1 數列的極限與無窮等比級數

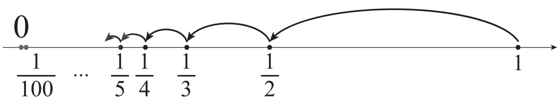
主題一　無窮數列的極限　（搭配課本 P.2～P.8）

1. 如果一個數列的項數是有限的，就稱這個數列為**有限數列**，否則稱為**無窮數列**。
2. 無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限：

   (1) 當 n 趨向無限大且 a_n 趨近一個定值 a 時，稱無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限為 a，記作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，並稱此數列為**收斂數列**。

   說例

   將無窮數列 $\left\langle \dfrac{1}{n} \right\rangle$ 逐項列出：$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \cdots, \dfrac{1}{100}, \cdots$。將各項依序在數線上標出其位置。

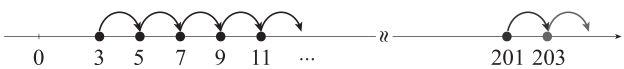


   當 n 愈來愈大時，$\dfrac{1}{n}$ 在數線上的位置會趨近原點 0。此時我們稱無窮數列 $\left\langle \dfrac{1}{n} \right\rangle$ 的極限為 0，並且用符號 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ 表示。

   (2) 當 n 趨向無限大且 a_n 不會趨近一個定值時，稱無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 為**發散數列**。

   說例

   將無窮數列 $\langle 2n+1 \rangle$ 的每一項依序列出：$3, 5, 7, \cdots, 201, 203, \cdots$。因為當 n 趨向無限大時，$2n+1$ 不會趨近一個定值，所以無窮數列 $\langle 2n+1 \rangle$ 為發散數列。



3. 無窮數列 $\langle r^n \rangle$ 的收斂與發散：

   (1) 當 $-1 < r < 1$ 時，無窮數列 $\langle r^n \rangle$ 為收斂數列，其極限為 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$。

   (2) 當 $r = 1$ 時，無窮數列 $\langle r^n \rangle$ 為收斂數列，其極限為 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 1$。

   (3) 當 $r \le -1$ 或 $r > 1$ 時，無窮數列 $\langle r^n \rangle$ 為發散數列，其極限不存在。

說例

(1) 將無窮數列 $\langle (0.1)^n \rangle$ 的每一項依序列出：0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, ⋯。觀察發現：$\lim\limits_{n\to\infty}(0.1)^n = 0$。

(2) 將無窮數列 $\langle (-2)^n \rangle$ 的每一項依序列出：$-2, 4, -8, 16, -32, \cdots$。觀察發現：當 n 趨向無限大時，$(-2)^n$ 不會趨近一個定值，所以無窮數列 $\langle (-2)^n \rangle$ 為發散數列。

例題 1

【配合課本例 1】

求下列各無窮數列的極限：

(1) $\left\langle -\dfrac{1}{n^2} \right\rangle$。　(2) $\left\langle 2+\dfrac{2}{n} \right\rangle$。　(3) $\langle -3 \rangle$。

解▸

演練 1

求下列各無窮數列的極限：

(1)$\left\langle -\dfrac{1}{n+1} \right\rangle$。　(2)$\left\langle 5-\dfrac{2}{n} \right\rangle$。　(3)$\left\langle \sqrt{2} \right\rangle$。

解▸

1

例題 2

【配合課本例 2】

判斷下列各無窮數列為收斂或發散數列；若為收斂數列，求其極限。

(1)$\left\langle \left(\dfrac{7}{9}\right)^n \right\rangle$。　(2)$\left\langle \left(\sqrt{5}-2\right)^n \right\rangle$。　(3)$\left\langle \pi^n \right\rangle$。

解▸

演練 2

判斷下列各無窮數列為收斂或發散數列；若為收斂數列，求其極限。

(1) $\left\langle (\pi-3)^n \right\rangle$。 (2) $\left\langle \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^n \right\rangle$。 (3) $\left\langle \left(-\dfrac{9}{8}\right)^n \right\rangle$。

