \times 1 \\ x \times 2 \\ \hline x+2x=3x \text{ (合)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \times -1 \\ x \times -2 \\ \hline -x-2x=-3x \text{ (不合)} \end{array}$$

解 (1) $\begin{array}{r} x \times 1 \\ x \times 2 \\ \hline x+2x=3x \end{array}$ 所以 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ 。**想法** (2) 將常數項 10 化為兩整數相乘，有四種分法：

$10=1\times 10=2\times 5=(-1)\times(-10)=(-2)\times(-5)$

而交叉相乘後的和，要使 x 項的係數為 -7，試試下列四種情形：

$$\begin{array}{r} x \times 1 \\ x \times 10 \\ \hline x+10x=11x \text{ (不合)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \times 2 \\ x \times 5 \\ \hline 2x+5x=7x \text{ (不合)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \times -1 \\ x \times -10 \\ \hline -x-10x=-11x \text{ (不合)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \times -2 \\ x \times -5 \\ \hline -2x-5x=-7x \text{ (合)} \end{array}$$

解 (2) $\begin{array}{r} x \times -2 \\ x \times -5 \\ \hline -2x-5x=-7x \end{array}$ 所以 $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$ 。

隨堂練習

因式分解下列各式。

(1) x^2+4x+3

(2) $x^2-8x+15$

例 2

因式分解形如 $x^2 + px + q$ ($q < 0$) 的二次多項式

因式分解下列各式。

(1) $x^2 + 4x - 21$

(2) $x^2 - 5x - 14$

想法 (1) $-21 = (-1) \times 21 = 1 \times (-21) = (-3) \times 7 = 3 \times (-7)$

因為 x 項的係數 4 為正數，所以只需考慮兩數和為正的情形即可，
因此只需試下列兩種情形：

$$\begin{array}{r} x \quad -1 \\ x \quad 21 \\ \hline -x + 21x = 20x \text{ (不合)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad -3 \\ x \quad 7 \\ \hline -3x + 7x = 4x \text{ (合)} \end{array}$$

解 (1)
$$\begin{array}{r} x \quad -3 \\ x \quad 7 \\ \hline -3x + 7x = 4x \end{array}$$
 所以 $x^2 + 4x - 21 = (x - 3)(x + 7)$ 。

想法 (2) $-14 = (-1) \times 14 = 1 \times (-14) = (-2) \times 7 = 2 \times (-7)$

因為 x 項的係數 -5 為負數，所以只需考慮兩數和為負的情形即可，
因此只需試下列兩種情形：

$$\begin{array}{r} x \quad 1 \\ x \quad -14 \\ \hline x - 14x = -13x \text{ (不合)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad 2 \\ x \quad -7 \\ \hline 2x - 7x = -5x \text{ (合)} \end{array}$$

解 (2)
$$\begin{array}{r} x \quad 2 \\ x \quad -7 \\ \hline 2x - 7x = -5x \end{array}$$
 所以 $x^2 - 5x - 14 = (x + 2)(x - 7)$ 。



隨堂練習

因式分解下列各式。

(1) $x^2 + 20x - 21$

(2) $x^2 - 13x - 30$

主題 2 二次項係數不為 1 的十字交乘法

在主題 1 我們知道，當二次項係數為 1 時，可將 x^2 項分解為 $x \cdot x$ 。但如果把 x^2 項分解為 $(-x) \cdot (-x)$ ，結果又如何呢？我們以例 2 第(2)題的 $x^2 - 5x - 14$ 為例，觀察下面另外兩種情形：

$$\begin{array}{r} -x \quad -1 \\ -x \quad 14 \\ \hline x - 14x = -13x \text{ (不合)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x \quad -2 \\ -x \quad 7 \\ \hline 2x - 7x = -5x \text{ (合)} \end{array}$$

此時只有一種情形的 x 項係數也是 -5 ，

$$\text{因此 } x^2 - 5x - 14 = (-x - 2)(-x + 7),$$

$$\text{而 } (-x - 2)(-x + 7) = [-(x + 2)][-(x - 7)] = (x + 2)(x - 7),$$

所以 $(-x - 2)(-x + 7)$ 和 $(x + 2)(x - 7)$ 可以看成是一樣的。

習慣上，當二次項係數為正時，只要考慮正因數即可。因此下面的例題中，若二次項係數為正時，我們僅以兩個正因數相乘來說明。

當 x^2 項的係數不為 1 時，我們也可以用類似的方法來處理，例如以十字交乘將 $(2x + 5)(3x + 4)$ 的乘積展開：

$$\begin{array}{r} 2x \times 3x = 6x^2 \quad \begin{array}{l} 2x \quad +5 \\ 3x \quad +4 \end{array} \quad 5 \times 4 = 20 \\ \hline 15x + 8x = 23x \end{array}$$

