3-5 三角形的邊角關係

1 三角形的三邊關係
2 三角形的邊角關係

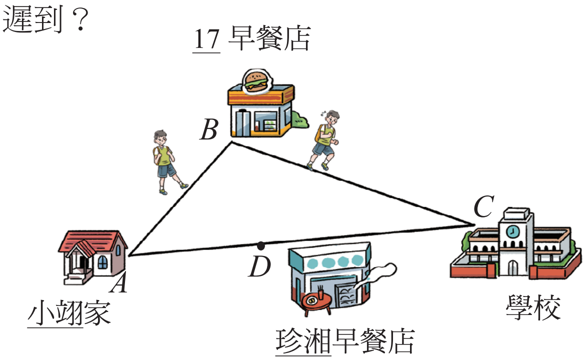
主題 1 三角形的三邊關係

任意三角形三邊長的關係

：小翊，為什麼你上學常遲到？

：我每天都是從家裡（A 點）出發，先去 17 早餐店（B 點）買早餐，再到學校。

：你這樣是在繞路，去珍湘早餐店（D 點）買會比較近。 —1—



1提醒學生可以利用一下所學過的「兩點之間以直線的距離為最短」，來推得三角形中任意兩邊的和大於第三邊。

2教師要特別強調，三角形任意一邊長除了會小於另外兩邊和，也會大於另外兩邊差的絕對值。

如圖 1，若 a、b、c 是△ABC 的三邊長，

我們可以得到：$a+b>c$……(1)

$a+c>b$……(2)

$b+c>a$……(3)

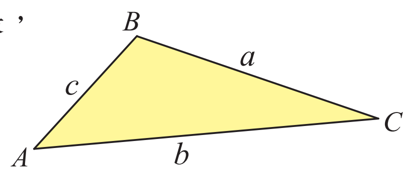


圖 1

也就是說：**三角形中任意兩邊的和大於第三邊**。

2 由 (1) 式兩邊同減 b，可以得到 $a>c-b$，

由 (2) 式兩邊同減 c，可以得到 $a>b-c$。

同理：由 (3) 式可得 $b>a-c$，由 (1) 式可得 $b>c-a$。

由 (3) 式可得 $c>a-b$，由 (2) 式可得 $c>b-a$。

也就是說：**三角形中任意兩邊的差小於第三邊**。

因此可知：

Key point

三角形三邊長的關係

三角形中任意兩邊的和大於第三邊，任意兩邊的差小於第三邊。

學習內容

S-8-6 **畢氏定理**：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。

S-8-8 **三角形的基本性質**：等腰三角形兩底角相等；非等腰三角形大角對大邊，大邊對大角；三角形兩邊和大於第三邊；外角等於其內對角和。

新綱異動 ＋新增或搬移；－刪除或搬移

－樞紐與逆樞紐定理	根據課程綱要之學習內容，不涉及樞紐與逆樞紐定理。
＋特殊直角三角形的邊長關係	根據課程綱要之學習內容 S-9-4，將特殊直角三角形的邊長關係移至九年級做教學。

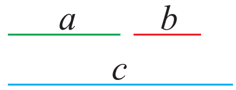
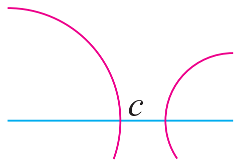
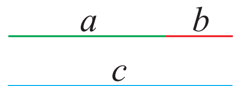
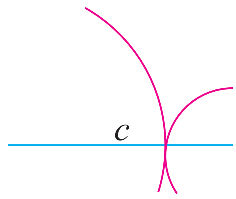
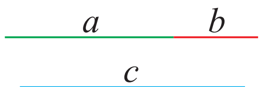
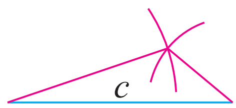
三線段構成三角形的條件

前面我們已了解三角形的三邊長關係，以下將進行簡單的操作，來探討三條線段必須具備何種關係才能形成一個三角形。

尺規影片
三線段構成三角形的條件

問題探索 三線段構成三角形的條件

已知長度分別為 a、b、c 的三線段，其中線段 c 最長，分別以線段 c 的兩端點為圓心，a、b 長為半徑畫弧，觀察 $a+b$ 與 c 的大小關係，以判斷此三線段是否能構成一個三角形。

條件	已知三線段	尺規作圖	是否形成三角形
當 $a+b<c$ 時			否
當 $a+b=c$ 時			否
當 $a+b>c$ 時			是

由問題探索可以知道，當最長的線段長大於或等於其他兩線段長的和時，皆作不出三角形；當最長的線段長小於其他兩線段長的和時，此三線段必可構成三角形。

重新布題

下列各組的 3 個數分別代表三線段的長度，哪幾組數可以構成三角形？

(1) 3、3、7

(2) 1、6、6

(3) 4、4、5

(4) 3、4、4

答：(2)、(3)、(4)

重新布題

若△ABC 中，$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=4$，則下列何者可能為 $\overline{AC}$ 之長度？

(A) 4 (B) 6 (C) 10 (D) 14

答：(C)