解▸

例題 3

【常考題】

已知無窮數列 $\left\langle \left(x^2-x-1\right)^n \right\rangle$ 為收斂數列，求 x 的範圍。

解▸

演練 3

已知無窮數列 $\left\langle (2x-1)^n \right\rangle$ 為收斂數列，求 x 的範圍。

解▸

主題二　數列極限的運算性質 （搭配課本 P.9～P.13）

數列極限的運算性質：

若無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 的極限分別為 a 與 b，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，則

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$（其中 c 為常數）。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \times \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab$。

(5) 當所有 $b_n \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$。

1

例題 4

【配合課本例 3】

求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \dfrac{4}{n} - \dfrac{2}{n^2}\right)$。　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n}{3^{n+1}}\right)$。　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)\left(4 - \dfrac{3}{n^2}\right)\right)$。

解▸

演練 4

求下列各極限：

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{3n}+\frac{4}{3n^2}\right)$。　(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{n+1}}{5^n}\right)$。　(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2}{n}-1\right)\left(3+\frac{1}{n^2+1}\right)\right)$。

解▸

例題 5

【配合課本例 4】

求下列各極限：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n+1}{2n^3+3n}$。　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+100}{4n^2+1}$。　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}+4^n}{4^{n+1}-5^n}$。

解▸

演練 5

求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+n^2-5}{(n+1)^3}$。　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-10}{n^3+1}$。　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^{n+1}-3^n}{4\times 7^n+2^{n+1}}$。

解▶

例題 6

【常考題】

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{2n+1}-\dfrac{n^2+1}{2n-1}\right)$ 的值。

解▶

演練 6

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n-2}{n+2}-\dfrac{n^2+1}{n+1}\right)$ 的值。

解▸

例題 7

【配合課本例 5】

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2}{n^3}$ 的值。

解▸

演練 7

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{n^2}$ 的值。

解▸

例題 8

【常考題】

(1)已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+7}{3n^2-2n}=2$，求常數 a 的值。

(2)已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^3-3bn+3}{2n-1}=3$，求常數 a 與 b 的值。

解▸

1

演練 8

(1)已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(an^2+2\right)\left(3n-10\right)}{2n^3-5}=-3$，求常數 a 的值。

(2)已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(a+2b\right)n^3-\left(3a-2b\right)n^2+5n}{2n^2+3}=4$，求常數 a 與 b 的值。

解▸

主題三 Σ 及其運算性質

（搭配課本 P.14～P.15）

1. 符號 Σ 表示連加或求和的意思，利用這個符號可將級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 簡記成 $\sum_{k=1}^{n} a_k$，

   即 $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n$。

   說例

   $\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_5$，$\sum_{k=1}^{10} 2^k = 2^1+2^2+\cdots+2^{10}$。

2. Σ 的運算性質：

   (1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k$。

   (2) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$（$c$ 是常數）。

例題 9

【配合課本內文】

將下列各式寫成連加的式子，並求出其值：

(1) $\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$。　(2) $\sum_{k=1}^{5}\sqrt{2}$。　(3) $\sum_{k=2}^{5}(-3)^k$。

解▸

演練 9

將下列各式寫成連加的式子，並求出其值：

(1) $\sum_{k=1}^{4}(5-2k)$。　(2) $\sum_{k=2}^{5}16\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$。　(3) $\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^{k}}{2k-3}$。

