

## 動動腦

長方形的兩對角線相等，那麼兩對角線相等的四邊形一定是長方形嗎？說說你的看法。

兩對角線等長的四邊形不一定是長方形，如右圖

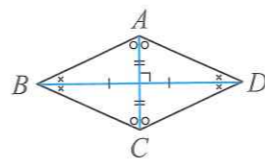


## 菱形

◆搭配習作  
P.57 第2題

菱形是四個邊都相等的四邊形。符合平行四邊形判別性質「兩雙對邊分別相等」，因此菱形也是平行四邊形，具有平行四邊形所有的性質。

在第89頁中，我們利用線對稱的概念學過菱形的一些性質。如右圖，若四邊形 $ABCD$ 為菱形，則兩對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 互相垂直平分且分別平分四個內角。接著將利用以上性質做練習。



◆搭配習作  
P.58 第3題

## 隨堂練習

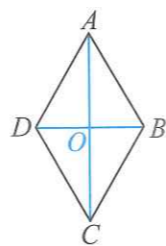
如右圖，菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAO=30^\circ$ ， $\overline{AB}=12$ ，試回答下列問題：

- $\angle ABO$  是幾度？
- 此菱形兩對角線長之和為多少？

(1)  $\because \overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  互相垂直平分， $\therefore \angle AOB=90^\circ$   
得  $\angle ABO=180^\circ-30^\circ-90^\circ=60^\circ$

(2) 由(1)可知 $\triangle ADB$ 為正三角形，故  $\overline{BD}=12$ ， $\overline{DO}=\frac{1}{2}\overline{BD}=6$   
由畢氏定理得  $\overline{AO}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$ ， $\overline{AC}=12\sqrt{3}$   
故兩對角線長之和為  $12+12\sqrt{3}$

我們知道「菱形的兩對角線互相垂直平分」。反過來說，兩對角線互相垂直平分的四邊形是菱形嗎？



## 重新布題

如右圖，有一菱形 $ABCD$ ， $\overline{AB}=4$ ，面積為 $2\sqrt{2}$ 。若 $\overline{AD}$ 上有一點 $M$ ，則 $M$ 到直線 $BC$ 的距離為何？

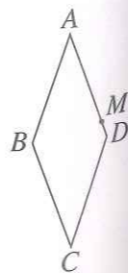
【98年第二次基本學測】

- (A)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
(C)  $2\sqrt{2}$       (D)  $8\sqrt{2}$

答：(B)



數位備課

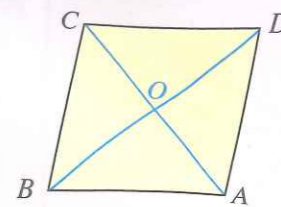


## 例 3

◆搭配習作  
P.59 第5題

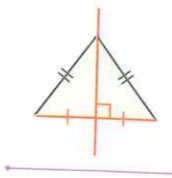
菱形的判別性質：兩對角線互相垂直平分 學習內容 S-8-10

如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 $O$ 點，若 $\overline{OA}=\overline{OC}$ ， $\overline{OB}=\overline{OD}$ ，且 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ ，則四邊形 $ABCD$ 是菱形嗎？



## 學習時光機

一線段的垂直平分線上任一點與此線段的兩端點等距離。



- 解 (1)  $\because \overline{OB}=\overline{OD}$ ，且 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ ，  
 $\therefore \overline{AC}$  是  $\overline{BD}$  的垂直平分線，  
得  $\overline{AB}=\overline{AD}$ 、 $\overline{CB}=\overline{CD}$ 。  
(2) 同理， $\overline{BD}$  是  $\overline{AC}$  的垂直平分線，  
 $\therefore \overline{BA}=\overline{BC}$ 、 $\overline{DA}=\overline{DC}$ ，  
即  $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$ 。  
(3)  $\because$  四邊相等， $\therefore$  四邊形 $ABCD$ 是菱形。

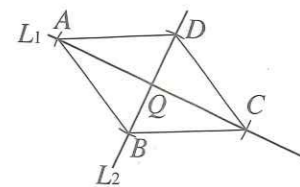
也就是說，兩對角線互相垂直平分的四邊形是菱形。

## 隨堂練習

如右圖， $L_1$ 垂直 $L_2$ 於 $Q$ 點。

在 $L_1$ 上取 $A$ 、 $C$ 兩點，使 $\overline{AQ}=\overline{CQ}$ ，  
在 $L_2$ 上取 $B$ 、 $D$ 兩點，使 $\overline{BQ}=\overline{DQ}$ ，  
試說明四邊形 $ABCD$ 為菱形的理由。

