

1-4 指數記法與科學記號

1 整數的乘方 2 10 的次方

3 科學記號

主題 1 整數的乘方

我們知道當相同的數連加多次時，可以用乘法簡記，例如：

「 $5+5+5+5+5+5$ 」表示共 6 個 5 連加，我們可以簡記為「 5×6 」。

而當相同的數連乘多次時，我們稱為**乘方**，簡記方式如下表：

意義	乘方	簡記	讀法
2 個 5 連乘	5×5	5^2	五的二次方(或五的平方)
3 個 5 連乘	$5\times 5\times 5$	5^3	五的三次方(或五的立方)
4 個 5 連乘	$5\times 5\times 5\times 5$	5^4	五的四次方
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

上表的簡記中，被連乘的數字 5 稱為**底數**(或簡稱**底**)，5 右上方字體較小的數 2、3、4、……稱為**指數**，表示連乘的次數。同樣的，

$(-2)\times(-2)\times(-2)$ 記為 $(-2)^3$ ；

$a\times a$ 記為 a^2 ；

$a\times a\times a$ 記為 a^3 ；

$\underbrace{a\times a\times a\times \cdots \times a}_{n \text{ 個}}$ 記為 a^n ，讀作「 a 的 n 次方」。

Hint

5^2 ← 指數
↑
底數(底)

以下為幾個特別的情形：

1. **指數為 1**：當指數為 1 時，指數 1 通常省略不寫。

例如： 3^1 習慣上寫成 3， $(-2)^1$ 習慣上寫成 -2 。

2. **0 的乘方**：當底數為 0 時，不管幾個 0 相乘，其值都是 0，

即 $0\times 0\times \cdots \times 0=0$ 。我們可以知道 n 為正整數時， $0^n=0$ 。

3. **1 的乘方**：當底數為 1 時，不管幾個 1 相乘，其值都是 1，

即 $1\times 1\times \cdots \times 1=1$ 。我們可以知道 n 為正整數時， $1^n=1$ 。

Key point 底數與指數

若 a 為整數，則 $\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}}$ 可簡記成指數的形式 a^n ，

讀作 a 的 n 次方，其中 a 稱為底數， n 稱為指數。

a^n ← 指數
↑
底數(底)

隨堂練習

以指數的形式簡記下列各式。

(1) $8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^5$ 。

(2) $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = (-5)^4$ 。



有些計算機上會有 x^2 或 x^y 的按鍵，分別代表一個數的平方或次方。
(操作方式可參閱書末 P.[7]~[8]「計算機教學」)

例 1 指數為偶數的乘方計算 學習內容 N-7-6

計算下列各式的值。

(1) 9^2

(2) $(-2)^4$

(3) -2^4

解 (1) $9^2 = 9 \times 9 = 81$

(2) $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$

(3) $-2^4 = -(2^4) = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$



$9 \times^2$ 和 $9 \times$ 的結果是一樣的唷！

Hint

$(-2)^4$ 與 -2^4 的意義不同，且值也不同。

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) 3^2
 $= 9$

(2) $(-3)^2$
 $= 9$

(3) -3^2
 $= -9$

例2 指數為偶數的乘方計算 學習內容 N-7-6

計算下列各式的值。

(1) 7^3

(2) $(-6)^3$

(3) -6^3

解 (1) $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$

(2) $(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6) = -216$

(3) $-6^3 = -(6^3) = -(6 \times 6 \times 6) = -216$

Hint

$(-6)^3$ 與 -6^3 的意義不同，但值相同。



7^3 和 $7 \times 7 \times 7$ 的結果是一樣的唷！

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) 2^5

$= 32$

(2) $(-2)^5$

$= -32$

(3) -2^5

$= -32$



1. 若 n 為偶數，則 $(-1)^n$ 等於多少？ 1

2. 若 n 為奇數，則 $(-1)^n$ 等於多少？ -1

由前面的討論，我們可以發現：

Key point 負數的乘方

負數的偶數次方是正數；負數的奇數次方是負數。

數學好好玩 連乘訣

學完乘方的簡記後，你可以翻到書末 P.[3]「連乘訣」，利用所學的概念，一起挑戰解謎吧！

在進行含有乘方的四則運算時，乘方的部分要先計算。

例 3 含乘方的四則運算 學習內容 N-7-6

計算下列各式的值。

$$(1) (-5^2) \div 5 - 3^3$$

$$\begin{aligned}\text{解 (1)} \quad & (-5^2) \div 5 - 3^3 \\ & = (-25) \div 5 - 27 \\ & = (-5) - 27 \\ & = -32\end{aligned}$$

$$(2) 8 - 2^3 \times [10 + (-4^2)]$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & 8 - 2^3 \times [10 + (-4^2)] \\ & = 8 - 8 \times [10 + (-16)] \\ & = 8 - 8 \times (-6) \\ & = 8 + 48 \\ & = 56\end{aligned}$$