Key point

三線段構成三角形的條件

任意三線段中，若最長的線段長小於其他兩線段長的和，則此三線段可以構成一個三角形。

例 1 三線段構成三角形的條件 學習內容 S-8-8

◆搭配習作 P.41 第 1 題

下列各組的 3 個數分別代表三線段的長度，哪幾組數可以構成三角形？

(1) 8、8、12　　(2) 7、8、15　　(3) 5、9、16

解 (1) $\because 8+8>12$，$\therefore$ 8、8、12 可以構成三角形。

(2) $\because 7+8=15$，$\therefore$ 7、8、15 不可以構成三角形。

(3) $\because 5+9<16$，$\therefore$ 5、9、16 不可以構成三角形。

故只有(1)這組數所代表的三線段可以構成三角形。

隨堂練習

已知有長 3 公分、6 公分的兩線段，下列甲、乙的敘述是否正確？

甲：若另有一長為 3 公分的線段，則此三線段可構成等腰三角形。

乙：若另有一長為 6 公分的線段，則此三線段可構成等腰三角形。

甲：$\because 3+3=6$，$\therefore$ 3、3、6 不可以構成三角形

乙：$\because 3+6>6$，$\therefore$ 3、6、6 可以構成等腰三角形

故只有乙正確

重新布題

如圖(一)，$\overline{AB}$ 為一條拉直的繩子，M 為此繩子的中點。若以 $\overline{AB}$ 為周長，A 為頂點，將繩子圍成$\triangle AXY$，如圖(二)所示，則關於 M 點在$\triangle AXY$ 上的位置，下列敘述何者正確？

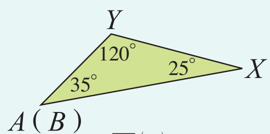
(A) 在 $\overline{XY}$ 的中點上

(B) 在 $\overline{AX}$ 上，且距 X 點較近，距 A 點較遠

(C) 在 $\overline{XY}$ 上，且距 X 點較近，距 Y 點較遠

(D) 在 $\overline{XY}$ 上，且距 Y 點較近，距 X 點較遠

圖(一)



圖(二)

【94 年第二次基本學測】

答：(C)

數位備課

例 2 三角形三邊長的關係 學習內容 S-8-8

◆搭配習作 P.41 第 2 題

若 2、11 是一個三角形的兩邊長，且第三邊的邊長是整數，列出符合條件的三角形。

1 因為學生已經學過不等式的運算，所以教師可以在本段的推論中，適時的幫學生複習不等式的運算。

解 設第三邊長是 x，則滿足 $(11-2)<x<(11+2)$， 1
得 $9<x<13$，而 x 又是整數，
∴第三邊的長度可能是 10、11 或 12。
以 10、11、12 為第三邊分別檢視：
(1) 三邊長為 2、11、10 滿足 $2+10>11$。
(2) 三邊長為 2、11、11 滿足 $2+11>11$。
(3) 三邊長為 2、11、12 滿足 $2+11>12$。
∴符合條件的三角形三邊長有
2、11、10；2、11、11；2、11、12 三種。

隨堂練習

已知甲、乙、丙三點不在同一直線上，三點間的距離記錄如下表，表中部分被咖啡所弄髒，使得丙到甲的距離無法辨識。若弄髒的部分為一整數，則此數可能是哪些整數？

路線	甲到乙	乙到丙	丙到甲
距離（公尺）	2.5	6.8	

設丙到甲的距離為 x 公尺
則 $6.8-2.5<x<6.8+2.5$，得 $4.3<x<9.3$
∵x 為整數
∴x 的值可能為 5、6、7、8、9（公尺）

重新布題

小薰想在花園中，圍出一塊土地種玫瑰花，他以自己的位置為中心找出與他等距的甲、乙、丙三點，並測量此三點間的距離，紀錄如右表。表中有部分為水漬所弄髒，使得丙到甲的距離無法辨識。已知弄髒的部分為一整數，則此數字可能是下列哪一個？

	甲到乙	乙到丙	丙到甲
距離（公尺）	1.5	7.5	

【91 年第一次基本學測】

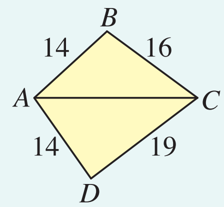
(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 8

答：(D)

數位備課

例 3　三角形三邊長的關係 學習內容 S-8-8

如右圖，已知 $\overline{AB}=14$、$\overline{BC}=16$、$\overline{AD}=14$、$\overline{CD}=19$，若 $\overline{AC}$ 為整數，則 $\overline{AC}$ 的最大值為何？



解　在△ABC 中，

$\because (16-14)<\overline{AC}<(16+14)$，

$\therefore 2<\overline{AC}<30$……①

在△ADC 中，

$\because (19-14)<\overline{AC}<(19+14)$，

$\therefore 5<\overline{AC}<33$……②

由於 $\overline{AC}$ 為整數且由①、②可知，

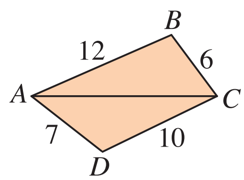
$\overline{AC}$ 的最大值為 29。

Hint

因為 $\overline{AC}$ 為△ABC 與△ACD 的共用邊，所以須同時考慮①、②兩個條件。

隨堂練習

如右圖，已知 $\overline{AB}=12$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CD}=10$、$\overline{AD}=7$，若 $\overline{AC}$ 為整數，則 $\overline{AC}$ 的最大值與最小值分別為多少？