解▸

例題 10

【配合課本例 6】

求$\sum_{k=1}^{10}(k+1)(k+2)$的值。

解▸

演練 10

求$\sum_{k=1}^{7}(k+1)(2k+1)$的值。

解▸

主題四 無窮等比級數與循環小數（搭配課本 P.16～P.25）

1. 將無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 的各項用「＋」號連接起來所成的式子 $a_1+a_2+a_3+\cdots$ 稱為**無窮級數**。
2. 無窮級數的和：給定無窮級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$，並令其前 n 項的和為 S_n，
   即 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$。
   (1) 若無窮數列 $\langle S_n \rangle$ 為收斂數列，且其極限為 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$，則稱此無窮級數為**收斂級數**，
   它的和為 S，即 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$。
   (2) 若無窮數列 $\langle S_n \rangle$ 為發散數列，則稱此無窮級數為**發散級數**，其和不存在。
3. 將無窮等比數列的各項用加號連起來的算式，稱為**無窮等比級數**
   說例
   將無窮等比數列 $\left\langle \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\rangle$ 的每一項用加號連接起來，即 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$，就是無窮等比級數。
4. 無窮級數 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ 的和：
   (1) 當 $-1<r<1$ 時，此無窮級數為收斂級數，其和為 $\frac{a}{1-r}$。
   (2) 當 $r\le -1$ 或 $r\ge 1$ 時，此無窮級數為發散級數，其和不存在。
   說例
   首項為 $\frac{1}{2}$，公比為 $\frac{1}{2}$ 的無窮等比級數 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ 前 n 項的和為

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}。$$

   因為當 n 趨向無限大時，$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 會趨近 0，所以無窮數列 $\langle S_n \rangle$ 的極限為

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1。$$

5. 利用無窮等比級數的和，也可以將循環小數化為分數。
   說例 循環小數 $0.\overline{12}=0.121212\cdots=0.12+0.0012+0.000012+\cdots$，此為首項 0.12，
   公比 0.01 的無窮等比級數。因此 $0.\overline{12}=\frac{0.12}{1-0.01}=\frac{0.12}{0.99}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$。
6. 無窮等比級數可使用 Σ 簡寫，例如：$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$。

例題 11

【配合課本例 7】

判斷下列各無窮等比級數為收斂或發散級數；若為收斂級數，求其和。

(1) $3+\frac{3}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\cdots$。　(2) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\cdots$。　(3) $1-\frac{5}{4}+\frac{25}{16}-\frac{125}{64}+\cdots$。

解▸

演練 11

判斷下列各無窮等比級數為收斂或發散級數；若為收斂級數，求其和。

(1) $1+\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\cdots$。

(2) $-2+\frac{4}{3}-\frac{8}{9}+\frac{16}{27}-\cdots$。

(3) $2-2+2-2+\cdots$。

解▸

例題 12

【常考題】

已知一無窮等比級數的和為 $\frac{9}{2}$，第二項為 -2，求首項 a 與公比 r。

解▸

演練 12

已知一無窮等比級數的和為 8，第二項為 -6，求首項 a 與公比 r。

解▸

例題 13

【常考題】

求$\frac{1}{3}+\frac{3}{9}+\frac{7}{27}+\cdots+\frac{2^n-1}{3^n}+\cdots$的值。

解▸

演練 13

求$\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{27}\right)+\cdots+\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)+\cdots$的值。

解▸

例題 14

【配合課本例 8】

將下列各循環小數化成分數：

(1) $0.\overline{303}$。　　(2) $0.5\overline{23}$。

解▶

演練 14

將下列各循環小數化成分數：

(1) $0.\overline{05}$。　　(2) $0.0\overline{54}$。

解▶

例題 15

【常考題】

(1)求 $0.9+0.099+0.00999+\cdots$的值。

(2)求 $0.7+0.077+0.00777+\cdots$的值。

解▶

演練 15

求 $0.3+0.033+0.00333+\cdots$ 的值。

解▸

1

例題 16 【常考題】

(1) 已知無窮數列 $\langle(3x-5)^n\rangle$ 為收斂數列，求 x 的範圍。

(2) 已知無窮級數 $(3x-5)+(3x-5)^2+(3x-5)^3+\cdots+(3x-5)^n+\cdots$ 為收斂數列，求 x 的範圍。

解▸

演練 16

(1)已知無窮數列$\left\langle (2x-1)^n \right\rangle$為收斂數列，求 x 的範圍。

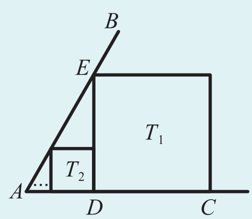
(2)已知無窮級數$(2x-1)+(2x-1)^2+(2x-1)^3+\cdots+(2x-1)^n+\cdots$為收斂級數，求 x 的範圍。