隨堂練習

計算下列各式的值。

$$(1) [-(-3)^2 + 3] \div 6$$

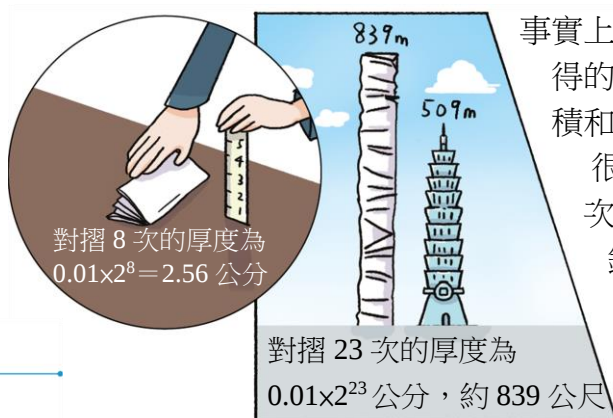
$$\begin{aligned}& = [-9 + 3] \div 6 \\ & = (-6) \div 6 \\ & = -1\end{aligned}$$

$$(2) (-100) - (-75) \div (-5)^2$$

$$\begin{aligned}& = (-100) - (-75) \div 25 \\ & = (-100) - (-3) \\ & = (-100) + 3 \\ & = -97\end{aligned}$$

數學好好玩 將紙對摺幾次，厚度才會比 101 大樓高呢？

假設一張紙的厚度為 0.01 公分，我們知道每將紙對摺一次，厚度就會變為原來的 2 倍，你認為對摺幾次後，紙的厚度會比 101 大樓還高？



事實上，我們隨手取得的紙張受限於面積和厚度的關係，很難對摺超過 8 次。目前世界紀錄為西元 2011 年美國中學生利用超長的衛生紙對摺了 13 次。

圖 計算機操作

$$0.01 \times 2^{xy} 8 = 2.56$$

$$0.01 \times 2^{xy} 23 = 83886.08$$

主題 2 10 的次方

觀察下表中的數值變化與指數的關係。

數值	10000	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
10 的次方	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
指數	4	3	2	1	0	-1	-2	-3

當以 10 為底數，指數為正整數時：

若數值變為 10 倍，則指數增加 1；若數值變為 $\frac{1}{10}$ 倍，則指數減少 1。

這樣的關係在指數為 0 或負整數時也會成立：

10 的 $\frac{1}{10}$ 倍就是 1，我們可記為「 10^0 」；

1 的 $\frac{1}{10}$ 倍就是 $\frac{1}{10}$ ，我們可記為「 10^{-1} 」；

$\frac{1}{10}$ 的 $\frac{1}{10}$ 倍就是 $\frac{1}{100}$ ，也就是 $\frac{1}{10^2}$ ，我們可記為「 10^{-2} 」；

$\frac{1}{100}$ 的 $\frac{1}{10}$ 倍就是 $\frac{1}{1000}$ ，也就是 $\frac{1}{10^3}$ ，我們可記為「 10^{-3} 」；依此類推。

當 n 為正整數時， $\frac{1}{10^n}$ 可記為 10^{-n} ，而 $10^0=1$ 。

隨堂練習

- 分別以分數和小數表示 10^{-7} 。

$$10^{-7} = \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10000000} = 0.0000001$$

- 在括號內填入適當的數。

$$0.000001 = \frac{1}{(1000000)} = \frac{1}{10^{(6)}} = 10^{(-6)}$$

主題 3 科學記號

傳說牛郎和織女分隔在銀河的兩端，每到七夕時，才能透過搭起的鵲橋相遇，你們知道牛郎和織女相隔多遠嗎？



在科學領域中，我們常會遇到很大或很小的正數，例如：地球的質量約 59700000000000000000000 公噸、電子顯微鏡則可以觀察到 0.00000014 公尺大小的細胞，像這樣很大或很小的數，我們很難閱讀，也很容易把 0 的個數寫錯，所以在科學上通常將它們寫成 5.97×10^{21} 公噸和 1.4×10^{-7} 公尺，這種記數的方式稱為**科學記號**。