我們發現 x^2 項的係數 6 是 2 與 3 的乘積；

常數項 20 是 5 與 4 的乘積；

x 項的係數 23 是 $5 \times 3 + 2 \times 4$ 的值。

即 $(2x + 5)(3x + 4) = 6x^2 + 23x + 20$ 。將此式等號左右兩邊互換，就得到 $6x^2 + 23x + 20$ 的因式分解。

例 3

利用十字交乘法做因式分解

因式分解下列各式。

(1) $2x^2 + 15x + 7$

(2) $9x^2 - 9x + 2$

想法 (1) $2 = 1 \times 2$

$$7 = 1 \times 7 = (-1) \times (-7)$$

而交叉相乘後的和，要使 x 項的係數為 15，試試下列四種情形：

$$\begin{array}{r} x \quad 1 \\ 2x \quad 7 \\ \hline 2x + 7x = 9x \text{ (不合)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad 7 \\ 2x \quad 1 \\ \hline 14x + x = 15x \text{ (合)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad -1 \\ 2x \quad -7 \\ \hline -2x - 7x = -9x \text{ (不合)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad -7 \\ 2x \quad -1 \\ \hline -14x - x = -15x \text{ (不合)} \end{array}$$

解 (1)
$$\begin{array}{r} x \quad 7 \\ 2x \quad 1 \\ \hline 14x + x = 15x \end{array}$$
 所以 $2x^2 + 15x + 7 = (x + 7)(2x + 1)$ 。

想法 (2) $9 = 1 \times 9 = 3 \times 3$

$$2 = 1 \times 2 = (-1) \times (-2)$$

因為 1×2 會使交叉相乘後的和為正數，但 x 項的係數 -9 為負數，所以只需考慮下面三種情形：

$$\begin{array}{r} x \quad -1 \\ 9x \quad -2 \\ \hline -9x - 2x = -11x \text{ (不合)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad -2 \\ 9x \quad -1 \\ \hline -18x - x = -19x \text{ (不合)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x \quad -1 \\ 3x \quad -2 \\ \hline -3x - 6x = -9x \text{ (合)} \end{array}$$

解 (2)
$$\begin{array}{r} 3x \quad -1 \\ 3x \quad -2 \\ \hline -3x - 6x = -9x \end{array}$$
 所以 $9x^2 - 9x + 2 = (3x - 1)(3x - 2)$ 。



隨堂練習

因式分解下列各式。

(1) $6x^2 + 19x + 15$

(2) $6x^2 - 23x + 21$

在例 1~3 嘗試因式分解的過程中，可以發現只要有一種組合嘗試正確，就不需要再嘗試其他組合。

例 4

利用十字交乘法做因式分解

因式分解下列各式。

(1) $4x^2 + 4x - 3$

(2) $5x^2 - 23x - 10$

解

$$(1) \begin{array}{r} 2x \quad -1 \\ 2x \quad 3 \\ \hline -2x + 6x = 4x \end{array} \quad \text{所以 } 4x^2 + 4x - 3 = (2x - 1)(2x + 3)。$$

$$(2) \begin{array}{r} x \quad -5 \\ 5x \quad 2 \\ \hline -25x + 2x = -23x \end{array} \quad \text{所以 } 5x^2 - 23x - 10 = (x - 5)(5x + 2)。$$



隨堂練習

因式分解下列各式。

(1) $13x^2 + 8x - 5$

(2) $5x^2 - 4x - 12$

主題 3 綜合應用

有些多項式需要綜合運用學過的方法來做因式分解，大致上以先提出公因式（數）或提出負數來讓 x^2 項係數變為正數，接著再考慮以乘法公式或十字交乘法來做因式分解，我們來看下面的例題。

例 5

利用十字交乘法做二次項係數為負的因式分解

因式分解 $-x^2+2x+63$ 。

解

$$\begin{aligned} & -x^2+2x+63 \\ & = -(x^2-2x-63) \\ & = -(x+7)(x-9) \end{aligned}$$

提出 -1

$$\begin{array}{r} x \quad 7 \\ x \quad -9 \\ \hline 7x - 9x = -2x \end{array}$$

Hint

也可這樣分解：

$$\begin{aligned} & -x^2+2x+63 \\ & = (x+7)(-x+9) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x \quad 7 \\ -x \quad 9 \\ \hline -7x + 9x = 2x \end{array}$$

例 6

利用提出係數的公因數再做因式分解

因式分解 $12y^2+44y+40$ 。

解

$$\begin{aligned} & 12y^2+44y+40 \\ & = 4(3y^2+11y+10) \\ & = 4(y+2)(3y+5) \end{aligned}$$

提出 4

$$\begin{array}{r} y \quad 2 \\ 3y \quad 5 \\ \hline 6y + 5y = 11y \end{array}$$

Hint

也可以這樣分解：

$$\begin{aligned} & 12y^2+44y+40 \\ & = (4y+8)(3y+5) \\ & = 4(y+2)(3y+5) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 4y \quad 8 \\ 3y \quad 5 \\ \hline 24y + 20y = 44y \end{array}$$