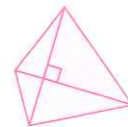
由 $L_1$ 垂直 $L_2$ 於 $Q$ 點，且 $\overline{AQ}=\overline{CQ}$ 、 $\overline{BQ}=\overline{DQ}$   
得四邊形 $ABCD$ 的兩對角線互相垂直平分  
故四邊形 $ABCD$ 即為菱形



## 動動腦

菱形的兩對角線互相垂直，那麼兩對角線互相垂直的四邊形是菱形嗎？說說你的看法。

兩對角線互相垂直的四邊形不一定是菱形，如右圖



## 重新布題

設 $A(-6, 5)$ 、 $B(1, 1)$ 、 $C(8, 5)$ 、 $D(1, 9)$ 為坐標平面上的四個點，則連接 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ 後，所得的四邊形 $ABCD$ 為哪一種四邊形？四邊形 $ABCD$ 的面積為多少？

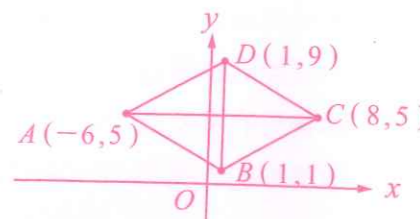
答：(1) 將四點坐標繪出如右圖所示

可知 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 互相垂直平分，故四邊形 $ABCD$ 為菱形

(2) 因為四邊形 $ABCD$ 為菱形

且 $\overline{AC}=8-(-6)=14$ ， $\overline{BD}=9-1=8$

所以菱形 $ABCD$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times 14\times 8=56$



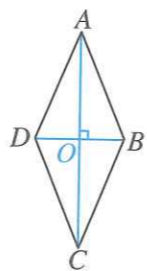
菱形的面積 = 兩對角線長的乘積  $\div 2$

說明 如右圖，菱形  $ABCD$  中，

對角線  $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$  互相垂直於  $O$  點，

則菱形  $ABCD$  面積 =  $\triangle ABD$  面積 +  $\triangle BCD$  面積

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\overline{BD} \times \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{BD} \times \overline{OC} \\ &= \frac{1}{2}\overline{BD} \times (\overline{OA} + \overline{OC}) \\ &= \frac{1}{2}\overline{BD} \times \overline{AC}. \end{aligned}$$

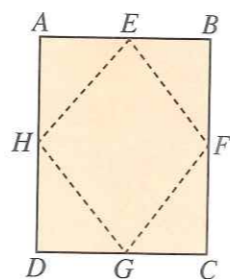


因此菱形  $ABCD$  面積 = 兩對角線長的乘積  $\div 2$ 。

同理，兩對角線互相垂直的四邊形，其面積等於兩對角線長的乘積的一半。

### 隨堂練習

如右圖，四邊形  $ABCD$  為一張長方形的色紙，已知  $\overline{AB} = 16$  公分， $\overline{BC} = 20$  公分。若取各邊的中點剪去四個角，剩下的圖形恰好為菱形  $EFGH$ ，則菱形的周長和面積各為多少？



如右圖

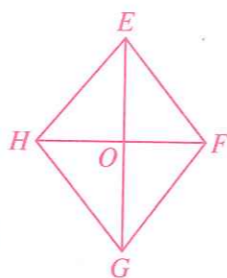
$$\overline{OH} = \frac{1}{2}\overline{HF} = 8, \overline{OE} = \frac{1}{2}\overline{EG} = 10$$

$$\therefore \overline{EH} = \sqrt{8^2 + 10^2} = 2\sqrt{41}$$

$$\begin{aligned} \text{因此菱形 } EFGH \text{ 的周長} &= 4\overline{EH} \\ &= 4 \times 2\sqrt{41} \\ &= 8\sqrt{41} \text{ (公分)} \end{aligned}$$

$$\text{菱形 } EFGH \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times \overline{HF} \times \overline{EG}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times 16 \times 20 \\ &= 160 \text{ (平方公分)} \end{aligned}$$



### 重新布題

一菱形的兩對角線長分別為 10 公分與 24 公分，求此菱形的面積與周長。

答：(1) 菱形的面積 =  $10 \times 24 \div 2 = 120$  (平方公分)