Key point 科學記號表示法

將一個正數表示成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10$ ，且 n 為整數，則 $a \times 10^n$ 就是這個正數的科學記號表示法。

例 4 以科學記號表示數 學習內容 N-7-8

以科學記號表示下列各數。

(1) 930000000

(2) 0.00000431

(3) $\frac{8}{100000}$

解 (1) $930000000 = 9.3 \times 100000000 = 9.3 \times 10^8$

8 個 0

(2) $0.00000431 = 4.31 \times 0.000001 = 4.31 \times 10^{-6}$

6 位

(3) $\frac{8}{100000} = \frac{8}{10^5} = 8 \times \frac{1}{10^5} = 8 \times 10^{-5}$

5 個 0

Hint

930000000.

8 7 6 5 4 3 2 1

0.00000431

1 2 3 4 5 6

隨堂練習

以科學記號表示下列各數。

(1) 3100000000

$= 3.1 \times 10^9$

(2) 0.000000729

$= 7.29 \times 0.0000001$

$= 7.29 \times 10^{-7}$

(3) $\frac{5}{100000000}$

$= \frac{5}{10^8} = 5 \times \frac{1}{10^8}$

$= 5 \times 10^{-8}$

在科學上，除了以科學記號來表示很大或很小的數之外，我們也制定一些特定的單位，讓記錄或使用更加容易，以下是一些常見的長度單位：

長度單位	簡記	單位換算
公里	km	$1\text{km} = 1000\text{m} = 10^3\text{m}$
毫米	mm	$1\text{mm} = 0.001\text{m} = 10^{-3}\text{m}$
微米	μm	$1\mu\text{m} = 0.000001\text{m} = 10^{-6}\text{m}$
奈米	nm	$1\text{nm} = 0.000000001\text{m} = 10^{-9}\text{m}$

隨堂練習

諾羅病毒是最常引起腸胃炎的病毒之一，其直徑大小約為 27 奈米，即 0.000000027 公尺。試將 0.000000027 以科學記號表示。

$0.000000027 = 2.7 \times 0.00000001$

$= 2.7 \times 10^{-8}$

例 5 判斷科學記號的位數 學習內容 N-7-8

- (1) 若將 6.03×10^7 乘開，則這個數是幾位數？
- (2) 若將 4.2×10^{-4} 乘開，則這個數的小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

解 (1) $6.03 \times 10^7 = 6.03 \times 10000000 = 60300000$

所以 6.03×10^7 是 8 位數。

(2) $4.2 \times 10^{-4} = 4.2 \times 0.0001 = 0.00042$

所以 4.2×10^{-4} 乘開後，小數點後第 4 位開始出現不為 0 的數字。

隨堂練習

1. 若將 6.9×10^5 乘開，則這個數是幾位數？

$6.9 \times 10^5 = 690000$ ，所以 6.9×10^5 是 6 位數

2. 若將 3.62×10^{-6} 乘開，則這個數的小數點後第幾位開始出現不為 0 的數字？

$3.62 \times 10^{-6} = 0.00000362$

所以 3.62×10^{-6} 乘開後，小數點後第 6 位開始出現不為 0 的數字

由例 5 及隨堂練習我們可以知道，若 $1 \leq a < 10$ ， n 為正整數，則：

- (1) 科學記號 $a \times 10^n$ 乘開後，整數部分是 $(n+1)$ 位數。
- (2) 科學記號 $a \times 10^{-n}$ 乘開後，小數點後第 n 位開始出現不為 0 的數字。

科學記號的比較大小

當兩個數寫成科學記號的形式時，可以輕易的比較這兩數的大小。
若科學記號的指數相同，例如： 1.2×10^3 與 2.4×10^3 的指數都是 3，
因此這兩數乘開後都是 4 位數，又 $1.2 < 2.4$ ，所以 $1.2 \times 10^3 < 2.4 \times 10^3$ 。
但若科學記號的指數不同，我們要怎麼比較大小呢？