在△ABC 中

$\because (12-6)<\overline{AC}<(12+6)$

$\therefore 6<\overline{AC}<18$……①

在△ADC 中

$\because (10-7)<\overline{AC}<(10+7)$

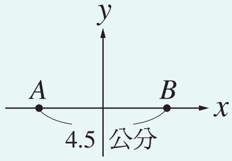
$\therefore 3<\overline{AC}<17$……②

由於 $\overline{AC}$ 為整數且由①、②可知

$\overline{AC}$ 的最小值為 7，最大值為 16

重新布題

如右圖，坐標平面上，A、B 兩點均在 x 軸上，$\overline{AB}=4.5$ 公分，且 y 軸為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線。若在平面上找一點 C，使得 $\overline{AC}=1.5$ 公分、$\overline{BC}=3$ 公分，則 C 點可能在下列何處？



(A) 第一象限　(B) 第三象限　(C) x 軸　(D) y 軸

答：(C)

主題 2 三角形的邊角關係

課本概念
三角形的邊角關係

等邊對等角、等角對等邊

前面我們學過等腰三角形的性質，如圖 2，△ABC 中：

(1) **若 $\overline{AB}=\overline{AC}$，則∠$C$=∠$B$，**

即若三角形兩邊相等，則它們所對的角必相等。

(2) **若∠C=∠B，則 $\overline{AB}=\overline{AC}$，**

即若三角形兩角相等，則它們所對的邊必相等。

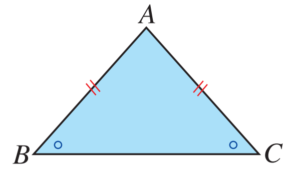


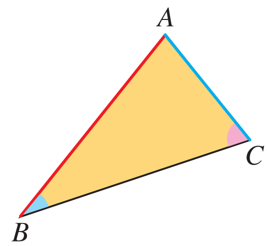
圖 2

由上可知：**在一個三角形中，等邊對等角，等角對等邊。** 1

1 提醒學生注意「三角形等邊對等角，等角對等邊」是指在同一個三角形內而言。

大邊對大角

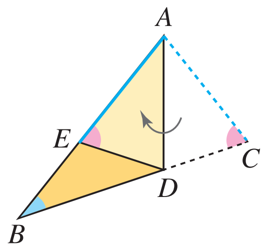
接著來探討：已知三角形的兩邊不相等時，它們所對的角之大小關係。



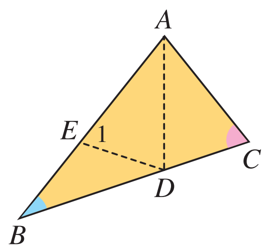
如右圖，已知△ABC，且 $\overline{AB}>\overline{AC}$，我們透過下方的摺紙方式來說明 $\overline{AB}$ 的對角∠C 和 $\overline{AC}$ 的對角∠B 的大小關係。

2 因為用幾何推理導出三角形邊角的不等關係較為複雜，所以先採用較具體的摺紙說明方式，然後才用幾何推理加以說明。

(1) 因為 $\overline{AB}>\overline{AC}$，把 $\overline{AC}$ 摺疊到 $\overline{AB}$ 上，使 C 點落在 $\overline{AB}$ 上的 E 點。



(2) 接著將紙攤平，畫出相關的線段和點。



在△BED 中，

∵∠1 是∠BED 的外角，

∴∠1>∠B，又∠1=∠C，故∠C>∠B。

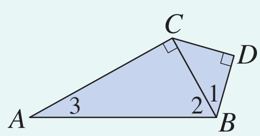
Hint
∵∠1 為△BDE 的外角，
∴∠1=∠B+∠EDB，
得∠1>∠B。

由上面的說明可以得到：

在一個三角形中，若兩邊不相等，則較大的邊所對的角比較大。

重新布題

如右圖，已知兩直角三角形△ABC 與△BCD 中，∠ACB=∠BDC=90°，若 $\overline{AC}>\overline{BC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$，則∠1、∠2、∠3 的大小關係為何？



答：∠2>∠1>∠3

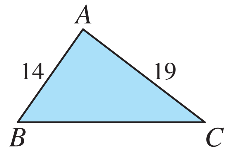
例 4 三角形大邊對大角 學習內容 S-8-8

在△ABC 中，已知 $\overline{AB}=14$，$\overline{AC}=19$，則：

(1) $\angle B$ 與 $\angle C$ 的大小關係為何？

(2) 若 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$ 且 H 在 $\overline{BC}$ 上，則 $\angle BAH$ 與 $\angle CAH$ 的大小關係為何？

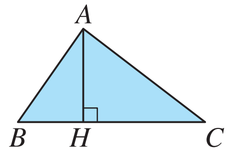
解 (1) 如右圖，△ABC 中，



$\because\overline{AB}=14$，$\overline{AC}=19$，可知 $\overline{AC}>\overline{AB}$，

$\therefore\angle B>\angle C$。

(2) $\because\overline{AH}\perp\overline{BC}$，



$\therefore\angle B+\angle BAH=90^\circ$，$\angle C+\angle CAH=90^\circ$，

即 $\angle BAH=90^\circ-\angle B$，$\angle CAH=90^\circ-\angle C$，

又 $\angle B>\angle C$ (由(1)可知)，

得 $\angle BAH=90^\circ-\angle B<90^\circ-\angle C=\angle CAH$，

故 $\angle BAH<\angle CAH$。

隨堂練習

在△ABC 中，已知 $\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{AC}$ 最短，判斷△ABC 三內角的大小。