解▸

例題 17

【配合課本例 9】

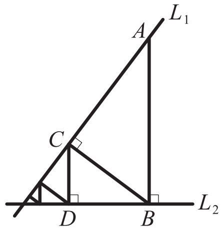
如圖，$\angle BAC=60°$，$\overline{CD}=4$，其中 $T_1, T_2, T_3, \cdots$都是正方形，求所有正方形 $T_1, T_2, T_3, \cdots$邊長的總和。



解▸

演練 17

有二相交直線 L_1 及 L_2，自 L_1 上一點 A 作 L_2 的垂線，交 L_2 於 B 點；再自 B 點作 L_1 的垂線，交 L_1 於 C 點；重複以上步驟如此繼續下去，可得無窮多個線段。已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，求此無窮多個線段長的和。

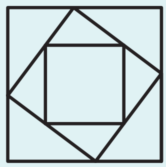


解▸

例題 18

【配合課本例 10】

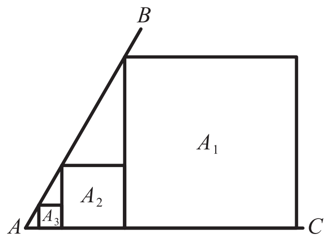
如圖，以 3：4 在大正方形的各邊做內分點，連接各分點得第二個正方形；再以相同比例內分第二個正方形各邊，連接各分點得第三個正方形，重複以上步驟如此繼續下去，可得無窮多個正方形。已知大正方形的邊長為 1，求所有正方形面積的總和。



解▸

演練 18

如圖，$\angle BAC = 60°$，其中 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 均為正方形。已知正方形 A_1 的邊長為 2，求所有正方形 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 面積的總和。



解▸

例題 19 【常考題】

求下列各式的值：

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}$。　(2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5\times 2^k-1}{3^k}$。

解▸

演練 19

求 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\times3^k+4^{k+1}}{3\times6^k}$ 的值。

解▶

1

主題五　夾擠定理

（搭配課本 P.26～P.28）

設無窮數列 $\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$ 與 $\langle c_n\rangle$ 從某一項起均滿足 $a_n\le c_n\le b_n$。

若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L$，則無窮數列 $\langle c_n\rangle$ 也是收斂數列，且其極限為 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=L$。

例題 20

【配合課本例 11】

已知無窮數列 $\langle c_n\rangle$ 中的每一項 c_n 都滿足 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n^2}\le c_n\le\frac{1}{2}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ 的值。

解▶

演練 20

已知無窮數列$\langle c_n \rangle$中的每一項c_n都滿足$\dfrac{3n^2+5}{n^2+2n+2} \le c_n \le \dfrac{3n^2+11}{n^2+2n+2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$的值。

解▸

例題 21

【配合課本例 12】

已知無窮數列$\langle a_n \rangle$中的每一項a_n都滿足$n^2+3<2n^2a_n<n^2+6n$，求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$的值。

解▸

演練 21

已知無窮數列$\langle a_n \rangle$中的每一項a_n都滿足$2n+3<na_n<2n+5$，求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$的值。

解▸

重要精選考題

（主：代表本單元對應的主題）

基礎題

1. 求下列各無窮數列的極限：

(1)$\left\langle \dfrac{5}{2n} \right\rangle$。　(2)$\left\langle 7-\dfrac{1}{n} \right\rangle$。　(3)$\langle -1 \rangle$。　主一

2. 判斷下列各無窮數列為收斂或發散數列；若為收斂數列，求其極限。

(1)$\left\langle (-0.99)^n \right\rangle$。　(2)$\left\langle \dfrac{(-2)^n}{7^n} \right\rangle$。　(3)$\left\langle \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^n \right\rangle$。　主一

3. 選出正確的選項。

(1)若數列$\langle a_n \rangle$，$\langle b_n \rangle$均為收斂數列，則$\langle a_n+b_n \rangle$為收斂數列