(2) 菱形的兩對角線互相垂直平分， $10 \div 2 = 5$ ， $24 \div 2 = 12$

所以菱形的邊長即為兩股長為 5 公分、12 公分的直角三角形的斜邊長

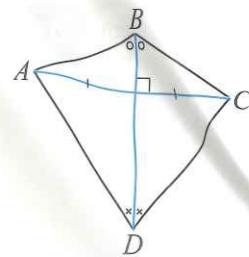
即菱形的邊長為  $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

故菱形的周長為  $13 \times 4 = 52$  (公分)

### 箏形

箏形是兩雙鄰邊分別等長的四邊形。

在第 89 頁中，我們利用線對稱的概念學過箏形的一些性質。如右圖，若四邊形  $ABCD$  為箏形，則對角線  $\overline{BD}$  會垂直平分對角線  $\overline{AC}$  且平分  $\angle ABC$  與  $\angle ADC$ 。接著將利用以上性質做練習。



### 隨堂練習

如右圖，小毅想製作一只風箏，首先他在紙上剪出一個箏形  $ABCD$ ，其中  $\overline{AB} = \overline{AD} = 10\sqrt{2}$ 、 $\overline{BC} = \overline{CD} = 10\sqrt{5}$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，接著再準備兩根竹棍固定在對角線上，若不計竹棍的寬度，則：

(1)  $\angle 1$  為多少度？

(2) 兩根竹棍的長度分別為多少？

$$(1) \because \overline{AB} = \overline{AD}, \angle BAD = 90^\circ$$

$\therefore \triangle BAD$  為等腰直角三角形

$$\text{故 } \angle 1 = (180^\circ - 90^\circ) \div 2 = 45^\circ$$

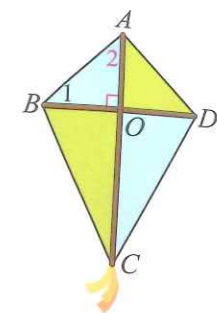
$$(2) \because \angle 2 = 90^\circ - \angle 1 = 45^\circ$$

$\therefore \triangle AOB$  為等腰直角三角形，得  $\overline{AO} = \overline{BO}$

$$\overline{BD} = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2} = 20, \text{ 得 } \overline{AO} = \overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{BD} = 10$$

$$\overline{OC} = \sqrt{(10\sqrt{5})^2 - 10^2} = 20, \text{ 得 } \overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = 30$$

故兩根竹棍長分別為 20、30



207  
46

在第 208 頁提到，兩對角線互相垂直的四邊形面積等於兩對角線長的乘積的一半，因此箏形面積也會等於兩對角線長的乘積的一半。

### 動動腦

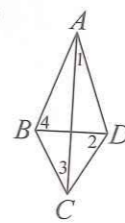
箏形是兩雙鄰邊分別等長的四邊形，那麼箏形是否為平行四邊形呢？說說你的看法。

箏形是兩雙鄰邊分別等長的四邊形，而平行四邊形是兩雙對邊分別等長的四邊形，所以箏形不一定是平行四邊形。

### 重新布題

如右圖， $ABCD$  為箏形，其中  $\overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\overline{CB} = \overline{CD}$ 。若  $\angle 1 = 20^\circ$ ， $\angle 2 = 60^\circ$ ，則  $\angle 3$  和  $\angle 4$  的度數為多少？

答： $\angle 3 = 30^\circ$ ， $\angle 4 = 70^\circ$



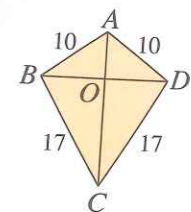
### 重新布題

如右圖， $ABCD$  為箏形，其中  $\overline{AB} = \overline{AD} = 10$ ， $\overline{CB} = \overline{CD} = 17$ ，且  $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$  交於  $O$  點。若  $\overline{BO} = 8$ ，則：

(1)  $\overline{AC} = ?$

(2) 箏形  $ABCD$  的面積為多少？

答：(1) 21 (2) 168

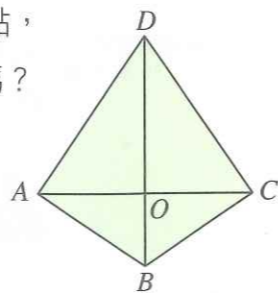


我們知道「箏形的一條對角線會垂直平分另一條對角線」。反過來說，一條對角線垂直平分另一條對角線的四邊形是箏形嗎？

例 4

箏形的判別性質：一條對角線垂直平分另一條對角線 學習內容 S-8-10

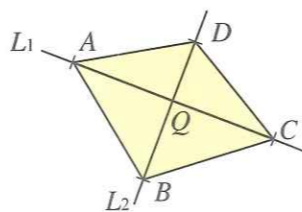
如右圖，四邊形  $ABCD$  中， $\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  交於  $O$  點，若  $\overline{BD}$  垂直平分  $\overline{AC}$ ，則四邊形  $ABCD$  是箏形嗎？