(1) $\angle C$ __ = __ $\angle A$。

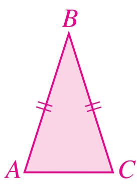
(2) $\angle B$ __ < __ $\angle C$。

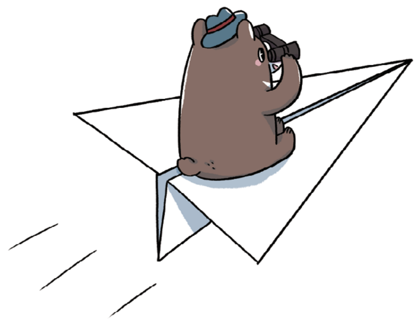
(請填入＞、＝或＜)

依題意畫出△ABC，如右圖

(1) $\because\overline{AB}=\overline{BC}$，$\therefore\angle C=\angle A$

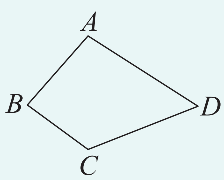
(2) $\because\overline{AC}<\overline{AB}$，$\therefore\angle B<\angle C$





重新布題

如右圖，在四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AD}$ 最大，$\overline{BC}$ 最小。試比較：



(1) $\angle BAD$ 與 $\angle BCD$ 之大小。

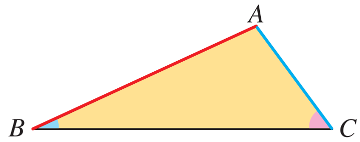
(2) $\angle ABC$ 與 $\angle ADC$ 之大小。

答：(1) $\angle BAD<\angle BCD$　(2) $\angle ABC>\angle ADC$

大角對大邊

接著來探討：已知三角形的兩角不相等時，它們所對的邊之大小關係。

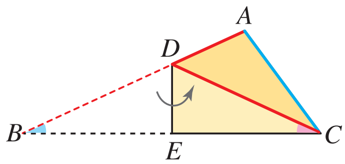
如右圖，已知$\triangle ABC$，且$\angle C>\angle B$，



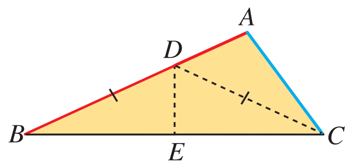
我們透過下方的摺紙方式來說明$\angle C$ 的對邊 $\overline{AB}$ 和$\angle B$ 的對邊 $\overline{AC}$ 的大小關係。[1]

1 其實用摺紙來說明三角形大角對大邊，只是經由實際操作加深同學的印象而已，並不能當作該性質的完整證明。

(1) 因為$\angle C>\angle B$，把 B 點沿著 $\overline{BC}$ 摺疊到 C 點上，$\overline{DE}$ 是摺痕。



(2) 接著將紙攤平，把相關的點和線畫出來。



$\because \triangle CDE$ 與$\triangle BDE$ 重疊，

$\therefore \overline{DC}=\overline{DB}$……①

$\triangle ACD$ 中，

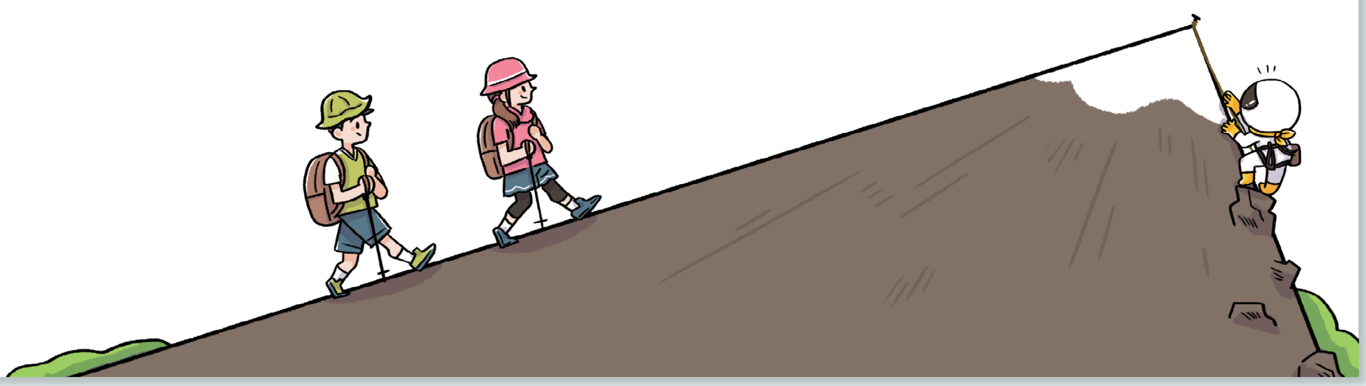
根據三角形兩邊的和大於第三邊，得 $\overline{AD}+\overline{DC}>\overline{AC}$……②

由①代入②得 $\overline{AD}+\overline{DB}>\overline{AC}$，故 $\overline{AB}>\overline{AC}$。

由上面的說明，可以知道$\angle C>\angle B$ 時，可得 $\overline{AB}>\overline{AC}$，也就是$\angle C$ 的度數較大，其對邊 $\overline{AB}$ 亦較大，因此：

在一個三角形中，若兩角不相等，則較大的角所對的邊比較大。 [2]

2 提醒學生注意此處的三角形邊角關係是指在同一個三角形內而言。



重新布題

在$\triangle ABC$ 中，$\angle B<\angle A$ 且$\angle A$ 的外角大於 120°，則下列敘述何者正確？

(A) $\overline{AB}$ 最長，$\overline{AC}$ 最短　(B) $\overline{AB}$ 最長，$\overline{BC}$ 最短

(C) $\overline{BC}$ 最長，$\overline{AC}$ 最短　(D) $\overline{BC}$ 最長，$\overline{AB}$ 最短