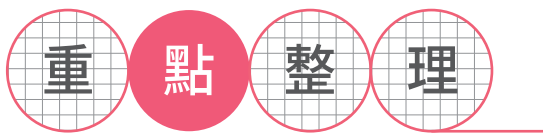


隨堂練習

因式分解下列各式。

(1) $-3x^2+11x+4$

(2) $18x^2+21x-30$



1 二次多項式的係數與因式分解

已知二次多項式 x^2+px+q ，

若此多項式可因式分解成 $(x+a)(x+b)$ ，則 $p=a+b$ 、 $q=ab$ ；

反之，若有 a 、 b 兩數使得 $a+b=p$ 、 $ab=q$ ，

則 $x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ 。

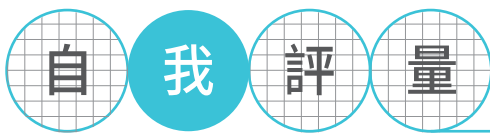
例 $x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$ ，其中 $6=2+4$ 、 $8=2\times 4$ 。

2 利用十字交乘法做因式分解

用十字交乘將一個二次多項式分解為兩個一次多項式乘積的方法，稱為十字交乘法。

例 $x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$ 。

$$\begin{array}{r}
 x \quad -2 \\
 x \quad 4 \\
 \hline
 -2x+4x=2x
 \end{array}$$



1 若二次多項式 $x^2 + 5x + 6$ 可以因式分解成 $(x+a)(x+b)$ ，則：

P.131 內文

(1) $a+b = ?$

(2) $ab = ?$

2 因式分解下列各式。

(1) $x^2 + 10x + 21$

P.132 例 1

(2) $x^2 - 8x - 48$

P.133 例 2

(3) $10x^2 - 51x + 27$

P.135 例 3

(4) $8x^2 + 2x - 3$

P.136 例 4

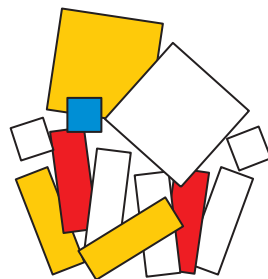
(5) $-5x^2 + 36x - 7$

P.137 例 5

(6) $24x^2 + 30x - 9$

P.137 例 6

- 3 解 113 頁問題：某拼圖運用了蒙德里安的構圖方式，將 2 個面積為 $x^2 \text{ cm}^2$ 的大正方形、7 個面積為 $x \text{ cm}^2$ 的長方形及 3 個面積為 1 cm^2 的小正方形拼成一幅矩形作品，你能算出這幅作品的長和寬各是多少嗎？（以 x 表示） P.135 例 3



挑錯題

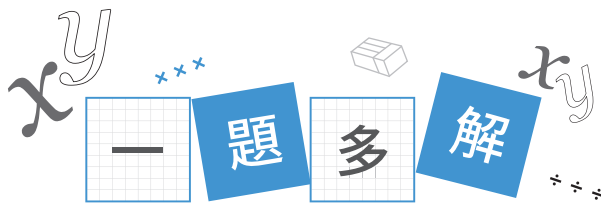
以下是小翊和小妍「因式分解 $x^2 - 5x - 6$ 」的過程。判斷他們的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。

小翊：

$$\begin{aligned}
 &x^2 - 5x - 6 \\
 &= (x - 3)(x - 2) \quad \begin{array}{r} x \quad -3 \\ x \quad -2 \\ \hline -3x - 2x = -5x \end{array}
 \end{aligned}$$

小妍：

$$\begin{aligned}
 &x^2 - 5x - 6 \\
 &= (x - 6)(x + 1) \quad \begin{array}{r} x \quad -6 \\ x \quad 1 \\ \hline -6x + x = -5x \end{array}
 \end{aligned}$$



因式分解 $(2x+3)^2 - (x-1)^2$ 。



將 $(2x+3)$ 和 $(x-1)$ 看成新的未知數，再利用平方差公式

$$\begin{aligned} & (2x+3)^2 - (x-1)^2 \\ &= [(2x+3) + (x-1)][(2x+3) - (x-1)] \\ &= (3x+2)(x+4) \end{aligned}$$



展開後再利用十字交乘法

$$\begin{aligned} & (2x+3)^2 - (x-1)^2 \\ &= (4x^2 + 12x + 9) - (x^2 - 2x + 1) \\ &= 3x^2 + 14x + 8 \\ &= (3x+2)(x+4) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3x \quad \times \quad 2 \\ \quad \quad \times \quad 4 \\ \hline 2x + 12x = 14x \end{array}$$



拼圖排成矩形

由 $(2x+3)^2 - (x-1)^2 = 3x^2 + 14x + 8$
可將 $3x^2$ 看成 3 個邊長為 x 的正方形；

$14x$ 看成 14 個長為 x 、寬為 1 的長方形；

8 看成 8 個邊長為 1 的正方形。

則可排列成長為 $3x+2$ 、寬為 $x+4$ 的矩形，如右圖。

故 $(2x+3)^2 - (x-1)^2 = (3x+2)(x+4)$ 。