例 6 科學記號的比較大小 學習內容 N-7-8

比較下列各題中兩數的大小。

(1) 1.2×10^4 與 2.3×10^3

(2) 3.4×10^{-4} 與 3.6×10^{-5}

解 1 直接利用位數判斷大小：

(1) 1.2×10^4 是 5 位數， 2.3×10^3 是 4 位數，故 $1.2 \times 10^4 > 2.3 \times 10^3$ 。

(2) 3.4×10^{-4} 在小數點後第 4 位開始出現不為 0 的數字，
 3.6×10^{-5} 在小數點後第 5 位開始出現不為 0 的數字，
故 $3.4 \times 10^{-4} > 3.6 \times 10^{-5}$ 。

解 2 先將指數化成相同：

(1) $1.2 \times 10^4 = 1.2 \times 10 \times 10^3 = 12 \times 10^3$

因為 $12 \times 10^3 > 2.3 \times 10^3$ ，

所以 $1.2 \times 10^4 > 2.3 \times 10^3$ 。

(2) $3.4 \times 10^{-4} = 3.4 \times 10 \times 10^{-5} = 34 \times 10^{-5}$

因為 $34 \times 10^{-5} > 3.6 \times 10^{-5}$ ，

所以 $3.4 \times 10^{-4} > 3.6 \times 10^{-5}$ 。

Hint

$$10^4 = 10000$$

$$= 10 \times 1000$$

$$= 10 \times 10^3$$

$$10^{-4} = 0.0001$$

$$= 10 \times 0.00001$$

$$= 10 \times 10^{-5}$$

我們可以發現：兩個數若以科學記號表示，指數愈大者，其數值愈大。

Key point 科學記號的比較大小

當兩數分別表示成 $a \times 10^m$ 、 $b \times 10^n$ ， m 、 n 為整數，

其中 $1 \leq a < 10$ 、 $1 \leq b < 10$ ：

(1) 若 $m = n$ 且 $a > b$ ，則 $a \times 10^m > b \times 10^n$ 。

(2) 若 $m > n$ ，則 $a \times 10^m > b \times 10^n$ 。

隨堂練習

比較兩數的大小，在□中填入 >、< 或 =。

(1) 4.59×10^5 □ 6.1×10^5

兩數的指數皆為 5，但因為 $4.59 < 6.1$

所以 $4.59 \times 10^5 < 6.1 \times 10^5$

(2) 5.6×10^{-5} □ 9.2×10^{-6}

因為 $-5 > -6$

所以 $5.6 \times 10^{-5} > 9.2 \times 10^{-6}$

重點整理

1 乘方的意義

若 a 是不為 0 的整數，且 n 為正整數，則：

$$(1) \overset{\text{指數}}{\downarrow} a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\substack{\uparrow \text{底數} \quad n \text{ 個}}}。$$

例 $5^3 = 5 \times 5 \times 5$

$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$
 $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3)$

(2) $0^n = 0$ 。

例 $0^5 = 0$ ， $0^{12} = 0$

(3) $1^n = 1$ 。

例 $1^3 = 1$

2 10 的次方

當 n 為正整數時， $\frac{1}{10^n}$ 可記為 10^{-n} ，而 $10^0 = 1$ 。

例 $0.00001 = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$

3 科學記號表示法

一個正數表示成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10$ ，且 n 為整數。

例 5×10^4 、 2.36×10^8 、 1.7×10^{-6} 都是科學記號表示法。

4 科學記號的比較大小

當兩數表示成 $A = a \times 10^m$ 、 $B = b \times 10^n$ ， m 、 n 為整數，

其中 $1 \leq a < 10$ 、 $1 \leq b < 10$ ，則：

(1) 若 $m = n$ 且 $a > b$ ，則 $a \times 10^m > b \times 10^n$ 。 例 $8 \times 10^{-6} > 6 \times 10^{-6}$

(2) 若 $m > n$ ，則 $a \times 10^m > b \times 10^n$ 。 例 $3 \times 10^4 > 8 \times 10^2$

自我評量

1. 判斷下列哪個等式是正確的？答：_____ (C) _____。

P.66 隨堂

(A) $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = (-3)^5$

(B) $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = -3^4$

(C) $(-3) \times (-3) \times (-3) = -3^3$

(D) $-(3 \times 3) = (-3)^2$

2. 計算下列各式的值。

P.68 例 3

(1) $-3^2 + (-2)^3 - (-1)^4$

$= -9 + (-8) - 1$

$= -18$

(2) $(-5)^2 - 5^2 \div [4 + (-1)^2]^2$

$= 25 - 25 \div (4 + 1)^2$

$= 25 - 25 \div 25$

$= 25 - 1$

$= 24$

3. 下列哪些數值與 10^{-5} 的大小相等？答：_____ (A)、(D) _____。(可複選)