答：$\because \angle A$ 的外角大於 120°，$\therefore \angle A$ 小於 60°

又$\angle B<\angle A$，$\therefore \angle B$ 亦小於 60°

$\because \angle C=180^\circ-\angle A-\angle B>180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$

$\therefore \angle C$ 為最大角，$\angle B$ 為最小角

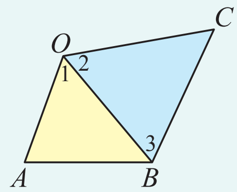
得 $\overline{AB}$ 最長，$\overline{AC}$ 最短，故選(A)

例 5

◆搭配習作 P.42 第 3 題

三角形大角對大邊 學習內容 S-8-8

如右圖，$\triangle OAB$ 與 $\triangle OBC$ 中，已知 $\angle A=70^\circ$、$\angle 1=60^\circ$、$\angle 2=60^\circ$、$\angle 3=65^\circ$，則 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 哪一條線段最長？



解　在 $\triangle OAB$ 中，

$\angle OBA=180^\circ-\angle A-\angle 1=180^\circ-70^\circ-60^\circ=50^\circ$，

因為 $\angle A>\angle OBA$，

所以 $\overline{OB}>\overline{OA}$。

又在 $\triangle OBC$ 中，

$\angle C=180^\circ-\angle 2-\angle 3=180^\circ-60^\circ-65^\circ=55^\circ$，

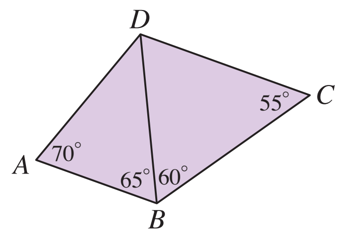
因為 $\angle 3>\angle C$，

所以 $\overline{OC}>\overline{OB}$。

故 $\overline{OC}$ 為最長邊。

隨堂練習

在四邊形 $ABCD$ 中，各角的度數如右圖所示，則 $\overline{DA}$、$\overline{DB}$、$\overline{DC}$ 的大小關係為何？



$\triangle DAB$ 中

$\because \angle DAB=70^\circ$、$\angle DBA=65^\circ$

$\therefore \overline{DB}>\overline{DA}$……①

$\triangle DBC$ 中

$\because \angle DBC=60^\circ$、$\angle DCB=55^\circ$

$\therefore \overline{DC}>\overline{DB}$……②

故由①、②得 $\overline{DC}>\overline{DB}>\overline{DA}$

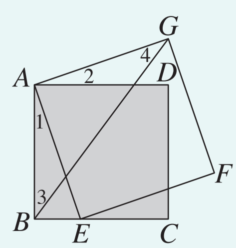
重新布題

如右圖，四邊形 $ABCD$、$AEFG$ 均為正方形，其中 E 在 $\overline{BC}$ 上，且 B、E 兩點不重合，並連接 $\overline{BG}$。根據圖中標示的角，判斷下列 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 的大小關係，何者正確？　【102 年基本學測】

(A) $\angle 1<\angle 2$　　(B) $\angle 1>\angle 2$

(C) $\angle 3<\angle 4$　　(D) $\angle 3>\angle 4$

數位備課

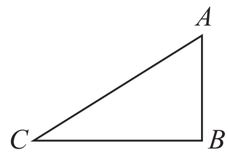


答：(D)

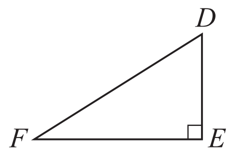
直角三角形的判別性質

我們在第三冊學過畢氏定理：直角三角形的兩股平方和等於斜邊的平方；反過來說，如果一個三角形「兩邊的平方和」等於「第三邊的平方」，則這個三角形是直角三角形嗎？

如右圖，$\triangle ABC$ 的三個邊長滿足 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$，那麼$\triangle ABC$ 是否為直角三角形？



說明 (1) 如右圖，作直角$\triangle DEF$，使得$\angle E=90^\circ$、$\overline{DE}=\overline{AB}$、$\overline{EF}=\overline{BC}$。



(2) 在$\triangle DEF$ 和$\triangle ABC$ 中，由畢氏定理得：

$\overline{DE}^2+\overline{EF}^2=\overline{DF}^2$……①

且 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$……②

由①、②得 $\overline{DF}=\overline{AC}$，

又由(1)可知 $\overline{DE}=\overline{AB}$、$\overline{EF}=\overline{BC}$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF$（$SSS$ 全等性質）。 1

故$\angle B=\angle E=90^\circ$，即$\triangle ABC$ 為直角三角形。

1直角三角形判別性質的說明中，有用到三角形的全等性質，因此才在此處做教學。

由上面的說明可以得到：

如果一個三角形兩邊的平方和等於第三邊的平方，則此三角形必為直角三角形。

◆搭配習作 *P*.42 第 4 題

隨堂練習

下列各組數是否可以構成直角$\triangle ABC$？如果可以，寫出直角三角形中哪個角是直角。

(1) $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=25$，$\overline{CA}=24$　　(2) $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CA}=\sqrt{28}$

(1) $\because 7^2+24^2=25^2$，$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，且$\angle A$ 是直角

(2) $\because \overline{CA}$ 最長，且 $5^2+2^2\neq(\sqrt{28})^2$，$\therefore \triangle ABC$ 不是直角三角形