(2)若$\langle a_n+b_n \rangle$為收斂數列，則$\langle a_n \rangle$，$\langle b_n \rangle$均為收斂數列

(3)若數列$\langle a_n \rangle$收斂於 0，則數列$\langle a_n^2 \rangle$收斂於 0

(4)若數列$\langle a_n^2 \rangle$收斂於 1，則數列$\langle a_n \rangle$收斂於 1。　主二

4. 求下列各極限：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2+4n+7}{5n^2-n+3}$。

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-3^{n-1}}{7^{n+1}}$。

(3)$0<a<b$，以 a, b 表示$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$的值。　主二

5. 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n}-\frac{n^2-2n+5}{n-1}\right)$ 的值。 主二

6. 求下列各極限：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2+4+\cdots+2n}{1+3+\cdots+(2n-1)}$ 。 (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{4n^3}$ 。 主二

7. (1)已知 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-2}{-3n^2+5n}=\frac{2}{3}$ ，求常數 a 的值。

(2)已知 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2bn+8}{5n-3}=6$ ，求常數 a 與 b 的值。 主二

8. 已知 $\sum_{k=1}^{4}(ak+b)=18$ ， $\sum_{k=0}^{3}(ak+b)=6$ ，求 a ， b 的值。 主三

9. 已知首項為 a ，公比為 r 的無窮等比級數和等於 5；首項為 a 、公比為 $3r$ 的無窮等比級數和等於 7，則首項為 a 、公比為 $2r$ 的無窮等比級數和等於______。 主四

【100 學測】【答對率 49%】

10. 求 $\frac{4-1}{5^2}+\frac{4^2-3}{5^3}+\frac{4^3-3^2}{5^4}+\cdots+\frac{4^n-3^{n-1}}{5^{n+1}}+\cdots$ 的值。 主四

11. 將下列各循環小數化成分數：

(1) $0.4\overline{03}$ 。 (2) $2.5\overline{8}$ 。 主四

12. 若首項為 a，公比為 0.01 的無窮等比級數和等於循環小數 $1.\overline{2}$，則 $a=$______。 主四
【101 學測】【答對率 44%】

13. 已知對任意正整數 $n\geq 3$，不等式 $3^n\geq n^3$ 恆成立，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}$ 的值。 主五

1

進階題

1. 無窮數列 $\langle a_n\rangle$ 的 $a_1=\sqrt{2},\ a_2=\sqrt{2\sqrt{2}},\ a_3=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\cdots$ 依此規律繼續下去，利用 $\lim\limits_{n\to\infty}k^{b_n}=k^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$（其中 k 為實數，$\langle b_n\rangle$ 為收斂數列），求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 的值。

2. 已知一無窮等比數列前兩項的和為 $\frac{25}{4}$，且任一項恰等於該項之後各項和的 3 倍，求此數列的首項 a 與公比 r。

3. 已知一皮球從 120 公尺高處落下，每次返跳的高度為前次高度的 $\frac{2}{3}$，求自開始落下至皮球靜止所經過的距離。

4. 求 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{8^{k-1}}$ 的值。

5. 令多項式 $2(x+1)^n$ 除以 $(3x-2)^n$ 所得餘式的常數項為 r_n，求極限 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ 的值。

【103 指甲（修）】

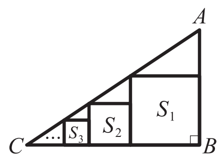
6. 在實數線上，動點 A 從原點 0 開始往正向移動，動點 B 從 8 的位置開始往負向移動。兩個動點每一秒移動一次，已知第一秒 A, B 移動的距離分別為 $1, 4$，且 A, B 每次移動的距離分別為其前一次移動距離的 $\frac{1}{2}$ 倍與 $\frac{1}{3}$ 倍。