P.69 隨堂

(A) 0.00001

(B) 0.000001

(C) $\frac{1}{10000}$

(D) $\frac{1}{100000}$

4. 以科學記號表示下列各數。

P.71 例 1

(1) 7000000

$= 7 \times 10^6$

(2) 0.000000147

$= 1.47 \times 10^{-7}$

(3) $\frac{3}{10000}$

$= \frac{3}{10^4}$

$= 3 \times \frac{1}{10^4}$

$= 3 \times 10^{-4}$

5. 比較兩數的大小，在□中填入>、<或=。

(1) 2.5×10^6 □ 3.4×10^6

兩數的指數皆為 6

因為 $2.5 < 3.4$

所以 $2.5 \times 10^6 < 3.4 \times 10^6$

(2) 1.5×10^9 □ 4.8×10^8

因為 $9 > 8$

所以 $1.5 \times 10^9 > 4.8 \times 10^8$

(3) 3.1×10^{-4} □ 6.05×10^{-4}

兩數的指數皆為 -4

因為 $3.1 < 6.05$

所以 $3.1 \times 10^{-4} < 6.05 \times 10^{-4}$

(4) 8.2×10^{-7} □ 2.97×10^{-6}

因為 $-7 < -6$

所以 $8.2 \times 10^{-7} < 2.97 \times 10^{-6}$

挑錯題

以下是小翊和小妍計算「 $5^2 - (-5)^2 \times (13 - 3^2)$ 」的過程。判斷他們的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。

小翊：	小妍：
$5^2 - (-5)^2 \times (13 - 3^2)$	$5^2 - (-5)^2 \times (13 - 3^2)$
$= 10 - 10 \times (13 - 6)$	$= 5^2 + 5^2 \times (13 - 9)$
$= 10 - 10 \times 7$	$= 25 + 25 \times 4$
$= 10 - 70$	$= 25 + 100$
$= -60$	$= 125$

正確解法如下：

$$5^2 - (-5)^2 \times (13 - 3^2)$$

$$= 25 - 25 \times (13 - 9)$$

$$= 25 - 25 \times 4$$

$$= 25 - 100$$

$$= -75$$

一題多解

有 A 、 B 兩個棋子，分別在數線上 -5 與 11 的位置上，已知同時將 A 與 B 兩個棋子向左移動相同的單位長，恰可以使兩棋子的位置所表示的數互為相反數，則兩棋子各向左移動了幾個單位長？

1 列舉法

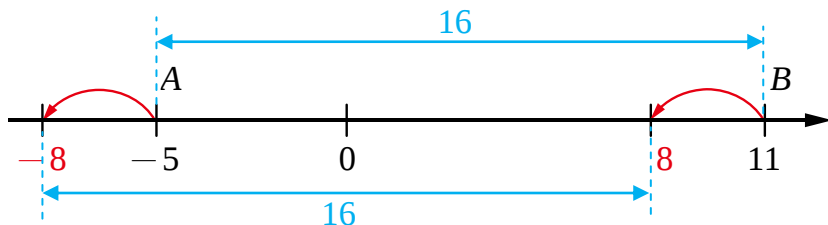
向左移動單位數	1	2	3	
A 棋子的位置	-6	-7	-8	
B 棋子的位置	10	9	8	

因此向左移動 3 個單位長，可使兩棋子的位置所表示的數互為相反數。

2 $\overline{AB}$ 長度保持不變

$$\overline{AB} = 11 - (-5) = 16,$$

又 $\frac{16}{2} = 8$ ，可知 A 、 B 兩棋子分別到達 -8 和 8 的位置，如圖所示。



$11 - 8 = 3$ ，可知兩個棋子各向左移動 3 個單位長，此時新的位置所表示的數互為相反數。

3 相反數的中點是原點

$$\overline{AB} = 11 - (-5) = 16,$$

$$\overline{AB} \text{ 的中點為 } (-5) + (16 \div 2) = (-5) + 8 = 3,$$

如果要互為相反數，中點要從 3 移動到 0，此時， A 、 B 也要同時向左移動 3 個單位長，則兩棋子的位置所表示的數互為相反數。