重新布題

已知有長 3 公分、6 公分之兩線段，下列敘述何者錯誤？　【94 年第一次基本學測】

(A) 若另有一長為 3 公分的線段，則此三線段可構成等腰三角形

(B) 若另有一長為 6 公分的線段，則此三線段可構成等腰三角形

(C) 若另有一長為 $3\sqrt{3}$ 公分的線段，則此三線段可構成直角三角形

(D) 若另有一長為 $3\sqrt{5}$ 公分的線段，則此三線段可構成直角三角形

答：(A)

數位備課

重點整理

1 三角形三邊長的關係

三角形中任意兩邊的和大於第三邊，任意兩邊的差小於第三邊。

例 已知一個三角形的三邊長為 3、x、5，則 x 的範圍為：$5-3<x<5+3$。

2 三線段構成三角形的條件

任意三線段中，若最長的線段長小於其他兩線段長的和，則此三線段可以構成一個三角形。

例 已知三線段長 3、4、6，因為 $6<3+4$，所以此三線段可以構成一個三角形。

3 三角形的邊角關係

在一個三角形中，

(1) 等邊對等角，等角對等邊。

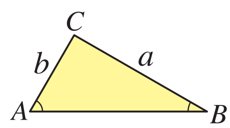
(2) 若兩邊不相等，則大邊對大角。

(3) 若兩角不相等，則大角對大邊。

例 如右圖，$\triangle ABC$ 中，

(1) 若 $a>b$，則 $\angle A>\angle B$。

(2) 若 $\angle A>\angle B$，則 $a>b$。

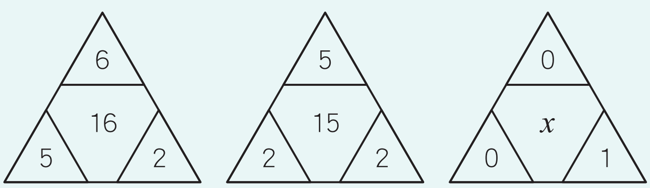


4 直角三角形的判別性質

如果一個三角形兩邊的平方和等於第三邊的平方，則此三角形必為直角三角形。

趣味數學

下圖中的 x 代表什麼數字？



答：10

自我評量

1 下列各組的 3 個數分別代表三線段的長度，哪幾組數可以構成三角形？哪幾組恰為直角三角形？ P.156 例 1、P.163 隨堂

(1) 2、3、4　(2) 4、6、10　(3) $\frac{1}{2}$、$\frac{3}{5}$、1　(4) 1、$\sqrt{8}$、3

(1) ∵$2+3>4$，∴2、3、4 可以構成三角形，又 $2^2+3^2\neq4^2$，不為直角三角形
(2) ∵$4+6=10$，∴4、6、10 不可以構成三角形
(3) ∵$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}>1$，∴$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{5}$、1 可以構成三角形，又 $(\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{5})^2\neq1^2$，不為直角三角形
(4) ∵$1+\sqrt{8}>3$，∴1、$\sqrt{8}$、3 可以構成三角形，又 $1^2+(\sqrt{8})^2=3^2$，恰為直角三角形
故(1)、(3)、(4)可以構成三角形，(4)恰為直角三角形

2 某等腰三角形的三邊長分別為 3、x、7，則 x 的值為多少？ P.157 例 2

∵此三角形為等腰三角形
∴x 可能為 3 或 7
若 $x=3$，則 $3+3<7$（不合）
若 $x=7$，則 $3+7>7$（合）
∴$x=7$

3 在△ABC 中，若 $\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=7$，則∠A、∠B、∠C 三內角中，最大的角為＿∠B＿，最小的角為＿∠C＿。 P.160 例 4

理由：∵$\overline{AB}<\overline{BC}<\overline{CA}$，∴根據三角形大邊對大角性質可知∠$C$<∠$A$<∠$B$
＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

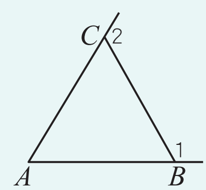
4 在△ABC 中，若∠$A=50^\circ$、∠$B=60^\circ$，則 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 三邊中，最長的邊為＿$\overline{AB}$＿，最短的邊為＿$\overline{BC}$＿。 P.162 例 5

理由：∵∠$C=180^\circ-50^\circ-60^\circ=70^\circ$，∴∠$A$<∠$B$<∠$C$
∵∠A<∠B<∠C，∴根據三角形大角對大邊性質可知 $\overline{BC}<\overline{CA}<\overline{AB}$ 。

歷屆試題觀摩

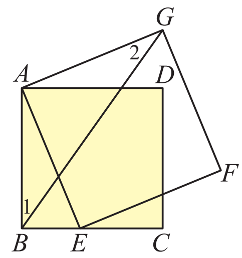
(C) 1. 如右圖，△ABC 中，$\overline{AC}=\overline{BC}<\overline{AB}$。若∠1、∠2 分別為∠$ABC$、∠$ACB$ 的外角，則下列角度關係何者正確？ 【108 年教育會考】

數位備課



(A) ∠1<∠2
(B) ∠1=∠2
(C) ∠A+∠2<180°
(D) ∠A+∠1>180°

5 如右圖，已知四邊形 $ABCD$、$AEFG$ 皆為正方形，其中 E 點在 $\overline{BC}$ 上。連接 $\overline{BG}$ 並根據圖中標示的角，判斷 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 的大小關係。