(1)設第 n 秒時，A, B 兩點的位置分別為 a_n 與 b_n，以 n 分別表示 a_n 與 b_n。

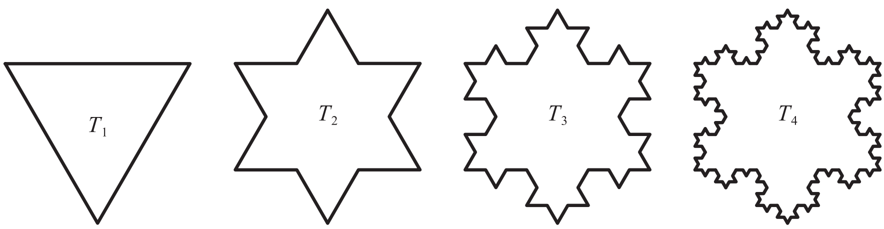
(2)設 c_n 為第 n 秒時 A, B 中點的位置，求 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 的值。　【105 指甲（修）】

7. 一盒子裡有 n（$n>3$）顆大小相同的球，其中有 1 顆紅球、2 顆藍球以及 $n-3$ 顆白球。從盒子裡隨機同時抽取 3 球，所得球的計分方式為每顆紅球、藍球及白球分別為 $2n$ 分、n 分及 1 分。若所得分數的期望值為 E_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n =$ ______。　【104 指甲】【答對率 25%】

8. 如圖，直角 $\triangle ABC$ 的兩股長為 $\overline{AB}=16$，$\overline{BC}=24$，其中 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 為內接正方形，求所有正方形 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 面積的總和。



9. 瑞典數學家科赫在 1904 年介紹一種曲線的作法：取邊長為 1 的正三角形為 T_1，以 T_1 每邊中間三分之一的線段為一邊，向外作正三角形後，然後將該三分之一線段抹去，可得多邊形 T_2，重複以上步驟如此繼續下去，可得無窮多個多邊形 $T_1, T_2, T_3, T_4, \cdots$，如圖所示。



(1)令 a_n 表 T_n 的周長，以 n 表示 a_n。

(2)求 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots$ 的值。

歷屆大考觀摩

1. 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。令 n 為正整數，T_n 為平面上以直線 $y=\frac{-1}{2n}x+3$，以及 x 軸、y 軸所圍成的三角形區域（包含邊界），而 a_n 為 T_n 上的格子點數目，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=$______。　【106 指甲】【答對率 33%】

2. 設 a, b 為循環小數，$a=0.\overline{12}$，$b=0.\overline{01}$，則 $a-b$ 的值是下列哪一個選項?
(1) 0.11　(2) 0.1111　(3) $\frac{1}{9}$　(4) $\frac{10}{99}$　(5) $\frac{100}{999}$。　【108 指乙】【答對率 80%】

3. 已知數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$、$\langle c_n\rangle$、$\langle d_n\rangle$、$\langle e_n\rangle$ 定義如下：
$a_n=(-1)^n$；$b_n=a_n+a_{n+1}$；$c_n=\left(\frac{-\sqrt{10}}{3}\right)^n$；$d_n=\frac{1}{3}c_n$；$e_n=\frac{1}{c_n}$；其中 $n=1, 2, 3, \cdots$。
下列選項中，試選出會收斂的無窮級數。
(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n$　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e_n$。【107 指乙】【答對率 48%】

4. 數列 $a_1, a_2, \cdots$ 中，其奇數項是一個公比為 $\frac{1}{3}$ 的等比數列，而偶數項是一個公比為 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，且 $a_1=3$，$a_2=2$。試選出正確的選項。
(1) $a_4>a_5>a_6>a_7$　(2) $\frac{a_{10}}{a_{11}}>10$　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$　(5) $\sum\limits_{n=1}^{100}a_n>9$。
【109 指乙】【答對率 57%】

5. 設 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$ 為兩實數數列，且對所有的正整數 n，$a_n<b_n^2<a_{n+1}$ 均成立。若已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$，試選出正確的選項。
(1)對所有的正整數 n，$a_n>3$ 均成立　(2)存在正整數 n，使得 $a_{n+1}>4$
(3)對所有的正整數 n，$b_n^2<b_{n+1}^2$ 均成立　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^2=4$
(5) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-2$。　【108 指甲】【答對率 34%】