解  $\because \overline{BD}$  垂直平分  $\overline{AC}$   
由垂直平分線性質可知  $\overline{DA} = \overline{DC}$ ,  $\overline{BA} = \overline{BC}$   
即四邊形  $ABCD$  為箏形

隨堂練習

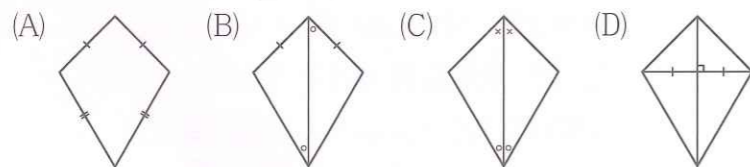
如右圖， $L_1$  垂直  $L_2$  於  $Q$  點。  
在  $L_1$  上取  $A$ 、 $C$  兩點，使  $\overline{AQ} = \overline{CQ}$ ，  
在  $L_2$  上取  $B$ 、 $D$  兩點，且  $B$ 、 $D$  在  $L_1$  的兩側。  
試說明四邊形  $ABCD$  為箏形的理由。



由  $L_1$  垂直  $L_2$  於  $Q$  點，且  $\overline{AQ} = \overline{CQ}$   
即  $\overline{BD}$  垂直平分  $\overline{AC}$ ，故四邊形  $ABCD$  為箏形

重新布題

下列哪一個四邊形不一定是箏形？



答：(B)

重新布題

下列敘述何者錯誤？

- (A) 正方形是長方形
- (B) 正方形是菱形
- (C) 正方形是平行四邊形
- (D) 一對角線垂直平分另一條對角線的四邊形必為菱形

答：(D)

正方形

正方形的四個角都是直角且四個邊等長。 206 6/17

◆ 搭配習作  
P.58 第4題  
P.59 第5題

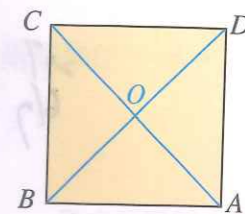
1. 因為正方形四個內角都是直角，所以正方形也是長方形，它的兩對角線相等且互相平分。
2. 因為正方形的四個邊等長，所以正方形是菱形，它的兩對角線互相垂直平分。

由上可知，正方形的兩對角線相等且互相垂直平分。

例 5

正方形的對角線性質 學習內容 S-8-10

如右圖， $O$  為正方形  $ABCD$  對角線的交點，且  $\overline{BD} = 6$ ，則正方形  $ABCD$  的周長與面積分別為多少？



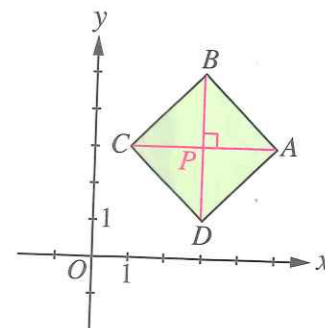
解  $\because$  正方形的兩對角線相等且互相垂直平分，  
 $\therefore \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = 3$ 。  
由畢氏定理可知， $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ 。  
故正方形  $ABCD$  的周長  $= 4 \times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ ，  
正方形  $ABCD$  的面積  $= 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 18$ 。

Hint  
正方形  $ABCD$  面積也可以這樣算： $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$ 。

隨堂練習

如右圖， $ABCD$  為正方形，且  $A$ 、 $C$  兩點坐標分別為  $(5, 3)$ 、 $(1, 3)$ ，則  $B$ 、 $D$  兩點坐標分別為多少？

如右圖， $\overline{BD} = \overline{AC} = 5 - 1 = 4$   
 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = \overline{PD} = 4 \div 2 = 2$   
故  $B$  點坐標為  $(1 + 2, 3 + 2) = (3, 5)$   
 $D$  點坐標為  $(5 - 2, 3 - 2) = (3, 1)$



重新布題

如右圖， $O$  為正方形  $ABCD$  對角線的交點，且  $\overline{AO} = 5$ ，則正方形  $ABCD$  的周長與面積分別為多少？

答：周長為  $20\sqrt{2}$ ，面積為 50