P.160 例 4

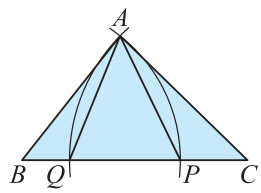
在 $\triangle ABE$ 中

$\because \angle ABE = 90^\circ$，$\therefore \overline{AE} > \overline{AB}$

在 $\triangle ABG$ 中

$\because \overline{AG} = \overline{AE} > \overline{AB}$，$\therefore \angle 1 > \angle 2$（大邊對大角）

6 如右圖，有一 $\triangle ABC$，今以 B 點為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫弧交 $\overline{BC}$ 於 P 點；以 C 點為圓心，$\overline{AC}$ 為半徑畫弧交 $\overline{BC}$ 於 Q 點。若 $\angle B > \angle C$，試判斷 $\overline{AP}$ 與 $\overline{AQ}$ 的大小關係。



P.162 例 5

$\because \angle B > \angle C$，$\overline{BA} = \overline{BP}$，$\overline{CA} = \overline{CQ}$

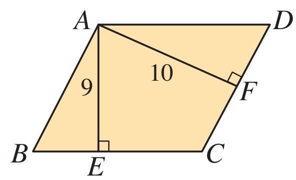
$\therefore \angle APQ = \dfrac{180^\circ - \angle B}{2} < \dfrac{180^\circ - \angle C}{2} = \angle AQP$

在 $\triangle APQ$ 中

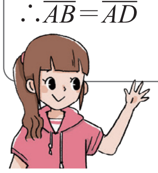
$\because \angle AQP > \angle APQ$，$\therefore \overline{AP} > \overline{AQ}$（大角對大邊）

挑錯題

如右圖，四邊形 $ABCD$ 中，E、F 兩點分別在 $\overline{BC}$ 與 $\overline{CD}$ 上。若 $\angle AEB = \angle AFD = 90^\circ$，$\overline{AE} = 9$，$\overline{AF} = 10$，以下為小妍與小翊的推論，判斷他們的推論是否正確，並說明你的理由。



$\because \angle AEB = \angle AFD = 90^\circ$
利用等角對等邊的概念
$\therefore \overline{AB} = \overline{AD}$



小妍

$\because \overline{AF} > \overline{AE}$
利用大邊對大角的概念
$\therefore \angle D > \angle B$

小翊

小妍：正確 ☐；錯誤 ☑，

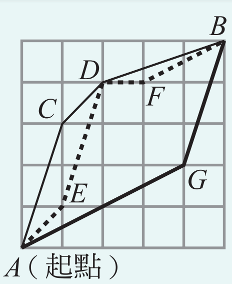
理由：等邊對等角應在同一個三角形中。

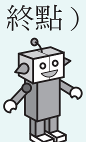
小翊：正確 ☐；錯誤 ☑，

理由：大邊對大角應在同一個三角形中。

2. 嘉嘉參加機器人設計活動，需操控機器人在 5×5 的方格棋盤上從 A 點行走至 B 點，且每個小方格皆為正方形。主辦單位規定了三條行走路徑 R_1、R_2、R_3，其行經位置如右圖與右表所示：

數位備課



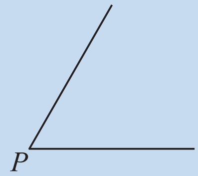


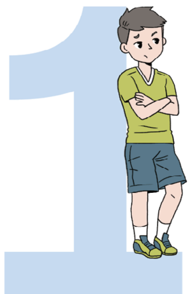
路徑	編號	圖例	行經位置
第一條路徑	R_1	——	$A \to C \to D \to B$
第二條路徑	R_2	……	$A \to E \to D \to F \to B$
第三條路徑	R_3	━━	$A \to G \to B$

已知 A、B、C、D、E、F、G 七點皆落在格線的交點上，且兩點之間的路徑皆為直線，在無法使用任何工具測量的條件下，請判斷 R_1、R_2、R_3 這三條路徑中，最長與最短的路徑分別為何？請寫出你的答案，並完整說明理由。答：R_2 最長，R_3 最短 【107 年教育會考】

一題多解

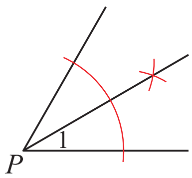
已知∠P＝60°，利用尺規作圖畫出∠Q＝75°。



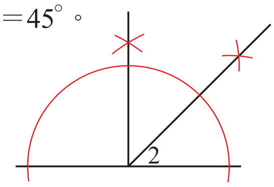


利用 75°＝30°＋45°

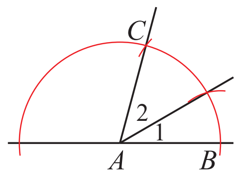
① 作∠P 的角平分線，得∠1＝30°。



② 過線上一點作垂線後，再作角平分線，得∠2＝45°。

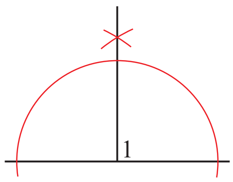


③ 作∠1＋∠2，得∠BAC 即為所求。

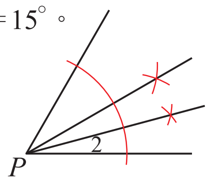


利用 75°＝90°－15°

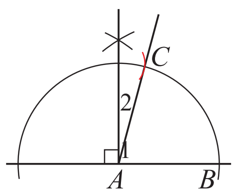
① 過線上一點作垂線後，得∠1＝90°。



② 作∠P 的角平分線後，再作角平分線，得∠2＝15°。

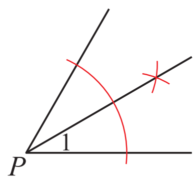


③ 作∠1－∠2，得∠BAC 即為所求。

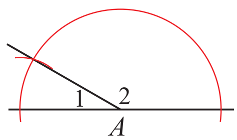


利用 75°＝$\dfrac{180°-30°}{2}$

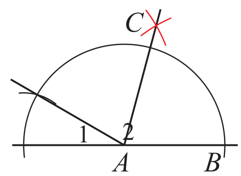
① 作∠P 的角平分線，得∠1＝30°。



② 過線上一點 A 作∠1，得∠2。

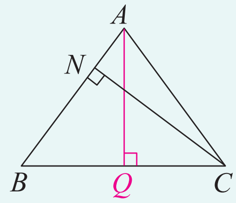


③ 作∠2 的角平分線，得∠BAC 即為所求。



非選挑戰題

△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=10$，$\overline{BC}=12$，若 $\overline{CN}\perp\overline{AB}$ 於 N 點，則 $\overline{CN}=$？



答：作 $\overline{AQ}\perp\overline{BC}$ 於 Q 點

$\because \overline{AB}=\overline{AC}=10$，$\therefore \overline{AQ}$ 為 $\overline{BC}$ 的垂直平分線

得 $\overline{BQ}=\overline{CQ}=6$，$\overline{AQ}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

$\because$ △ABC 面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AQ}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CN}$

$\therefore \dfrac{1}{2}\times12\times8=\dfrac{1}{2}\times10\times\overline{CN}$，$\overline{CN}=\dfrac{48}{5}$

數學新視界

連結領域 國語文、自然科學

重大議題 戶外教育、閱讀素養

角度面面觀

由科學看角度

1. 周角設定為 360 度，在作各種等分時有許多方便之處！如 1～10 的整數中，只有「7」不是 360 的因數，其他 1、2、3、4、5、6、8、9、10 均為 360 的因數。因此，若將周角作各種等分，所產生的特殊角中，仍有許多是整數度數。
2. 天文學採用的角度單位，「度」以下還可再細分為：1 度＝60 分，1 分＝60 秒。

由視覺看角度

當觀察物體時，由物體相對的兩端（上、下或左、右）所引出的兩條光線，交叉於我們眼球內的夾角，形成「視角」。人愈靠近物體，視角愈大；人愈遠離物體，視角愈小。如今，攝影機鏡頭在接收影像時張開的角度，或人們在觀察問題時的角度，也都稱為視角。

面向

當改變觀者的方位，從不同角度看事物，就會有不同的面向。例如 17 世紀歐洲人所繪的「福爾摩沙地圖」是橫躺的，如圖 1，而今日常見的臺灣地圖是南北縱向的，如圖 2。又如中國 宋朝 蘇軾《題西林壁》，即是一首描述不同角度觀景的詩。

橫看成嶺側成峰，遠近高低各不同。
不識廬山真面目，只緣身在此山中。
蘇軾《題西林壁》

圖 1

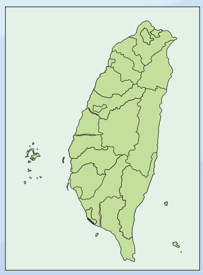


圖 2

教學理念

本單元分別從科學、視覺、意象等層面來認識「角度」。

從科學層面看，古時的天文與曆法所牽涉到的「角度」與「時間」，在單位上都採用「六十進位制」，主要是為了計算各角度的 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$、……時較容易取得整數值。

從視覺層面看，先介紹「視角」的概念，讓學生明瞭距離遠近與視角的關係。接著以歷史文物見證不同面向可獲得不同景觀，以及仰觀時可靈活運用角度觀測取得天文知識，俯瞰時可由角度變化拓展宏觀的視野。

最後，從意象層面看，「角度」不再拘泥於形象上，也能從語言、文字或符號等抽象的方式，作為人與人之間的表達與溝通。

仰觀

當我們抬頭看天空，想描述太陽、月亮等星球大小，可用該星體所占角度多寡形容；而觀察不同星體之間的相對位置，也習慣用兩者所夾角度作為觀測重點！

俯瞰

當我們登高山或搭飛機往下看，平常所見周遭事物必呈現不同風貌，不僅面向不同，更清楚看出每個個體在整體環境中的相關位置。

由意象看角度

有些「角度」的出現，未必是經由觀看圖形獲得，也可透過文字或符號，浮現於腦海中，例如交通標誌及成語等，來挑戰你是否能意會出此意涵呢！

Q1 觀察下列交通標誌，並填入其中隱藏的角度度數。



(1)__90__度。 (2)__180__度。 (3)__360__度。

Q2 在下列空格中，選填隱藏於成語意涵中的「角」：

(A)直角　(B)平角　(C)周角　(D)銳角　(E)鈍角

(1) 反其道而行：__(B)__。 (2) 南轅北轍：__(B)__。
(3) 正襟危坐：__(A)__。 (4) 回眸一笑：__(B)__。
(5) 尖酸刻薄：__(D)__。 (6) 團團轉：__(C)__。

解答

Q1：(1)90　(2)180　(3)360

Q2：(1)(B)　(2)(B)　(3)(A)
(4)(B)　(5)(D)　(6)(C)

教學指引

由科學看角度，了解定義周角為 360 度的優點
↓
由視覺看角度，理解視角、仰觀、俯瞰的定義
↓
連結交通號誌、成語與角度的關係

活化博覽會 P.258～259

大自然中的建築師

扣合課程內容，提供趣味化的教學評量，訓練學生觀察、閱讀、思考的能力。